УДК 512.25/26

МЕТОД ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ С ОТБРАСЫВАНИЕМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Р.В.Намм

Рассмотрим некоторую модификацию метода возможных направлений для задачи выпуклого программирования:

$$f(x) - max!$$

$$x \in \Omega = \{z : g^j(z) \geq 0,\ j = \overline{1,m}\}.$$

Здесь f, g^j - вогнутые, дифференцируемые на R^n функции, Ω - компакт.

Введем функцию $\bar{g}(x) = \min\limits_{j \in \overline{1,m}} g^j(x)$. Известно [I], что $\bar{g}$ - вогнутая непрерывная функция. Тогда допустимое множество Ω в задаче выпуклого программирования можно задать следующим образом: $\Omega = \{x : \bar{g}(x) \geq 0\}$.

Предполагаем, что выполнено условие Слейтера [2,3]: существует $\bar{x}$ такой, что $\bar{g}(\bar{x}) > 0$.

Введем $\Gamma_\Omega = \{x : \bar{g}(x) = 0\}$. Из условия Слейтера и вогнутости функции $\bar{g}$ следует, что Γ_Ω не обладает внутренностью и $\nabla \bar{g}(x) \neq 0$ для любого $x \in \Gamma_\Omega$. ($\nabla \bar{g}(x)$ означает субградиент функции $\bar{g}$ в точке x.) Тогда $int\, \Omega = \Omega \setminus \Gamma_\Omega$, т.е. $int\, \Omega = \{x : \bar{g}(x) > 0\}$.

Алгоритм состоит в следующем. Допустим, что к началу итерационного процесса известна некоторая точка $x^0 \in \Omega$ и числа $\rho_i \in (0,1]$, $\rho_i \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i = \infty$; $\beta_k > 0$, $\beta_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$; $\delta_0 \in (0, \bar{g}(\bar{x}))$.
На $k+1$-м шаге решаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \nabla f(x^k)s \geq \sigma, \\ \nabla g^j(x^k)s \geq \sigma \quad \text{при} \quad j \in J(\delta_k) \setminus T, \\ \quad s \in S \qquad \text{, где } S \text{ - выпуклый компакт; } 0 \in int\, S; \\ \quad \sigma - max! \end{cases}$$

Здесь $J(\delta_k)=\{j : g^j(x^k) \leq \delta_k\}$, $J(x^k)=\{j : g^j(x^k)=0\}$ (очевидно, что $J(x^k) \subset J(\delta_k)$),

$T_k=\{j \in J(\delta_k) \setminus J(x_k) : \nabla g^j(x^k) \nabla g^i(x_k) \geq (1-u_k) \|\nabla g^j(x^k)\| \|\nabla g^i(x^k)\|$

хотя бы для одного $i \in J(x^k)\}$. Принцип выбора u_k следующий: в начале процесса полагаем $l_0=1$. Далее

$$l_{k+1} = \begin{cases} l_k & \text{, если } \sigma_k \geq \sqrt{2u_k}\, \max\limits_{i \in J(x^k)} \|\nabla g^i(x^k)\| \|s^k\| + \\ & + \dfrac{\max\limits_{i \in J(x^k)} \|\nabla g^i(x^k)\|}{\min\limits_{j \in T} \|\nabla g^j(x^k)\|} \xi_k \text{ или } \sigma_k = 0; \\ l_{k+1} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$u_0 = \rho^{l_0}, \xi_0 = \beta^{l_0}, u_{k+1} = \rho^{l_{k+1}}, \xi_{k+1} = \beta^{l_{k+1}}.$$

Пусть (s^k, σ^k) - решение задачи. Определим

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k, \quad \lambda_k = \arg \max_{\substack{\lambda \geq 0 \\ x^k + \lambda s^k \in \Omega}} f(x^k + \lambda s^k);$$

$$\delta_{k+1} = \delta_k \quad \text{, если } \sigma_k \geq \delta_k;$$

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{2}\delta_k \quad \text{, если } \sigma_k < \delta_k.$$

ЛЕММА. Существуют положительные числа $\bar{m}$ и M, для которых справедливо

$$\bar{m} \leq \|\nabla g^j(x)\| \leq M \quad \forall j \in J(\delta_k), \forall k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство очевидно. Докажем левое. Допустим противное:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k, j \in J(\delta_k) \text{, что } \|\nabla g^j(x^k)\| < \varepsilon.$$

Имеем

$$g^j(\bar{x}) - g^j(x^k) \geq g^j(\bar{x}) - \delta_k \geq g^j(\bar{x}) - \delta_0 \geq \bar{g}(\bar{x}) - \delta_0 > 0.$$

С другой стороны,

$$g^j(\bar{x}) - g^j(x^k) \leq \nabla g^j(x^k)(\bar{x} - x^k) \leq \|\nabla g^j(x^k)\| \|\bar{x} - x^k\| \leq \varepsilon \|\bar{x} - x^k\|.$$

Отсюда следует

$$\varepsilon\|\bar{x}-x^k\| \geq \bar{g}(\bar{x})-\delta_0>0.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ и компактности Ω это неравенство является противоречивым. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Если на k-м шаге

$$\sigma_k \geq \sqrt{2u_k}\max_{i\in J(x^k)}\|\nabla g^i(x^k)\|\|S^k\|+\frac{\max\limits_{i\in J(x^k)}\|\nabla g^i(x^k)\|}{\min\limits_{j\in T_k}\|\nabla g^j(x^k)\|}\xi_k,$$

то $\nabla g^j(x^k)S^k \geq \xi_k$ для $j\in T_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\nabla g^j(x^k)\nabla g^i(x^k) \geq (1-u_k)\|\nabla g^j(x^k)\|\|\nabla g^i(x^k)\|,$$

где $i\in J(x^k)$ и связано с $j\in T_k$ в смысле определения множества T_k. Тогда имеем

$$\frac{\nabla g^j(x^k)}{\|\nabla g^j(x^k)\|}S^k=\frac{\nabla g^i(x^k)}{\|\nabla g^i(x^k)\|}S^k+\left(\frac{\nabla g^j(x^k)}{\|\nabla g^j(x^k)\|}-\frac{\nabla g^i(x^k)}{\|\nabla g^i(x^k)\|}\right)S^k \geq$$

$$\geq \frac{\nabla g^i(x^k)}{\|\nabla g^i(x^k)\|}S^k-\left|\left(\frac{\nabla g^j(x^k)}{\|\nabla g^j(x^k)\|}-\frac{\nabla g^i(x^k)}{\|\nabla g^i(x^k)\|}\right)S^k\right| \geq$$

$$\geq \frac{\nabla g^i(x^k)}{\|\nabla g^i(x^k)\|}S^k-\left\|\frac{\nabla g^j(x^k)}{\|\nabla g^j(x^k)\|}-\frac{\nabla g^i(x^k)}{\|\nabla g^i(x^k)\|}\right\|\|S^k\|.$$

Далее,

$$\left\|\frac{\nabla g^j(x^k)}{\|\nabla g^j(x^k)\|}-\frac{\nabla g^i(x^k)}{\|\nabla g^i(x^k)\|}\right\|^2 \leq 2u_k,$$

так как

$$\nabla g^j(x^k)\nabla g^i(x^k) \geq (1-u_k)\|\nabla g^j(x^k)\|\|\nabla g^i(x^k)\|.$$

Отсюда следует

$$\frac{\nabla g^j(x^k)}{\|\nabla g^j(x^k)\|}S^k \geq \frac{\nabla g^i(x^k)}{\|\nabla g^i(x^k)\|}S^k-\sqrt{2u_k}\|S^k\| \geq \frac{\sigma_k}{\|\nabla g^i(x^k)\|}-\sqrt{2u_k}\|S^k\|,$$

$$\nabla g^j(x^k)S^k \geq \frac{\|\nabla g^j(x^k)\|}{\|\nabla g^i(x^k)\|}\sigma_k-\|\nabla g^j(x^k)\|\sqrt{2u_k}\|S^k\|.$$

Осталось решить неравенство

$$\frac{\|\nabla g^j(x^k)\|}{\|\nabla g^i(x^k)\|}\sigma_k - \|\nabla g^j(x^k)\| \sqrt{2u_k}\, \|S^k\| \geq \xi_k .$$

Отсюда получаем

$$\sigma_k \geq \sqrt{2u_k}\, \|\nabla g^i(x^k)\| S^k\| + \frac{\|\nabla g^i(x^k)\|}{\|\nabla g^j(x^k)\|}\xi_k .$$

Из этого соотношения следует утверждение теоремы.

Докажем теперь, что $\{\sigma_k\}$ обладает нулевой предельной точкой. Наличие нулевой предельной точки у $\{\sigma_k\}$ является достаточным условием сходимости итерационного процесса, т.е. любая предельная точка последовательности $\{x^k\}$ будет являться решением рассматриваемой задачи выпуклого программирования. Допустим, что $\{\sigma_k\}$ не обладает нулевой предельной точкой, т.е. для достаточно больших номеров k $\sigma_k \geq \sigma^* > 0$. Тогда нетрудно видеть по способу выбора ℓ_k и в силу леммы, что, начиная с некоторого номера K, все $\ell_{K+i} = \ell_K$, $i = 1, 2, \ldots$ Это означает, что $\nabla g^j(x^k) S^k \geq \xi_K$ для любого $j \in T_K$. В результате имеем

$$\nabla f(x^k) S^k \geq \sigma_k \geq \sigma^*,$$

$$\nabla g^j(x^k) S^k \geq \sigma_k \geq \sigma^*, \quad j \in J(\delta_k) \setminus T_k,$$

$$\nabla g^j(x^k) S^k \geq \xi_K, \quad j \in T_k.$$

Это противоречит ограниченности целевой функции f на компактном допустимом множестве Ω. Следовательно, $\{\sigma_k\}$ обладает предельной нулевой точкой, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н., ДАНИЛИН Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., "Наука", 1975, с.19-24, 191-201.
2. ПОЛАК Э. Численные методы оптимизации. М., "Мир", 1974, с.193-212.
3. МУХАЧЕВА Э.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Математическое программирование. Новосибирск, "Наука", 1977, с.255-262.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.X.1978 г.