УДК 519.8

МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСКРОЯ ЛИСТОВОГО ПРОКАТА

Э.А.Мухачева

Рассматривается задача оптимизации гильотинного раскроя прямоугольных листов на прямоугольные заготовки в условиях холодноштамповочного производства, представляющая собой важный частный случай общей проблемы планирования рационального раскроя.

Различные аспекты задачи гильотинного раскроя были исследованы Л.В.Канторовичем и В.А.Залгаллером еще в 1951 г.[1]. Ими было показано, что для расчета оптимального раскроя могут быть использованы уже развитые к тому времени методы линейного программирования. А для преодоления трудностей, связанных с построением допустимых карт раскроев, были предложены специальные приемы, предвосхитившие идеи возникшего позднее динамического программирования.

Разработанные на этой основе машинные алгоритмы и программы оказались вполне эффективными для решения практических задач рационального раскроя линейных материалов. Что касается листового проката, то соответствующие алгоритмы и программы оказываются слишком громоздкими и практически могут использоваться лишь для получения предварительного раскроя на наиболее крупные заготовки [2,3]. Кроме того, в рамках указанных алгоритмов трудно учесть дополнительные технологические ограничения, связанные прежде всего со спецификой используемого оборудования, а также с организацией технологического процесса резки. В связи со сказанным, в математическое обеспечение наряду с совершенствованием оптимизационных алгоритмов важно включать различного рода процессы условной оптимизации.

Как правило, с помощью условных алгоритмов предварительно строится некоторое множество допустимых раскроев, и на этом множестве решается задача линейного программирования. Нам кажется более предпочтительным применение простых условных алгоритмов вместо громоздких динамических приемов на каждом шаге линейного процесса. Использование таких алгоритмов в системе прикладного пакета "Прямоугольный раскрой" позволяет эффективно и достаточно гибко решать задачи рассматриваемого здесь класса.

Каждый из условных алгоритмов предназначен для генерации на каждом шаге линейного процесса специальных, удовлетворяющих определенным технологическим требованиям раскроев. Общим в предлагаемых алгоритмах является организация процесса перебора различных заготовок для генерации очередного раскроя. Указанный процесс регулируется с помощью ведения так называемого приоритетного списка. Более того, приоритетные списки оказываются полезными и в оптимизационных алгоритмах. Описанию приоритетных списков и приемов их использования в рамках условных алгоритмов предпошлем постановку задачи и ее математическую модель.

При серийном производстве некоторого изделия из одного и того же материала (листового проката) изготовляются m различных детелей с номерами i из $I=\{1,2,\ldots,m\}$. При этом известно, что на одно изделие требуется b_i деталей i-го вида. Для изготовления некоторых из этих деталей с номерами i из $I'\subset I$ используются прямоугольные заготовки - "карточки" фиксированных размеров $c_i \times d_i$. Детали с номерами i из $I''=I\setminus I'$ изготовляются из так называемых "штамповых заготовок". Ширина c_i каждой такой заготовки фиксирована, а длина d должна обеспечивать получение не менее заданного числа δ_i соответствующих деталей. При этом число получаемых деталей удовлетворяет неравенству

$$\delta_i \leq \frac{d-x_i}{d_i},$$

где d_i - шаг подачи полосы при штамповке, а x_i - припуск, необходимый для вырубания первой детали.

Для изготовления указанных деталей можно использовать стандартные прямоугольные листы фиксированных габаритов $C_j \times D_j$, j из $J=\{1,2,\dots,n\}$. При этом известна цена p_j одного листа каждого типа $j \in J$.

Предполагается, что на гильотинных ножницах каждый прямоугольник $c \times d$ может быть разрезан на любые два прямоугольника. При этом допустимыми считаются резы, параллельные кромкам раскраиваемого прямоугольника. В результате выполнения k таких резов из исходного листа получается $(k+1)$ прямоугольник. Каждой допустимой карте раскроя τ отвечает тип $j(\tau) \in J$ раскраиваемого листа и некоторая фиксированная последовательность резов. Каждому допустимому раскрою τ наряду с видом листа $j(\tau)$ можно сопоставить m-мерный вектор

$$\alpha(\tau)=(a_1(\tau), a_2(\tau), \dots, a_i(\tau), \dots, a_m(\tau)), \qquad (I)$$

компоненты которого указывают, какое количество соответствующих деталей может быть изготовлено из полученных карточек и штамповых заготовок. Важно подчеркнуть, что по $j(\tau)$ и $\alpha(\tau)$ не всегда легко восстановить отвечающий им допустимый раскрой τ. Поэтому для получаемых в процессе решения задачи раскроев τ помимо $j(\tau)$ и $\alpha(\tau)$ необходимо хранить соответствующую последовательность резов.

Допустимый раскройный план $\mathcal{X}$ определяется выбором некоторого числа допустимых раскроев $\tau_1^{\mathcal{X}}, \tau_2^{\mathcal{X}}, \dots, \tau_s^{\mathcal{X}}$ и неотрицательного s-мерного вектора

$$x=(x_1^{\mathcal{X}}, x_2^{\mathcal{X}}, \dots, x_s^{\mathcal{X}}),$$

удовлетворяющего условию

$$\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^{\mathcal{X}} a_i(\tau_\nu^{\mathcal{X}}) = b_i, \ i \in J.$$

При этом суммарные затраты на используемый прокат (в расчете на одно изделие) характеризуются величиной

$$\mu(\mathcal{X})=\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^{\mathcal{X}} p_j(\tau_\nu^{\mathcal{X}}).$$

Задача состоит в разыскивании наиболее экономного (оптимального) допустимого раскройного плана, при котором затраты $\mu(\mathcal{X})$ достигают минимума.

При решении приведенной задачи с помощью численных методов линейного программирования на каждом шаге процесса затруднения возникают лишь в организации процедуры проверки условий оптимальности. К этому моменту известны некоторый допустимый раскройный план $\mathcal{T}$, использующий $s = m$ раскроев, а также m-мерный вектор $(\,)$, удовлетворяющий соотношениям

$$(\alpha(r_\nu^{\pi}), y) = p_j(r_\nu^{\pi}), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Требуется проверить справедливость неравенств для всех допустимых раскроев r (не используемых в плане $\mathcal{T}$):

$$(\alpha(r), y) \le p_j(r). \qquad (2)$$

Если эти неравенства выполняются, то рассматриваемый план $\mathcal{T}$ является оптимальным. В противном случае этот план может быть улучшен за счет привлечения допустимого раскроя r^*, для которого указанное неравенство нарушается. Проверка выполнения приведенных неравенств и построения в случае их нарушения соответствующего раскроя r^* осуществляется в общем случае, как уже указывалось, с помощью последовательного заполнения весьма громоздкой двумерной динамической шкалы [2].

В рассматриваемых условных алгоритмах условие оптимальности (2) проверяется не на всем множестве R допустимых раскроев r, а на некоторых его подмножествах, которые определяются исходя из различных, технологических по своему характеру требований. Например, в число указанных раскроев можно включать лишь такие, в которых из одного листа получают заготовки не более одного, двух или трех наименований. При этом часто вводится ограничение на число разворотов в листе заготовок одного и того же вида. Просто учитываются и некоторые другие технологические требования: фиксированное направление волокон, обрезка заготовки под угольник, максимально возможный вес заготовки.

Выбор заготовок в генерируемых с помощью локальных алгоритмов раскроях регулируется приоритетным списком, в котором заготовки упорядочены по перспективности их использования на данном шаге линейного процесса. Точнее, множество номеров различных заготовок

$$K = \{k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots, k_m\} \qquad (3)$$

назовем приоритетным списком (ПС), если

где

$$y^0_{k_1} \geq y^0_{k_2} \geq \dots \geq y^0_{k_m},$$

$$y^0_{k_\nu} = \frac{y_{k_\nu}}{c_{k_\nu} \times d_{k_\nu}}, \quad \nu = \overline{1, m},$$

имеют смысл текущих удельных оценок заготовок.

Пусть имеется некоторый раскрой τ, характеризуемый вектором (I). Отметим положительные компоненты этого вектора и упорядочим их номера по убыванию удельных оценок соответствующих заготовок. Полученное таким образом множество номеров

$$K(\tau) = \{k_{\rho_1}, k_{\rho_2}, \dots, k_{\rho_t}\}$$

является подмножеством ПС (3).

Номер $\nu = \rho_1$ назовем ведущим индексом раскроя τ *), а заготовку с номером k_ν – ведущей заготовкой этого раскроя. Ведущую заготовку назовем приоритетной, если не существует раскроев листа $j(\tau)$ с ведущими индексами $i < \nu$.

Напомним далее, что величина

$$Y(\tau) = (\alpha(\tau), y) \tag{4}$$

имеет смысл суммарной оценки раскроя τ и задача генерирования раскроя фиксированного листа j на очередном шаге линейного процесса состоит в отыскании раскроя, максимизирующего величину (4). Раскрой τ° с ведущим индексом $\nu(\tau^\circ)$ назовем максимальным, если

$$Y(\tau^\circ) = \max_{\{\tau / j(\tau) = j(\tau^\circ),\, \nu(\tau) = \nu(\tau^\circ)\}} Y(\tau).$$

Непосредственно из введенных определений вытекают следующие простые свойства ПС.

I^0. Удельная оценка раскроя τ листа $j(\tau)$ с ведущим индексом ν не превосходит удельной оценки ведущей заготовки k_ν, т.е. справедливо неравенство:

$$\frac{Y(\tau(\nu))}{c_{j(\tau)} \times D_{j(\tau)}} \leq y^0_{k_\nu}. \tag{5}$$

2^0. Если для максимального раскроя τ° с ведущим индексом $\nu(\tau^\circ)$ и некоторого $\lambda > \nu$ справедливо соотношение

---

*) Ведущий индекс и следующие затем понятия используются в качестве характеристик конкретного раскроя τ. Поэтому иногда будем обозначать ведущий индекс через $\nu(\tau)$. Вместе с тем в других случаях будем записывать раскрой $\tau(\nu)$.

$$\frac{Y(\tau^\circ(\nu))}{c_{j(\tau^\circ)} \times D_{j(\tau^\circ)}} \geq y^\circ_{k_\lambda}, \qquad (6)$$

то для любого раскроя τ листа $j(\tau^\circ)$ с ведущим индексом $i > \lambda$

$$Y(\tau) \leq Y(\tau^\circ).$$

В частности, отсюда вытекает следующее рабочее свойство ПС.

3°. Если заготовка с номером $k_\nu(\tau^\circ)$ является приоритетной в максимальном раскрое τ° листа $j(\tau^\circ)$ и $\lambda > \nu(\tau^\circ)$ – первый номер списка (3) такой, что для него имеет место неравенство (6), то ведущий индекс ν^* раскроя τ^*, максимизирующего величину (4) на рассматриваемом множестве R раскроев листа $j(\tau^\circ)$, удовлетворяет неравенству

$$\nu(\tau^\circ) \leq \nu^* < \lambda^\circ. \qquad (7)$$

Предположим, что располагаем алгоритмом, с помощью которого можно найти максимальный раскрой некоторого прямоугольника $(c_0 \times d_0)$ с фиксированной ведущей заготовкой. Тогда в качестве таковой принимается сначала приоритетная заготовка. Для этой заготовки определяют максимальный раскрой τ° и находят соответствующую ему оценку $Y(\tau^\circ)$. Далее, следуя свойству 3°, находят индекс λ° и так называемое отсечение приоритетного списка (ОПС), представляющее собой множество индексов ν, удовлетворяющих условиям (7). Для элементов ОПС процесс генерирования раскроев повторяется, искомый раскрой τ^* и отвечающий ему ведущий индекс ν^* находят из условия

$$Y(\tau(\nu^*)) = \max_{\nu \in ОПС} Y(\tau(\nu)), \quad \tau^* = \tau(\nu^*). \qquad (8)$$

Алгоритм генерирования раскроя τ^* прямоугольника $(c_0 \times d_0)$ используется дальше с целью получения искомого раскроя для некоторого фиксированного листа с номером $j_0 \in \{\overline{1, n}\}$. При этом вместо одного листа с габаритами $c_{j_0} \times D_{j_0}$ рассматривается последовательность вложенных друг в друга прямоугольников $\{(c \times d)\}$, $c = c_0, c_0 + h_1, \ldots, c_{s-1} + h_s = c_{j_0}$; $d = d_0, d_0 + \ell_1, \ldots, d_{k-1} + \ell_k = D_{j_0}$. Характер вложения прямоугольников и выбор величины шагов изменения их размеров определяются технологическими условиями и конкретизацией алгоритма генерирования раскроев. Так, например, в общем сеточном алгоритме

$$h_1 = \ldots = h_s = l_1 = \ldots = l_k = h.$$

Правда, ввиду громоздкости шкалы приходится в качестве шага h выбирать достаточно большое число, что, в свою очередь, приводит к неприятному влиянию ошибок округления. В условных алгоритмах шаг, как правило, совпадает с одним из размеров выкраиваемой заготовки. Далее, как уже указывалось, каждый прямоугольник может быть разрезан на два, максимальные оценки (4) которых и соответствующие им раскрои к данному моменту уже известны. При этом просматриваются все возможные пары и выбирается среди них пара прямоугольников с максимальной суммарной оценкой. Таким образом генерируется раскрой для рассматриваемого прямоугольника $(c \times d)$.

Конкретизация приведенной схемы для общего сеточного алгоритма приводит к следующей модификации динамической шкалы оценок. Каков бы ни был шаг применяемой шкалы, каждый прямоугольник $(c \times d)$ рассматривается сначала в истинных размерах и для него генерируется оптимальный единичный раскрой. При этом, пользуясь ПС, удается избежать большого перебора различных заготовок. Затем, уже для приведенных к шагу размеров, организуется перебор возможных пар вложенных прямоугольников, оценки которых к данному моменту уже известны. Среди них выбирается комбинация с максимальной оценкой и сравнивается с оценкой, полученной при единичном раскрое. Таким образом делается выбор между единичным и комбинированным раскроем. Приведенная модификация позволяет сгладить влияние ошибок округления даже при достаточно большом шаге динамической шкалы, что, в свою очередь, снижает расход машинного времени на расчет шкалы. В описываемом математическом обеспечении указанная модификация именуется алгоритмом $NE3$. Алгоритм описан и реализован на ЭВМ "Минск-32" ассистентом А.Н.Грищенко.

Однако особенно эффективным является применение ПС в рамках условных алгоритмов. При этом используется политика, весьма сходная с барьерной, применяемой при непосредственной проверке условий оптимальности в линейных программах. Указанная политика состоит в том, что в качестве ведущей заготовки каждый раз принимается только приоритетная. Таким образом, в процессе генерации раскроя перебор возможных заготовок отсутствует вовсе. Если для полученного таким образом раскроя условия оптимальности нарушены, то переходим к следующей процедуре линейной программы. В противном случае повторяем процесс генерирования с перебором нескольких или же всех заготовок из ОПС. Если и в этом случае условия оптимальности выполнены, то на множестве условных раскроев уже получен оптимальный план. Процесс окончен.

Перейдем теперь к краткой характеристике используемых в описываемом математическом обеспечении условных алгоритмов.

UN1. С помощью однократного применения этого алгоритма генерируются раскрои листа $(C \times D)$ на заготовки заданных размеров $(c \times d)$ при условии, что допускается не более одного разворота этих заготовок в листе.

UN2. С помощью однократного применения этого алгоритма генерируются раскрои листа $(C \times D)$ на заготовки $(c \times d)$, допускающие не более двух разворотов в листе. Используемые здесь рекуррентные соотношения связывают раскрои, допускающие не более двух разворотов, с раскроями, допускающими один разворот.

UN3. С помощью однократного применения алгоритма *UN3* генерируется оптимальный единичный раскрой листа $(C \times D)$ на заготовки одного вида $(c \times d)$. Для этого используется динамическая шкала, сходная с применяемой в общих алгоритмах. Однако здесь шкала строится с шагом, равным длине большой стороны выкраиваемого прямоугольника и притом без предварительного округления соответствующих размеров. Этот алгоритм был предложен студентом НГУ С.Кобозевым.

Заметим, что указанные алгоритмы могут использоваться самостоятельно для получения интересующих заказчика единичных раскроев, а также как вспомогательные, в рамках применения алгоритмов генерирования комбинированных раскроев.

Следующая группа условных алгоритмов предназначена для генерирования комбинированных раскроев.

NE1. С помощью однократного применения алгоритма *NE1* генерируется комбинированный раскрой листа $C \times D$ на заготовки не более трех типов размеров. $c_{it} \times d_{it}$, $t = 1,2,3$, при их специальном размещении в листе. При этом предпочтение отдается двум первым заготовкам, которые укладываются наилучшим образом по ширине листа. Таким образом реализуется подход, сходный с применяемым в более простом случае рулонного раскроя.

$NE2$. С помощью однократного применения этого алгоритма генерируется раскрой листа $C \times D$ на заготовки не более двух типов размеров без разворотов каждой из них в листе. Алгоритм представляет собой конкретизацию $NE1$ для случая, когда лист специальным образом делится на две области, каждая из которых предназначена для раскроя на свою заготовку.

$NE4$. С помощью однократного применения алгоритма $NE4$ генерируется раскрой листа $C \times D$ на заготовки также не более двух типов размеров. Вместе с тем здесь не ограничивается число их разворотов в листе. При этом используется динамическая шкала, сходная с применяемой в алгоритме $UN3$. Однако здесь выбор фиксированного шага шкалы уже не гарантирует оптимальности полученной комбинации. Тем не менее алгоритм $NE4$ позволяет эффективно получать интересующие нас раскрои, близкие к оптимальным.

Заметим, что во всех перечисленных здесь алгоритмах генерирования комбинированных раскроев номера заготовок заранее не фиксируются, а округляются в процессе работы алгоритма с помощью ПС, как это уже описывалось ранее. Наконец, в предлагаемое математическое обеспечение входит алгоритм раскроя остатков $RE2$. С помощью этого алгоритма осуществляется прикрепление мелких, ранее не учитываемых заготовок к остаткам и генерирование единичных раскроев.

Кроме того, следует заметить, что в процессе решения одной и той же задачи может быть использовано несколько различных условных алгоритмов. Переход от одного к другому, более сильному алгоритму осуществляется по следующему правилу.

Предположим, что в результате применения некоторого условного алгоритма уже получен план раскроя, который является оптимальным для рассматриваемого множества условных раскроев. Найдем суммарную площадь полученных при этом остатков и общую площадь неучтенных мелких заготовок. Если указанные остатки полностью (или почти полностью) покрываются мелкими заготовками, то переходим к алгоритму $RE2$. В противном случае применяем более сильный алгоритм генерирования комбинированных раскроев. В случае же, если таковые исчерпаны, также переходим к алгоритму $RE2$.

Приведенные условные алгоритмы записаны на языках ФОРТРАН и АЛГОЛ и реализованы на ЭВМ "Минск-32", М-222, ЕС ЭВМ сотрудниками кафедры высшей математики Уфимского авиационного института. Большое число реальных примеров, решенных с помощью условных алгоритмов, показывает их высокую эффективность и достаточную гибкость. Наиболее эффективным, на наш взгляд, оказался алгоритм $NE1$. Отметим лишь, что задача, в которой имеется ≈ 30 заготовок и 3 листа решается за 7-10 мин, тогда как эта же задача с помощью динамической шкалы решалась в течение 10 час., и в результате из-за ошибок округления в полученном плане коэффициент использования материала оказывался хуже, чем при решении с помощью указанного условного алгоритма.

Совокупность описанных здесь условных и общего алгоритмов генерирования раскроев, численных алгоритмов решения задач линейного программирования, а также некоторых сервисных алгоритмов оформлена в виде пакета "Прямоугольный раскрой" (ПР).

Пакет предназначен для решения задачи оптимизации раскроя прямоугольных листов на прямоугольные заготовки в полуавтоматическом режиме человек-машина. Содержательно пакет состоит из трех процессоров: $BEGIN$, $SOLUT$ и FIN. Процессор $BEGIN$ содержит две основные процедуры: $UNIT$ и $BASI$; процессор $SOLUT$ также состоит из двух основных процедур: NEW и LP; в процессоре FIN одна основная процедура: $REST$. Остальные процедуры являются сервисными либо выполняют роль рычагов.

При разработке пакета реализован модульный принцип программирования и конструирования программ. В основу выбора конструктивных единиц (модулей) положен принцип максимальности, позволяющий также оперировать с некоторыми из модулей как с самостоятельными программами.

В блок-схеме пакета ПР каждая процедура может быть выполнена различными модулями. Модули записываются на языке ФОРТРАН и в оттранслированном и собранном виде хранятся на магнитной ленте. Конструирование программ осуществляет редактор связей с помощью различных параметров, каждый из которых выбирается заказчиком с учетом их совместимости. Модульный принцип позволяет относиться к пакету как к постоянно развивающейся системе. Пакет реализован для ЭВМ "Минск-32" и ЕС ЭВМ и внедряется на различных предприятиях машиностроения (ПО "Кировский завод", Минский автозавод, ПО "Автогаз" и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЗАЛГАЛЛЕР В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Новосибирск, "Наука", 1971.
2. МУХАЧЕВА Э.А. Алгоритм решения задачи рационального раскроя прямоугольных листов на прямоугольные заготовки. – В кн.: Математические методы решения экономических задач. Сб-к I. М., "Наука", 1969, с. 5-10.
3. РОМАНОВСКИЙ И.В. Решение задачи гильотинного раскроя методом переработки списка состояний.-"Кибернетика", Киев, 1969, № 1, с. 102-103.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.VI.1978 г.