Выпуск 22 (39) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

О ВЫЧИСЛЕНИИ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕГИОНОВ

А.Г.Рубинштейн

Введение

В [1-4] автором были изучены различные варианты линейной модели взаимодействия, основанной на принципах экономического равновесия. Во всех этих вариантах при фиксированных ценах обмена и заданных региональных сальдо торговых балансов регионы определяют свои планы производства, вывоза и ввоза путем решения тех или иных задач линейного программирования. Основная задача состоит в том, чтобы при заданных региональных сальдо торговых балансов среди определенным образом нормированных цен обмена найти так называемые равновесные (балансирующие), при которых среди оптимальных решений региональных (локальных) задач имеются сбалансированные по суммарному вывозу и ввозу каждого продукта. Устанавливается, что при этом вектор значений критериальных функционалов региональных задач принадлежит ядру рассматриваемой экономической системы. Это означает, что никакая группа (коалиция) регионов, выделившись, не может улучшить в смысле Парето совокупность значений отвечающих ей функционалов. При некоторых естественных предположениях доказывается существование равновесных цен. Кроме того, устанавливается связь изученной модели с некоторой глобальной оптимизационной задачей линейного программирования, в которой отношение значений локальных функционалов фиксировано.

Важно отметить, что при фиксированных ценах обмена нельзя гарантировать единственность решения каждой региональной задачи. Поэтому вектор невязок суммарного вывоза и ввоза, вообще говоря, определяется неоднозначно. Но множество таких векторов замкнуто и, следовательно, содержит вектор с минимальной нормой. Очевидно, что последняя равна нулю в том и только в том случае, когда рассматриваемые цены обмена являются равновесными. Таким образом, интересующая нас основная задача сводится к минимизации некоторой неотрицательной функции, определенной на множестве нормированных векторов цен обмена. Однако эта функция в общем случае не является непрерывной и имеет локальные минимумы, отличные от глобального. Следовательно, речь идет о многоэкстремальной задаче, которая в принципе не может быть сведена к решению какой-либо задачи линейного или выпуклого программирования.

Общие методы решения подобных задач основаны на численной реализации сложных процедур симплициальных разбиений, фигурирующих в теоретических доказательствах теорем существования неподвижных точек при точечных и точечно-множественных отображениях. Такие методы были разработаны сравнительно недавно (см.[5-6], а также монографию Скарфа [7]), но практическая реализация их на современных ЭВМ связана с принципиальными трудностями. В связи с этим важное значение приобретают приближенные методы [8-10], позволяющие при хорошем начальном приближении, как правило, за небольшое число шагов получать равновесные цены и отвечающие им сбалансированные оптимальные планы локальных задач. Изложению одного подхода к построению таких методов посвящена настоящая работа.

§ 1. Конкретизация основной модели и отвечающей ей глобальной оптимизационной задачи

Для определенности будем считать, что имеется z регионов, которые ведут обмен по n транспортабельным видам продукции. Заданы региональные сальдо торговых балансов

$$w=(w_1, w_2, \dots, w_z), \quad \sum_{s=1}^{z} w_s = 0, \qquad (1)$$

а также неотрицательный нормирующий вектор $l=(l_1, l_2, \dots, l_n)$, позволяющий приводить общий уровень цен обмена к масштабу вектора (I). При нулевых w_s выбор нормирующего вектора, естественно, не играет никакой роли.

Предполагается, что при фиксированных ценах обмена

$$p=(p_1,p_2,\dots,p_n),\ p_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} l_i p_i=1, \qquad (2)$$

каждый регион $s=1,2,\dots,r$ определяет свои планы производства, вывоза и ввоза

$$x^s=\langle x_1^s,\dots,x_{m_s}^s\rangle,\ u^s=\langle u_1^s,\dots,u_n^s\rangle,\ v^s=\langle v_1^s,\dots,v_n^s\rangle, \qquad (3)$$

а также величину λ_s, характеризующую эффективность выполнения намеченной программы, из условий

$$A^s x^s+G^s u^s+H^s v^s\geq b^s+\lambda_s d^s, \qquad (4)$$

$$pu^s-pv^s\geq w_s, \qquad (5)$$

$$\lambda_s \to max, \qquad (6)$$

где b^s и d^s - фиксированные μ_s -мерные векторы-столбцы, которые характеризуют соответственно выделенные и включенные в программу части ресурсов и потребностей, а A^s, G^s и H^s - технологические матрицы производства, вывоза и ввоза.

В двойственной задаче, очевидно, переменными являются неотрицательный вектор-строка $y^s=(y_1^s,\dots,y_{\mu_s}^s)$, определяющий оценки ограничений (4), и неотрицательная величина z_s - оценка ограничения (5). Эти переменные ищутся из условий

$$y^s A^s\leq 0,\ y^s G^s+z_s p\leq 0,\ y^s H^s-z_s p\leq 0, \qquad (7)$$

$$-y^s d^s+1\leq 0, \qquad (8)$$

$$-y^s b^s-z_s w_s \to min. \qquad (9)$$

Каковы бы ни были цены обмена (2), указанные локальные задачи (4)-(6) и двойственные к ним задачи (7)-(9) при естественных предположениях относительно исходных данных разрешимы. Далее, в этих задачах однозначно определяются не только экстремальные значения, но и оптимальные оценки ограничений (5), причем соответствующие векторы

$$\lambda(p)=(\lambda_1(p),\dots,\lambda_r(p)), \qquad (10)$$

$$z(p)=(z_1(p),\dots,z_r(p)) \qquad (11)$$

являются положительными. Что касается оптимальных региональных планов $x^s(p), u^s(p), v^s(p)$ и векторов $y^s(p)$ оптимальных оценок ограничений (4), то они, вообще говоря, определяются неоднозначно. Однако ввиду положительности векторов (I0) и (II) для них всегда в неравенствах (5) и (8) достигаются равенства, т.е.

$$\rho u^s(\rho)-\rho v^s(\rho)=w_s,\ y^s(\rho)d^s=1,\ s=1,2,\dots,r.$$

Далее, в силу признака оптимальности, имеем

$$\lambda_s(\rho)=-y^s(\rho)b^s-z_s(\rho)w_s, \qquad (I2)$$

$$y^s(\rho)(A^s x^s(\rho)+G^s u^s(\rho)+H^s v^s(\rho)-b^s-\lambda^s(\rho)d^s)=0,$$

$$y^s(\rho)A^s x^s(\rho)=(y^s(\rho)G^s+z_s(\rho)\rho)u^s(\rho)=(y^s(\rho)H^s-z_s(\rho)\rho)v^s(\rho)=0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из однозначной определяемости векторов (I0), (II) и соотношения (I2) вытекает, что величины $y^s(\rho)b^s$ не зависят от выбора оптимальных решений в двойственных задачах (7)-(9).

Для рассмотренной конкретизации модели экономического взаимодействия регионов связанная с ней глобальная оптимизационная задача линейного программирования ставится следующим образом.

При фиксированном векторе

$$\nu=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_r),\ \nu_s>0, \qquad (I3)$$

характеризующем распределение глобального эффекта между регионами, требуется определить неотрицательные векторы (3), вектор

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r) \qquad (I4)$$

и неотрицательный коэффициент ρ, удовлетворяющие неравенствам (4), а также условиям

$$\sum_{s=1}^{r} u^s \geq \sum_{s=1}^{r} v^s, \qquad (I5)$$

$$\lambda_s \geq \rho\nu_s,\quad s=1,2,\dots,r, \qquad (I6)$$

$$\rho \to \max. \qquad (I7)$$

В соответствующей двойственной задаче ищутся неотрицательные векторы-строки (оценки ограничений (4), (I5) и (I6))

$$\eta^s=(\eta_1^s,\dots,\eta_{\mu_s}^s),\ q=(q_1,\dots,q_n),\ \zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_r) \qquad (I8)$$

из условий

$$\eta^s A^s \leq 0,\ \eta^s G^s+q\leq 0,\ \eta^s H^s-q\leq 0,\ s=1,2,\dots,r, \qquad (I9)$$

$$-\eta^s d^s + \zeta_s \le 0,\quad s=1,2,\dots,r,\quad -\sum_{s=1}^{r} \zeta_s \nu_s + 1 \le 0, \qquad (20)$$

$$-\sum_{s=1}^{r} \eta^s b^s \to \min. \qquad (21)$$

Опять-таки, каков бы ни был вектор распределения эффекта (I3), глобальная задача (4), (I5)-(I7) и двойственная к ней задача (I9)-(2I) при естественных предположениях относительно исходных данных разрешимы. В этих задачах однозначно определяется не только положительное экстремальное значение $\rho[\nu]$, но и положительные оптимальные оценки

$$q[\nu] = (q_1[\nu], q_2[\nu], \dots, q_n[\nu]), \qquad (22)$$

$$\zeta[\nu] = (\zeta_1[\nu], \zeta_2[\nu], \dots, \zeta_r[\nu]). \qquad (23)$$

Но тогда в оптимальном решении однозначно определяется также положительный вектор (I4). Таковым является вектор

$$\lambda[\nu] = \rho[\nu]\cdot\nu \qquad (24)$$

с компонентами

$$\lambda_s[\nu] = \rho[\nu]\cdot\nu_s,\quad s=1,2,\dots,r. \qquad (25)$$

Что касается оптимальных векторов $x^s[\nu], u^s[\nu], v^s[\nu]$ и $\eta^s[\nu]$, то они, вообще говоря, определяются неоднозначно. Однако для них, ввиду положительности $\rho[\nu]$, $q[\nu]$ и $\lambda[\nu]$, всегда имеют место равенства

$$\sum_{s=1}^{r} \zeta_s[\nu]\nu_s = 1,\quad \sum_{s=1}^{r} u^s[\nu] = \sum_{s=1}^{r} v^s[\nu], \qquad (26)$$

$$-\eta^s[\nu] d^s + \zeta_s[\nu] = 0,\quad s=1,2,\dots,r. \qquad (27)$$

Далее, из признака оптимальности вытекает, что

$$\eta^s[\nu]\,(A^s x^s[\nu] + G^s u^s[\nu] + H^s v^s[\nu] - b^s - \lambda_s[\nu] d^s) = 0, \qquad (28)$$

$$\eta^s[\nu] A^s x^s[\nu] = (\eta^s[\nu] G^s + q[\nu] u^s[\nu]) = (\eta^s[\nu] H^s - q[\nu]) v^s[\nu] = 0. \qquad (29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из однозначной определяемости векторов (22) и (23) вытекает, что величины

$$\eta^s[\nu] b^s,\quad q[\nu] u^s[\nu] - q[\nu] v^s[\nu],\quad s=1,2,\dots,r,$$

не зависят от выбора оптимальных решений в глобальной задаче (4), (I5)-(I7) и двойственной задаче (I9)-(2I).

Действительно, при фиксированных $q=q[\nu]$ и $\zeta=\zeta[\nu]$ задача (19)-(21) распадается на r задач с целевыми функциями $\eta^s b^s$. Следовательно, каждая из них при всех оптимальных решениях принимает одно и то же значение. Далее из (28) с учетом (29) и (27) получаем

$$q[\nu]u^s[\nu]-q[\nu]v^s[\nu]=-\eta^s[\nu]b^s-\lambda_s[\nu]\zeta_s[\nu],$$

где правая часть не зависит от выбора оптимальных решений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из однозначной определяемости вектора (24) вытекает, что для положительных векторов ν и ν' следующие соотношения эквивалентны:

$$\lambda[\nu]\leq\lambda[\nu'],\ \lambda[\nu]=\lambda[\nu'],\ \nu=c\nu'. \qquad (30)$$

Действительно, из левого соотношения следует, что векторы $x^s=x^s[\nu'],\ u^s=u^s[\nu'],\ v^s=v^s[\nu'],\ \lambda=\lambda[\nu']$ и величина $\rho=\rho[\nu]$ удовлетворяют условиям (4), (19) и (20), т.е. оптимальны в задаче (4), (19)-(21), отвечающей вектору ν. Но тогда среднее соотношение в (30) является следствием однозначного определения в оптимальном решении вектора (14). Далее, из среднего соотношения в (30) и (24) получаем

$$\rho[\nu]\cdot\nu=\lambda[\nu]=\lambda[\nu']=\rho[\nu']\nu',$$

т.е. при $c=(\rho[\nu'])\cdot(\rho[\nu])^{-1}$ справедливо правое соотношение в (30). Наконец, если $\nu=c\nu'$, то тогда очевидно $\rho[\nu']=c\rho[\nu]$ и, следовательно,

$$\lambda[\nu]=\rho[\nu]\cdot\nu=(c^{-1}\rho[\nu'])\cdot(c\nu')=\rho[\nu']\cdot\nu'=\lambda[\nu'],$$

что завершает доказательство эквивалентности соотношений (30).

§ 2. Некоторые теоретические результаты

Для выяснения связи рассмотренной модели экономического взаимодействия регионов с указанной глобальной оптимизационной задачей каждому положительному вектору (13) сопоставим нормированные цены обмена

$$p[\nu]=\alpha[\nu]q[\nu],\ \alpha[\nu]=\left(\sum_{i=1}^{n}l_i q_i[\nu]\right)^{-1}. \qquad (31)$$

Кроме того, положим

$$f[\nu]=\lambda(p[\nu]), \qquad (32)$$

$$F(\nu)=\lambda[\nu]+\delta[\nu], \qquad (33)$$

где $\lambda[\nu]=p[\nu]\cdot\nu$, а компоненты r-мерного вектора $\delta[\nu]$ вычисляются по формулам

$$\delta_s[\nu]=(\zeta_s[\nu])^{-1}(q[\nu]u^s[\nu]-q[\nu]v^s[\nu]-(\alpha[\nu])^{-1}w_s)=$$

$$=(\alpha[\nu]\zeta_s[\nu]^{-1}(p[\nu]u^s[\nu]-p[\nu]v^s[\nu]-w_s). \qquad (34)$$

Важно отметить, что все введенные здесь векторы и величины, в силу указанных выше фактов, по вектору ν определяются однозначно.

ЛЕММА I. Пусть имеются векторы (10), (11) и $y^s(p)$, отвечающие нормированным ценам обмена (2). Тогда векторы

$$\ell^s=\frac{\beta}{x_s(p)}\,y^s(p),\ q=\beta p,\ \zeta=\left(\frac{\beta}{x_1(p)},\ldots,\frac{\beta}{x_r(p)}\right), \qquad (35)$$

где

$$\beta=\beta(p)=\left(\sum_{s=1}^{r}\frac{\lambda_s(p)}{x_s(p)}\right)^{-1}, \qquad (36)$$

при $\nu=\nu(p)$ допустимы в двойственной задаче (19)-(21) и отвечающее им значение целевой функции (21) равно единице. Следовательно, в соответствующей прямой задаче (4)-(6) для максимального значения целевой функции (6) имеет место неравенство

$$p[\lambda(p)]\leq 1, \qquad (37)$$

которое в силу (25) равносильно соотношениям

$$\lambda_s[\lambda(p)]=p[\lambda(p)]\lambda_s(p)\leq\lambda_s(p),\ s=1,2,\ldots,r. \qquad (38)$$

Если при этом в (37) достигается равенство, то для нормированных цен обмена (31) при $\nu=\lambda(p)$ имеем

$$p[\lambda(p)]=p. \qquad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустимость векторов (35) в указанной задаче (19)-(21) очевидным образом следует из допустимости векторов $y^s(p)$ и положительных величин $z_s(p)$ в двойственных задачах (7)-(9). При этом для соответствующего значения целевой функции (21), учитывая (35),(36) и (12), получаем

$$-\sum_{s=1}^{r} \eta^s b^s = -\beta \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{z_s(p)}(y^s(p)b^s) = \beta \sum_{s=1}^{r} \frac{\lambda_s(p)+z_s(p)w_s}{z_s(p)} =$$
$$= \beta\left(\sum_{s=1}^{r} \frac{\lambda_s(p)}{z_s(p)} + \sum_{s=1}^{r} w_s\right) = \beta(\beta^{-1}+0) = 1.$$

Но тогда неравенство (37) и эквивалентные ему неравенства (38) имеют место в силу основного соотношения двойственности.

Допустим теперь, что в (37) достигается равенство. В этом случае рассмотренные векторы (35) при $\nu = \lambda(p)$ являются оптимальными в двойственной задаче (19)-(21). Но тогда из (31), (35) и (2) получаем

$$p[\lambda(p)] = \alpha[\lambda(p)]\beta p = \left(\sum_{i=1}^{n} l_i \beta p_i\right)^{-1} \beta p = p,$$

что завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть при некотором положительном векторе (13) имеются оптимальные решения задач (4), (15)-(17) и (19)-(21). Тогда в двойственных задачах (7)-(9), отвечающих нормированному вектору $p = p[\nu] = \alpha[\nu]q[\nu]$ и произвольным региональным сальдо торговых балансов (1), допустимыми решениями являются*

$$y^s = (\zeta_s[\nu])^{-1}\eta^s[\nu], \quad z_s = (\alpha[\nu]\zeta_s[\nu])^{-1}. \tag{40}$$

Если при этом вектор $\delta[\nu]$ с компонентами (34) - нулевой, т.е. заданные региональные сальдо w_s совпадают с величинами

$$w_s^* = p[\nu]u^s[\nu] - p[\nu]v^s[\nu], \quad s = 1,2,\dots,r, \tag{41}$$

то при $p = p(\nu)$ указанные допустимые решения (40) оптимальны в зада-

чах (7)-(9), а в соответствующих локальных задачах (4)-(6) оптимальными являются сбалансированные планы

$$x^s = x^s[y],\ u^s = u^s[y],\ v^s = v^s[y],\ \lambda_s = \lambda_s[y]. \tag{42}$$

В этом случае вектор (32) совпадает с вектором (24) и цены обмена (31) являются равновесными. В общем случае вектор (32) мажорируется вектором (33), т.е. имеют место неравенства

$$\lambda_s(p[y]) \leq \lambda_s[y] + \delta_s[y],\ s = 1,2,\dots,r. \tag{43}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустимость векторов и величин (40) в двойственных задачах (7)-(9) при $p = p[y]$ очевидным образом следует из (31) и допустимости векторов $\eta^s[y], q[y], z[y]$ в двойственной задаче (19)-(21).

Предположим теперь, что $\delta[y] = 0$, т.е. заданные региональные сальдо w_s совпадают с величинами (41). Тогда при $p = p[y]$ векторы и величины (42) очевидно допустимы в локальных задачах (4)-(6). При этом для указанных допустимых решений задач (4)-(6) и (7)-(9) из (28) и (31) получаем

$$y^s(A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s - b^s - \lambda_s d^s) = 0,$$

$$z_s(p[y]u^s - p[y]v^s - w_s) = 0.$$

Но тогда допустимые решения (42) и (40) являются оптимальными в рассматриваемых задачах (4)-(6) и (7)-(9). Следовательно, при $\delta[y] = 0$ вектор (32) действительно совпадает с вектором $\lambda[y]$. Далее, ввиду (26), оптимальные планы (42) сбалансированы, и потому цены обмена (31) в рассматриваемом случае являются равновесными.

Остается проверить, что при $\delta[y] \neq 0$ также справедливы неравенства (43). Для этого заметим, что задачи (4)-(6), отвечающие ценам обмена (31) при заданных региональных сальдо (1), можно считать полученными в результате вариации свободных членов в ограничениях (5) задач (4)-(6), отвечающих тем же ценам обмена при региональных сальдо (41). Для последних, как было показано, экстремальные значения функционалов равны $\lambda_s[y]$ и оптимальными оценками ограничений (5) являются величины z_s, определяемые согласно (40). Но тогда для интересующих нас величин $\lambda_s(p[y])$, отвечающих заданным региональным сальдо (I), на основании известных свойств оптимальных оценок имеем

$$\lambda_s(p[y]) = \lambda_s[y] + z_s(w_s^* - w_s), \quad s = 1, 2, \ldots, r.$$

Отсюда, учитывая (40), (4I) и (34), получаем требуемые неравенства (43).

Приведем теперь основной результат, лежащий в основе предлагаемого подхода к построению приближенных методов поиска равновесных цен и отвечающих им сбалансированных оптимальных планов локальных задач.

ТЕОРЕМА. *Следующие утверждения относительно положительного вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$ равносильны.*

I^0. *В рассматриваемой модели экономического взаимодействия регионов нормированные цены обмена (3I) являются равновесными, а в качестве соответствующих сбалансированных оптимальных планов локальных задач могут быть приняты определяемые согласно (42).*

2^0. *Вектор $\delta[y]$ с компонентами (34) является нулевым, т.е. вектор (33) совпадает с вектором (24).*

3^0. *Вектор (32) совпадает с вектором (24).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оптимальных решений локальных задач (4)-(6) в неравенствах (5), как отмечалось, всегда достигаются равенства. Поэтому из утверждения I^0 вытекает, что

$$p[y]\, u^s[y] - p[y]\, v^s[y] = w_s, \quad s = 1, 2, \ldots, r. \qquad (44)$$

Следовательно, в этом случае вектор $\delta[y]$ с компонентами (34) является нулевым. Наоборот, если $\delta[y] = 0$, то имеют место равенства (44) и, следовательно, заданные региональные сальдо торговых балансов w_s совпадают с величинами (4I). А тогда, как было показано при доказательстве леммы 2, справедливо утверждение I^0. Таким образом, утверждения I^0 и 2^0 равносильны.

Далее, из соотношений (38) при $p=p[y]$ и неравенств (43) получаем

$$\lambda_s[\lambda(p[y])]\le\lambda_s(p[y]))\le\lambda_s[y]+\delta_s[y],\quad s=1,2,\dots,r,$$

т.е.

$$\lambda[\lambda(p[y])]\le f(y)\le\lambda[y]+\delta[y]=F(y).$$

Если при этом имеет место 2^0, то

$$\lambda[\lambda(p[y])]\le f[y]\le\lambda[y]. \tag{45}$$

Но тогда крайние векторы в (45) совпадают в силу замечания 3. Следовательно, $f(y)=\lambda[y]$. Наоборот, если $f(y)=\lambda[y]$, то из (43) вытекает, что $\delta[y]\ge 0$. Но тогда $\delta[y]=0$, так как для линейной комбинации компонент этого вектора с положительными коэффициентами $\alpha[y]\,z_s[y]$ имеем

$$\sum_{s=1}^{r}\alpha[y]z_s[y]\delta_s[y]=p[y]\Big(\sum_{s=1}^{r}u^s[y]-\sum_{s=1}^{r}v^s[y]-\sum_{s=1}^{r}w_s\Big)=0.$$

Таким образом, утверждения 2^0 и 3^0 также являются равносильными.

СЛЕДСТВИЕ. Для нормированных цен обмена (2) в неравенстве (37) достигается равенство в том и только том случае, если эти цены являются равновесными в рассматриваемой модели экономического взаимодействия регионов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для цен обмена (2) в (37) достигается равенство. Тогда $\lambda[\lambda(p)]=\lambda(p)$, и на основании леммы I имеет место (39). Поэтому

$$f(\lambda(p))=\lambda(p[\lambda(p)])=\lambda(p)=\lambda[\lambda(p)],$$

т.е. для положительного вектора $y=\lambda(p)$ справедливо утверждение 3^0. Но тогда в силу доказанной теоремы имеет место I^0 и, следовательно, рассматриваемые цены обмена $p=p[\lambda(p)]$ являются равновесными.

Наоборот, если цены обмена (I) являются равновесными, то векторы и величины

$$x^s=x^s(p),\ u^s=u^s(p),\ v^s=v^s(p),\ \lambda^s=\lambda^s(p),\ \rho=1,$$

отвечающие соответствующим сбалансированным оптимальным планам локальных задач (4)-(6), при $\nu=\lambda(p)$ очевидно допустимы в глобальной задаче (4), (15)-(17). Следовательно, неравенство (37) в этом случае не может оказаться строгим, что и требовалось показать.

В заключение теоретической части приведем еще используемую в излагаемом ниже алгоритме оценку степени отклонения нормированных цен обмена (31) от равновесных в случае, когда соответствующий вектор $\delta[\nu]$ с компонентами (34) не является нулевым, т.е. заданные региональные сальдо торговых балансов (1) не совпадают с соответствующими величинами (41). Если в указанном случае исходные региональные сальдо торговых балансов заменить величинами (41), при которых нормированные цены обмена (31) являются равновесными, то от такой замены, естественно, понесут потери только те регионы, которым отвечают положительные величины $\delta_s[\nu]$. При этом на основании приведенных выше неравенств (43) указанные потери (в долях соответствующих величин $\lambda_s[\nu]$) допускают следующие оценки:

$$\frac{\lambda_s(p[\nu])-\lambda_s[\nu]}{\lambda_s[\nu]}\leq\frac{\delta_s[\nu]}{\lambda_s[\nu]}.$$

Следовательно, в качестве общей оценки степени отклонения нормированных цен обмена (31) от равновесных может быть принята неотрицательная величина

$$\varepsilon[\nu]=\max_{s=1,\ldots,r}\frac{\delta_s[\nu]}{\lambda_s[\nu]}. \tag{46}$$

Если последняя, например, не превосходит 0,0001, то регионы, которым отвечают положительные $\delta_s[\nu]$, соглашаясь на указанное изменение исходных региональных сальдо торговых балансов, пренебрегают возможностью увеличить достигнутые значения своих функционалов $\lambda_s=\lambda_s[\nu]$ не более чем на 0,01%.

§ 3. Предлагаемый алгоритм

Интересующая нас задача поиска равновесия в рассмотренной модели экономического взаимодействия регионов, как было показано, сводится к определению такого положительного вектора $\nu=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$, что отвечающий ему вектор $\delta[\nu]$ с компонентами (34) является нулевым и, следовательно, обращается в нуль соответствующая неотрицательная величина (46). Более того, при изучении реальных моделей взаимодействия, как пояснялось, достаточно найти вектор (13), для которого указанная неотрицательная величина, характеризующая степень отклонения нормированных цен обмена (31) от равновесных, является достаточно малой, т.е. не превосходит некоторого заранее фиксированного положительного числа ε^*. Для этого предлагается некоторый итеративный процесс градиентного типа, позволяющий при хорошем начальном приближении, как правило, за небольшое число шагов (итераций) находить требуемый положительный вектор $\nu=(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$, а также отвечающие ему нормированные цены обмена $p[\nu]$ и сбалансированные региональные планы производства, вывоза и ввоза $x^s[\nu]$, $u^s[\nu]$, $v^s[\nu]$.

На каждом шаге предлагаемого процесса решаются глобальная оптимизационная задача линейного программирования (4), (15)-(17) и двойственная к ней задача (19)-(21), отвечающие текущему положительному вектору $\nu=(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$. Затем по формулам (34) и (46) вычисляются компоненты соответствующего вектора $\delta[\nu]$ и неотрицательная величина $\varepsilon[\nu]$. Если последняя не превосходит заданного ε^*, характеризующего требуемую точность счета, то процесс заканчивается. При этом в качестве результатов выдается следующая информация:

а) векторы ν и $\delta[\nu]$, а также величина $\varepsilon[\nu]$;

б) определяемые по формулам (31) и (41) нормированные цены обмена $p=p[\nu]$ и скорректированные региональные сальдо торговых балансов $w^*=(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_r^*)$;

в) сбалансированные региональные планы (42) и определяемые по формулам (40) оценки ограничений локальных задач.

Если же вычисленная по формуле (46) величина $\varepsilon[\nu]$ больше заданного ε^*, то осуществляется переход к очередному шагу. Для этого необходимо предварительно на основе имеющейся информации получить скорректированный положительный вектор $\nu'=(\nu_1', \nu_2', \ldots, \nu_r')$. Рассмотрим несколько способов получения такого вектора, которые приводят, естественно, к различным вариантам предлагаемого процесса.

В первом варианте в качестве ν' принимается вектор (32) с компонентами $\lambda_s(p[\nu])$, равными максимальным значениям функционалов в соответствующих локальных задачах (4)-(6) при ценах обмена $p=p[\nu]$. Следовательно, при использовании этого варианта на каждом шаге процесса (за исключением последнего) помимо глобальной оптимизационной задачи приходится решать еще τ локальных задач.

Во втором варианте в качестве ν' принимается вектор (33), равный сумме ранее полученных векторов $\lambda[\nu]$ и $\delta[\nu]$. Следовательно, в этом варианте получение скорректированного вектора для очередного шага не сопряжено со сколько-нибудь существенной вычислительной работой.

Третий вариант является некоторым усложнением второго. Здесь на каждом очередном шаге предлагается решать сразу несколько глобальных оптимизационных задач, отвечающих некоторому набору положительных векторов

$$F(\nu,\tau)=\lambda[\nu]+\tau\delta[\nu],\ \tau>0,$$

а затем в качестве ν' окончательно фиксировать тот из этих векторов, для которого достигает минимума величина $\varepsilon[F(\nu,\tau)]$.

Для завершения описания алгоритма остается рассмотреть вопрос о построении достаточно хорошего исходного вектора (13), определяющего глобальную оптимизационную задачу (4), (15)-(17), решаемую на первом шаге описанного процесса.

Если в изучаемой модели взаимодействия ожидаемое повышение значений локальных функционалов за счет обмена не слишком большое, то в качестве компонент исходного вектора (13) могут быть приняты экстремальные значения функционалов в соответствующих локальных задачах без обмена:

$$x^s\geq 0,\ A^s x^s\geq b^s+\nu_s d^s,\ \nu_s\longrightarrow max.$$

Если же указанное приближение является слишком грубым, то в качестве компонент исходного вектора (13) могут быть приняты экстремальные значения функционалов в локальных задачах (4)-(6), отвечающих некоторой реальной системе нормированных цен обмена (2).

Наконец, в ряде случаев есть основания предполагать, что за счет соответствующей нормировки исходных векторов d^s все экстремальные значения локальных функционалов при искомых равновесных ценах обмена должны оказаться близкими к единице. При этом в качестве исходного естественно принять вектор $\nu=(1,1,\dots,1)$. Этот способ особенно удобен, так как в отличие от двух предыдущих способов определения исходного вектора (13) не требует предварительного решения тех или иных локальных задач.

Описанный алгоритм использовался для расчетов по малоразмерному варианту модели мировой экономики (соответствующие глобальные задачи содержали порядка 60 ограничений). Расчеты выполнялись в рамках совместных исследований ИЭиОПП СО АН СССР (г.Новосибирск) и Центра планирования, прогнозирования и политики в целях развития ООН (г.Нью-Йорк) на основе информации, полученной из указанного Центра [II]. По первому варианту алгоритма расчеты проводились в ИЭиОПП Т.С.Болотовой. Этот вариант алгоритма использовался также Б.С.Киселевым для расчета динамической модели, включающей два периода. Размерность глобальной задачи в этом случае удваивается.

Программная реализация и расчеты по второму варианту алгоритма проводились в Москве сотрудниками ВЦ АН СССР И.С. Меньшиковым и А.С.Злобиным. Эти расчеты выполнялись в соответствии с договором о научном сотрудничестве между лабораторией теории управления ВЦ АН СССР (зав. лабораторией член-корр. АН СССР Н.Н.Моисеев) и отделением оптимального территориально-производственного планирования ИЭиОПП СО АН СССР (зав. отделением д.э.н. А.Г.Гранберг).

В настоящее время ведется подготовка к использованию описанного алгоритма в ИЭиОПП СО АН СССР для расчетов по детализированному варианту межотраслевой модели мировой экономики, в котором глобальная задача содержит порядка 600-700 ограничений общего вида.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Г.Ш.Рубинштейна за ряд ценных советов, в частности, связанных с реализацией основного процесса без решения на каждом шаге локальных задач.

ЛИТЕРАТУРА

I. РУБИНШТЕЙН А.Г. Сравнительная характеристика межрайонного и международного обмена на основе принципа территориального экономического равновесия. - В кн.: Методы и модели территориального планирования. Вып.II. Новосибирск, 1971, с.138-160.

2. РУБИНШТЕЙН А.Г. Характеристика состояний равновесия в одной линейной модели международных экономических связей. - В

кн.: Оптимизация. Вып. II(28). Новосибирск, 1973, с.65-75.

3. РУБИНШТЕЙН А.Г. Линейная модель международных экономических связей. - "Экономика и мат. методы", 1974, т.10, вып.5, с.900-911.
4. РУБИНШТЕЙН А.Г. Модели экономического взаимодействия регионов и возможности их использования. - В кн.: Территориальные народнохозяйственные модели. Новосибирск, "Наука", 1976, с.7-81.
5. ХАНСЕН Т., СКАРФ Г. О приложениях нового комбинаторного алгоритма. - В кн.: Математическая экономика. М., "Мир", 1974, с.143-169.
6. МАГАРИК И.В. Модификация алгоритма Скарфа построения примитивного симплекса с полным набором меток. М., ЦЭМИ АН СССР, 1976 (препринт).
7. SCARF H. The computation of economic eduilibria. Cowles Foundation Monograph, 24. New Haven - London, Yale University Press, 1973.
8. GINSBURGH V., WAELBROECK J. A general equilibrium model of world trade. Part 1. Cowles Foundation Discussion Paper n° 412.
9. GINSBURGH V., WAELBROECK J. A general equilibrium model of world trade. Part II. Cowles Foundations Discussion Paper n° 413.
10. GINSBURGH V., WAELBROECK J. General equilibrium model of world trade. Part III. De Louvain Discussion paper, 7714, Center for Operations Research and Econometrics, Université Catholique, 1977.
11. ГРАНБЕРГ А.Г., РУБИНШТЕЙН А.Г. Эксперименты с агрегированной межрегиональной моделью мировой экономики. "Изв. СО АН СССР. Сер. обществ. наук", 1978, № 6, вып.2, с.25-36.

Поступила в ред.-изд.отдел
10.06.1978 г.