Выпуск 22 (39) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Численные методы

УДК 512.25

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЦЫ С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ БЛОЧНОСТЬЮ

В.А.Булавский, Р.А.Звягина

При решении задач линейного программирования методом последовательного улучшения [I], или модифицированным симплекс-методом, учет специфики задачи позволяет существенно уменьшить вычислительный труд. Особое внимание при этом уделяется двум вопросам: во-первых, выбору способа решения систем линейных уравнений с некоторой квадратной неособенной матрицей, называемой в дальнейшем базисной; во-вторых, преобразованию хранимой при этом способе информации в связи с некоторыми изменениями базисной матрицы, например, в связи с добавлением к ней матрицы ранга I.

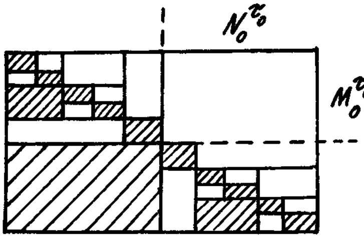

Рис.I

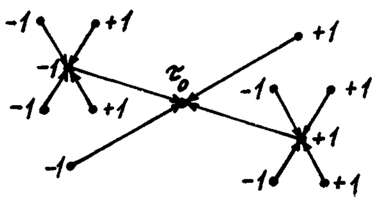

Рис.2

Для класса задач с иерархической симметричной блочностью (см. рис.I для двух ступеней такой иерархии) первый вопрос рассматривался в работах [2,3]. Здесь мы рассмотрим второй вопрос для такого же выбора хранимой информации о приведении базисной матрицы к блочно-треугольному виду. Излагаемая схема решения во многом аналогична схеме, ранее описанной для менее общей блочной структуры [4], и обобщает эту схему на рассматриваемый случай.

§ I. Структурное разложение базисной матрицы

I.I. Описание класса матриц. Предположим, что задан ориентированный граф (P,Q) с множествами P вершин и Q дуг, являющийся деревом с корнем в вершине τ_0. При этом все вершины, кроме τ_0, отмечены знаками +I или -I (см. рис.2), а ориентация каждой дуги выбрана так, что ее начальная вершина расположена по графу дальше от корня, чем конечная. Обозначим через $P(k)$ множество вершин тех дуг, для которых вершина k является конечной, а через $P_-(k)$ и $P_+(k)$ - множества вершин $\tau\in P(k)$, отмеченных соответственно знаками -I и +I.

Кроме того, предположим, что задана матрица $A[M,N]$ с множествами M номеров строк, N номеров столбцов и с семейством пар

$$(M^k, N^k), \quad k\in P, \tag{I.I}$$

в которых $M^k\subset M, N^k\subset N$ для всех $k\in P$. Для каждого $k\in P$ положим

$$M_0^k = \bigcup_{\tau\in P_-(k)} M^\tau, \quad N_0^k = \bigcup_{\tau\in P_+(k)} N^\tau .$$

Семейство (I.I) и граф (P,Q) с отмеченными вершинами и корнем τ_0 будем называть иерархической симметричной блочной структурой в матрице $A[M,N]$, если

а) $M^{\tau_0}=M, \quad N^{\tau_0}=N$;

б) $M_0^k\subset M^k$ и $N_0^k\subset N^k$ для всех $k\in P$, при этом $M^k = \bigcup_{\tau\in P(k)} M^\tau$ для $P_+(k)\neq\varnothing$ и $N^k=\bigcup_{\tau\in P(k)} N^\tau$ для $P_-(k)\neq\varnothing$;

в) множества M^τ, $\tau\in P(k)$ (равно как и множества N^τ, $\tau\in P(k)$), попарно не пересекаются;

г) для любого $k\in P$ все ненулевые элементы матрицы $A[M^k, N^k]$ заключены в блоках $A[M^k\setminus M_0^k, N^k\setminus N_0^k]$ и

$A[M^\tau, N^\tau]$, $\tau \in P(k)$.

Множество тех $k \in P$, для которых $P(k) = \varnothing$, обозначим через P_{max}. Для каждой вершины $k \in P$ рекуррентным образом (начиная с вершин $k \in P_{max}$ в порядке приближения к корню $\tilde{\tau}_0$) выделим множества P_-^k и P_+^k, называемые зонами соответственно горизонтального и вертикального подчинения:

$$P_-^k = P_-(k) \cup (\bigcup_{\tau \in P_-(k)} P_-^\tau), \quad P_+^k = P_+(k) \cup (\bigcup_{\tau \in P_+(k)} P_+^\tau).$$

I.2. Разбиение базисной матрицы на клетки. Пусть $A[I,J]$ - квадратная неособенная подматрица матрицы $A[M,N]$. Положив $I^{\tau_0} = I$, $J^{\tau_0} = J$, каждой вершине $k \in P$ сопоставим пару (I^k, J^k) рекуррентным образом. Начиная с $k = \tau_0$, положим

$$I^\tau = I^k \cap M^\tau, \ \tau \in P_-(k), \quad J^\tau = J^k \cap N^\tau, \ \tau \in P_+(k), \qquad (1.2)$$

и выберем $J^\tau \subset J^k$ при $\tau \in P_-(k)$ и $I^\tau \subset I^k$ при $\tau \in P_+(k)$ из условия неособенности матриц $A[I^\tau, J^\tau]$, $\tau \in P(k)$. При этом если положить

$$I_0^k = M_0^k \cap I^k, \ J_0^k = N_0^k \cap J^k, \ I_1^k = I^k \setminus I_0^k, \ J_1^k = J^k \setminus J_0^k,$$

$$I_k = I^k \setminus (\bigcup_{\tau \in P(k)} I^\tau), \quad J_k = J^k \setminus (\bigcup_{\tau \in P(k)} J^\tau),$$

то при каждом $k \in P$ блок $A[I^k, J^k]$ разбивается на клетки по схеме

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A[I_0^k, J_1^k \setminus J_k] & A[I_0^k, J_k] & 0 \\ \hline A[I_k, J_1^k \setminus J_k] & A[I_k, J_k] & A[I_k, J_0^k] \\ \hline A[I_1^k \setminus I_k, J_1^k \setminus J_k] & A[I_1^k \setminus I_k, J_k] & A[I_1^k \setminus I_k, J_0^k] \end{array}\right] \qquad (1.3)$$

I.3. Хранимая информация. Для каждого $k \in P$ обозначим через $D_k[J^k, I^k]$ матрицу, обратную к $A[I^k, J^k]$, через $T_k[I, I^k]$ - решение системы

$$T_k[I, I^k] \cdot A[I^k, J^k] = A[I, J^k]$$

и, наконец, через $R_k[J^k, J]$ - решение системы

$$A[I^k, J^k] \cdot R_k[J^k, J] = A[I^k, J].$$

Кроме того, для каждого $k \in P$ вытянем цепочку

$$\tau_0 \leftarrow \tau_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \tau_s \leftarrow \tau_{s+1} \leftarrow \cdots \leftarrow \tau_{t-1} \leftarrow \tau_t = k \quad (t > 0), \qquad (1.4)$$

соединяющую вершину k с корнем τ_0. Если $k \in P_+(\tau_{t-1})$, то в цепочке (I.4) определим самую левую вершину τ_s, для которой $k \in P_+^{\tau_s}$. Тогда в полосе $A[I^{\tau_s}, J^k]$ блока $A[I^{\tau_s}, J^{\tau_s}]$ (если учитывать лишь $t-s$ ступеней его иерархической структуры в зоне вертикального подчинения) отличны от нуля разве лишь клетки $A[I^k, J^k]$ и $A[I_{\tau_\nu} \cap M^k, J^k]$, $s \le \nu < t$. Отсюда следует, что в матрице $T_k[I^{\tau_s} \setminus I^k, I^k]$ отличны от нуля разве лишь клетки $T_k[I_{\tau_\nu} \cap M^k, I^k], s \le \nu < t$. Аналогично, если $k \in P_-(\tau_{t-1})$, то, определив в цепочке (I.4) самую левую вершину τ_s, при которой $k \in P_-^{\tau_s}$, увидим, что в матрице $R_k[J^k, J^{\tau_s} \setminus J^k]$ отличны от нуля разве лишь клетки $R_k[J^k, J_{\tau_\nu} \cap N^k]$, $s \le \nu < t$. В дальнейшем будем считать, что вместе с матрицей $A[I, J]$, разбитой на клетки указанным выше способом, нам известна также для каждого $k \in P$ матрица $D_k[J_k, I_k]$, и если $k \in P_+(\tau_{t-1})$, то матрицы $T_k[I_{\tau_\nu} \cap M^k, I_0^k \cup I_k]$, $s \le \nu < t$, а если $k \in P_-(\tau_{t-1})$, то матрицы $R_k[J_0^k \cup J_k, J_{\tau_\nu} \cap N^k]$, $s \le \nu < t$.

Для более компактной записи последних двух семейств матриц введем множества I_{1k} и J_{1k}, полагая $I_{1k} = \varnothing$, если $k = \tau_0$ или $k \in P_-(\tau_{t-1})$, и $J_{1k} = \varnothing$, если $k = \tau_0$ или $k \in P_+(\tau_{t-1})$. В противном случае положим

$$I_{1k} = \bigcup_{s \le \nu < t} (I_{\tau_\nu} \cap M^k) \quad \text{или} \quad J_{1k} = \bigcup_{s \le \nu < t} (J_{\tau_\nu} \cap N^k),$$

если $k \in P_+^{\tau_s}$ или $k \in P_-^{\tau_s}$ соответственно. Таким образом, для каждого $k \in P$ будем хранить вырезки

$$D_k[J_k, I_k],\ T_k[I_{1k}, I_0^k \cup I_k],\ R_k[J_0^k \cup J_k, J_{1k}] \tag{I.5}$$

из матриц

$$D_k[J^k, I^k],\ T_k[I, I^k],\ R_k[J^k, J]. \tag{I.6}$$

Замечание. Выбираемые здесь вырезки из матриц $T_k[I, I^k]$ и $R_k[J^k, J]$ соответствуют такому способу приведения матрицы $A[I, J]$ к блочно-треугольному виду, при котором лишние ненулевые элементы исключаются из полос преобразуемой матрицы $A[I, J]$ в порядке приближения их номеров к корню τ_0. Делается это с помощью лево- и правосторонних мультипликаторов. Хотя семейством (I^k, J^k), $k \in P$, блочно-треугольная матрица определяется однозначно, путь ее вычисления не единственный. Например, в статье [3] эта же матрица получается с помощью других вырезок из тех же матриц $T_k[I, I^k]$ и $R_k[J^k, J]$, причем исключение лишних элементов проводится в порядке удаления от корня τ_0 .

§ 2. Стандартные процедуры

Нас интересует вопрос о преобразовании матриц (I.5) в условиях некоторых изменений семейства $(I^k, J^k),\ k \in P$, определяющего разбиение на клетки базисной матрицы $A[I, J]$. Формулы преобразования приводятся для более крупных объектов - матриц (I.6) - и указываются изменения множеств, определяющих вырезки (I.5). При этом предполагается, что недостающие строки и столбцы из матриц (I.6) можно восстановить, пользуясь их определениями, например, решая соответствующие системы уравнений с учетом специфики и хранимой информации [3].

Обозначим через L_k совокупность вершин $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{t-1}$ в цепочке (I.4), а через $E[I, I]$ и $E[J, J]$ - единичные матрицы.

2.I. Процедуры усечения. Пусть заданы вершины k_0 и k_t , соединенные цепочкой

$$k_0 \leftarrow k_1 \leftarrow \cdots \leftarrow k_{t-1} \leftarrow k_t \qquad (2.I)$$

и такие, что либо $k_t \in P_-^{k_0} \cup \{k_0\}$, либо $k_t \in P_+^{k_0} \cup \{k_0\}$. Кроме того, заданы номера $i' \in I_{k_t}$ и $j'' \in J_{k_t}$, удовлетворяющие условию $D_{k_\nu}[j'', i'] \neq 0$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, t$ и подлежащие удалению соответственно из множеств I^{k_ν} и J^{k_ν} , $\nu = 0, 1, \ldots, t$.

Так как каждая из матриц $A[I^{k_\nu}, J^{k_\nu}],\ 0 \leq \nu \leq t,$ подвергается усечению по i' -й строке и j''-му столбцу, то обратная к ней преобразуется по формуле

$$D'_{k_\nu}[J^{k_\nu}, I^{k_\nu}] = D_{k_\nu}[J^{k_\nu}, I^{k_\nu}] - \frac{1}{D_{k_\nu}[j'', i']} \cdot D_{k_\nu}[J^{k_\nu}, i'] \cdot D_{k_\nu}[j'', I^{k_\nu}] \qquad (2.2)$$

с последующим вычеркиванием j''-й строки и i'-го столбца, очевидно, нулевых.

В этих условиях мы должны положить $I'_{k_t} = I_{k_t} \setminus \{i'\},\ J'_{k_t} = J_{k_t} \setminus \{j''\}$, а остальные пары семейства $(I_k, J_k),\ k \in {}^tP,$ оставить без изменения. Кроме того, если $P_-(k_t) \neq \emptyset$, то найдется вершина $\tau \in P_-^{k_t}$, для которой $j'' \in N^\tau$ и $P_-(\tau) = \emptyset$. Тогда для вершин $k_s,\ s = t+1, t+2, \ldots, t+p,$ цепочки

$$k_t \leftarrow k_{t+1} \leftarrow k_{t+2} \leftarrow \cdots \leftarrow k_{t+p} = \tau$$

множества J_{1k_s} нужно заменить на $J_{1k_s} \setminus \{j''\}$, поскольку

$j''\in J_{k_t}\cap N^{k_s}\subset J_{1k_s}$. Аналогично, если $P_+(k_t)\neq\phi$, то $i'\in M^{\tau}$ при некотором $\tau\in P_+^{k_s}$ с $P_+(\tau)=\phi$. Множества I_{1k_s} нужно заменить на $I_{1k_s}\setminus\{i'\}$ для всех $s=t+1,t+2,\dots,t+\rho$.

2.I.I. Усечение в зоне горизонтального подчинения. Пусть $k_t\in P_-^{k_0}\cup\{k_0\}$, а вершина k_0 либо совпадает с τ_0, либо $k_0\in P_+^{\tau}$ при некотором $\tau\in L_{k_0}$. Если соотношение (2.2) умножить справа на $A[I^{k_\nu},J]$, то получим матрицу

$$R'_{k_\nu}[J^{k_\nu},J]=R_{k_\nu}[J^{k_\nu},J]-\frac{1}{D_{k_\nu}[j'',i']}\cdot D_{k_\nu}[J^{k_\nu},i']\cdot R_{k_\nu}[j'',J], \qquad (2.3)$$

откуда нужно вычеркнуть (нулевую) j''-ю строку при каждом $\nu=1,2,\dots,t$. Если $k_0\neq\tau_0$, то нужно еще преобразовать матрицу $T_{k_0}[I,I^{k_0}]$. Это будет сделано в другой процедуре (п.2.3.2), использующей операцию усечения.

2.I.2. Усечение в зоне вертикального подчинения. Пусть $k_t\in P_+^{k_0}\cup\{k_0\}$, а вершина k_0 либо совпадает с τ_0, либо $k_0\in P_-^{\tau}$ при некотором $\tau\in L_{k_0}$. Если соотношение (2.2) умножить слева на $A[I,J^{k_\nu}]$, то получим матрицу

$$T'_{k_\nu}[I,I^{k_\nu}]=T_{k_\nu}[I,I^{k_\nu}]-\frac{1}{D_{k_\nu}[j'',i']}\cdot T_{k_\nu}[I,i']\cdot D_{k_\nu}[j'',I^{k_\nu}], \qquad (2.4)$$

откуда нужно вычеркнуть (нулевой) i'-й столбец при каждом $\nu=1,2,\dots,t$. Если $k_0\neq\tau_0$, то нужно еще преобразовать матрицу $R_{k_0}[J^{k_0},J]$, что будет учтено в процедуре п.2.2.2.

2.2. Прогонка строки через зону горизонтального подчинения. Пусть заданы вершины k_0 и k_t, связанные цепочкой

$$k_t\longleftarrow k_{t-1}\longleftarrow\cdots\longleftarrow k_1\longleftarrow k_0, \qquad (2.5)$$

в которой $k_0\in P_-^{k_t}$, а k_t либо совпадает с τ_0, либо $k_t\in P_+^{\tau}$ при некотором $\tau\in L_{k_t}$. Кроме того, задан номер $i'\in I_{k_0}\cup I_0^{k_0}$, который нужно исключить из множеств I^{k_ν}, $\nu=0,1,\dots,t-1$.

2.2.I. Предположим сначала, что $i'\in I_{k_0}$. Для каждого $\nu=0,1,\dots,t-1$ выберем номер $j_\nu\in\tilde J_{k_\nu}$, где $\tilde J_{k_0}=J_{k_0}$, а $\tilde J_{k_\nu}=J_{k_\nu}\cup\{j_{\nu-1}\}$, $0<\nu<t$, из условия неособенности матриц

$$A[I^{k_\nu}\setminus\{i'\},J^{k_\nu}\setminus\{j_\nu\}],\quad \nu=0,1,\dots,t-1. \qquad (2.6)$$

Так как каждая из матриц $A[I^{k_\nu},J^{k_\nu}]$, $0\leqslant\nu<t$, подвергается усечению по i'-й строке и j_ν-му столбцу, то обратная к ней преобразуется по формуле (2.2), а матрица $R_{k_\nu}[J^{k_\nu},J]$ – по формуле (2.3) при $j''=j_\nu$.

Для неособенности матриц (2.6) необходимо и достаточно, чтобы $D_{k_\nu}[j_\nu, i'] \neq 0$, $\nu = 0,1,\dots,t-1$. Поэтому в качестве j_ν естественно выбирать номер наибольшего по абсолютной величине элемента в столбце $D_{k_\nu}[\tilde{J}_{k_\nu}, i']$. При $\nu = 0$ этот элемент отличен от нуля, так как $D_{k_0}[J_{k_0}, i']$ – столбец неособенной матрицы. Если $\nu > 0$, то в матрице $A[I^{k_{\nu-1}}, J^{k_\nu}]$ отлична от нуля разве лишь часть $A[I^{k_{\nu-1}}, J_{k_\nu} \cup J^{k_{\nu-1}}]$. Поэтому

$$E[I^{k_{\nu-1}}, i'] = A[I^{k_{\nu-1}}, J_{k_\nu}] \cdot D_{k_\nu}[J_{k_\nu}, i'] + A[I^{k_{\nu-1}}, J^{k_{\nu-1}}] \cdot D_{k_\nu}[J^{k_{\nu-1}}, i'].$$

Отсюда следует, что если столбец $D_{k_\nu}[J_{k_\nu}, i']$ нулевой, то $D_{k_\nu}[j_{\nu-1}, i']$ совпадает с величиной $D_{k_{\nu-1}}[j_{\nu-1}, i']$, по индуктивному предположению отличной от нуля (в этом случае $j_\nu = j_{\nu-1}$).

В этих условиях мы должны положить

$$I'_{k_0} = I_{k_0} \setminus \{i'\}, \quad I'_{k_t} = I_{k_t} \cup \{i'\},$$

$$J'_{k_\nu} = \tilde{J}_{k_\nu} \setminus \{j_\nu\}, \quad 0 \leq \nu < t, \quad J'_{k_t} = J_{k_t} \cup \{j_{t-1}\},$$

а остальные множества семейства (I_k, J_k), $k \in P$, оставить без изменения. Кроме того, при каждом $\nu = 0,1,\dots,t-1$ множество J_{1k_ν} нужно расширить элементом j_ν, т.е. положить $J'_{1k_\nu} = J_{1k_\nu} \cup \{j_\nu\}$.

2.2.2. Предположим теперь, что наряду с номером $i' \in I_{k_0} \cup I_0^{k_0}$ заданы также номера j_0 и $z \in P_+^{k_0} \cup \{k_0\}$ такие, что $i' \in I_z$, $j_0 \in J_z$ и выполнима операция усечения (п.2.I) при $k_t = z$ и $j'' = j_0$. К процедуре п.2.2.I нужно приступать, минуя выбор номера j_0.

2.3. Прогонка столбца через зону вертикального подчинения. Пусть заданы вершины k_0 и k_t, связанные цепочкой (2.5), в которой $k_0 \in P_+^{k_t}$, а k_t либо совпадает с z_0, либо $k_t \in P_-^z$ при некотором $z \in L_{k_t}$. Заданный номер $j'' \in J_{k_0} \cup J_0^{k_0}$ нужно исключить из множеств J^{k_ν}, $\nu = 0,1,\dots,t-1$.

2.3.I. Если $j'' \in J_{k_0}$, то для каждого $\nu = 0,1,\dots,t-1$ выберем в качестве i_ν номер наибольшего по абсолютной величине элемента в строке $D_{k_\nu}[j'', \tilde{I}_{k_\nu}]$, где $\tilde{I}_{k_0} = I_{k_0}$, а $\tilde{I}_{k_\nu} = I_{k_\nu} \cup \{i_{\nu-1}\}$, $0 < \nu \leq t$. Для определения матрицы, обратной к $A[I^{k_\nu} \setminus \{i_\nu\}, J^{k_\nu} \setminus \{j''\}]$, воспользуемся формулой (2.2), а для подправления матрицы $T_{k_\nu}[I, I^{k_\nu}]$ – формулой (2.4), полагая в них $i' = i_\nu$. Положим также

$$I'_{k_\nu}=\tilde{I}_{k_\nu}\setminus\{i_\nu\},\ 0\leq\nu<t,\ I'_{k_t}=\tilde{I}_{k_t};\ J'_{k_0}=J_{k_0}\setminus\{j''\},\ J'_{k_t}=J_{k_t}\cup\{j''\};$$
$$I'_{1k_\nu}=I_{1k_\nu}\cup\{i_\nu\},\quad 0\leq\nu<t.$$

2.3.2. Если $j''\in J_{k_0}\cup J_0^{k_0}$, заданы номера i_0 и $z\in P_-^{k_0}\cup\cup\{k_0\}$ такие, что $i_0\in I_z$, $j''\in J_z$, и выполнима операция усечения (п.2.I) при $k_t=z$ и $i'=i_0$, то в процедуре 2.3.I определение номера i_0 опускается.

2.4. Циклическая перестановка столбцов в зоне горизонтального подчинения. Пусть заданы вершины k_0 и k_t, соединенные цепочкой (2.I) и такие, что $k_t\in P_-^{k_0}$. Кроме того, заданы номера $j_0\in J_{k_0}\cap N^{k_1}$ и $j''\in J_{k_t}$ такие, что $R_{k_1}[j'',j_0]\neq 0$. Требуется определить номера $j_\nu\in J_{k_\nu}\cup\{j_{\nu-1}\}$, $\nu=1,2,\dots,t-1$, из условия неособенности матриц

$$A[I^{k_\nu},(J^{k_\nu}\cup\{j_{\nu-1}\})\setminus\{j''\}],\quad \nu=1,2,\dots,t. \tag{2.7}$$

Так как j''-й столбец в каждой из матриц $A[I^{k_\nu},J^{k_\nu}]$ $(1\leq\nu\leq t)$ заменяется на $j_{\nu-1}$-й, то в матрице

$$D'_{k_\nu}[J^{k_\nu},I^{k_\nu}]=D_{k_\nu}[J^{k_\nu},I^{k_\nu}]-\frac{1}{R_{k_\nu}[j'',j_{\nu-1}]}\cdot R_{k_\nu}[J^{k_\nu},j_{\nu-1}]\cdot D_{k_\nu}[j'',I^{k_\nu}] \tag{2.8}$$

нулевая j''-я строка заменяется на строку

$$D'_{k_\nu}[j_{\nu-1},I^{k_\nu}]=\frac{1}{R_{k_\nu}[j'',j_{\nu-1}]}\cdot D_{k_\nu}[j'',I^{k_\nu}]. \tag{2.9}$$

Если соотношения (2.8)-(2.9) умножить справа на $A[I^{k_\nu},J]$, то, аналогично, в матрице

$$R'_{k_\nu}[J^{k_\nu},J]=R_{k_\nu}[J^{k_\nu},J]-\frac{1}{R_{k_\nu}[j'',j_{\nu-1}]}\cdot R_{k_\nu}[J^{k_\nu},j_{\nu-1}]\cdot R_{k_\nu}[j'',J] \tag{2.10}$$

нулевую j''-ю строку нужно заменить на строку

$$R'_{k_\nu}[j_{\nu-1},J]=\frac{1}{R_{k_\nu}[j'',j_{\nu-1}]}\cdot R_{k_\nu}[j'',J]. \tag{2.11}$$

Из формул (2.8)-(2.II) видно, что условие $R_{k_\nu}[j'',j_{\nu-1}]\neq 0$ является необходимым и достаточным для неособенности матриц (2.7) при каждом $\nu=1,2,\dots,t$. Поэтому в качестве j_ν выбирается номер наибольшего по абсолютной величине элемента в строке

$$R_{k_{\nu+1}}[j'',(J_{k_\nu}\cap N^{k_{\nu+1}})\cup\{j_{\nu-1}\}]. \tag{2.12}$$

Используя определение матриц $R_{k_\nu}[J^{k_\nu}, J]$ и $R_{k_{\nu+1}}[J^{k_{\nu+1}}, J]$, получим

$$R_{k_\nu}[j'', j_{\nu-1}] = R_{k_{\nu+1}}[j'', j_{\nu-1}] - R_{k_{\nu+1}}[j'', J_{k_\nu} \cap N^{k_{\nu+1}}] \cdot$$

$$\cdot R_{k_\nu}[J_{k_\nu} \cap N^{k_{\nu+1}}, j_{\nu-1}].$$

поскольку $R_{k_\nu}[j'', j_{\nu-1}] \neq 0$ (предположение индукции), то строка (2.12) не может быть нулевой.

В этих условиях положим

$$J'_{k_0} = (J_{k_0} \cup \{j''\}) \setminus \{j_0\}, \quad J'_{k_\nu} = (J_{k_\nu} \cup \{j_{\nu-1}\}) \setminus \{j_\nu\}, \quad 1 \le \nu < t,$$

$$J'_{k_t} = (J_{k_t} \setminus \{j''\}) \cup \{j_{t-1}\}; \quad J'_{1k_\nu} = (J_{1k_\nu} \setminus \{j_{\nu-1}\}) \cup \{j''\}, \quad 1 \le \nu \le t.$$

В отличие от процедур прогонки и усечения в результате циклической перестановки столбцов в тех вершинах k_ν, $\nu = 1,2,\ldots,t$, для которых $P_+(k_\nu) \neq \emptyset$, $j_\nu \neq j_{\nu-1}$ и $j_{\nu-1} \in N_0^{k_\nu}$, возникают нарушения структурных требований типа $J^\tau = J^{k_\nu} \cap N^\tau$, $\tau \in P_+(k_\nu)$, т.е. столбец с номером $j_{\nu-1}$ оказывается "чужим" в полосе $A[I, J'_{k_\nu}]$. Поэтому номер $j_{\nu-1}$ нужно присоединить к множеству $J_0^{k_\nu}$, что осуществляется специальной процедурой, описываемой в п. 2.6.

2.5. Циклическая перестановка строк в зоне вертикального подчинения. Заданные вершины k_0 и k_t соединены цепочкой (2.1), в которой $k_t \in P_+^{k_0}$, $T_{k_1}[i_0, i'] \neq 0$, где $i_0 \in I_{k_0} \cap \cap M^{k_1}$ и $i' \in I_{k_t}$. При каждом $\nu = 1, 2, \ldots, t-1$ выберем в качестве i_ν номер наибольшего по абсолютной величине элемента в столбце $T_{k_\nu}[(I_{k_\nu} \cap M^{k_{\nu+1}}) \cup \{i_{\nu-1}\}, i']$. При каждом $\nu = 1, 2, \ldots, t$ для определения матрицы, обратной к $A[I^{k_\nu} \cup \cup \{i_{\nu-1}\} \setminus \{i'\}, J^{k_\nu}]$, заменим в матрице

$$D'_{k_\nu}[J^{k_\nu}, I^{k_\nu}] = D_{k_\nu}[J^{k_\nu}, I^{k_\nu}] -$$

$$- \frac{1}{T_{k_\nu}[i_{\nu-1}, i']} \cdot D_{k_\nu}[J^{k_\nu}, i'] \cdot T_{k_\nu}[i_{\nu-1}, I^{k_\nu}]$$

нулевой i'-й столбец на столбец

$$D'_{k_\nu}[J^{k_\nu}, i_{\nu-1}] = \frac{1}{T_{k_\nu}[i_{\nu-1}, i']} \cdot D_{k_\nu}[J^{k_\nu}, i'].$$

Аналогично, при каждом $\nu = 1, 2, \ldots, t$ столбец с номером i' в матрице

$$T'_{k_\nu}[I, I^{k_\nu}] = T_{k_\nu}[I, I^{k_\nu}] - \frac{1}{T_{k_\nu}[i_{\nu-1}, i']} \cdot T_{k_\nu}[I, i'] \cdot T_{k_\nu}[i_{\nu-1}, I^{k_\nu}]$$

заменим на столбец

$$T'_{k_\nu}[I, i_{\nu-1}] = \frac{1}{T_{k_\nu}[i_{\nu-1}, i']}\cdot T_{k_\nu}[I, i'].$$

В семействах I_k $(k\in P)$ и I_{1k} $(k\in P)$ произведем следующие замены:

$$I'_{k_0}=(I_{k_0}\cup\{i'\})\setminus\{i_0\},\quad I'_{k_\nu}=(I_{k_\nu}\cup\{i_{\nu-1}\})\setminus\{i_\nu\},\quad 1\le\nu<t,$$

$$I'_{k_t}=(I_{k_t}\setminus\{i'\})\cup\{i_{t-1}\};\quad I'_{1k_\nu}=(I_{1k_\nu}\setminus\{i_{\nu-1}\})\cup\{i'\},\quad 1\le\nu\le t.$$

Нарушение структурного требования (I.2) типа $I^\tau = I^{k_\nu}\cap M^\tau$, $\tau\in P_-(k_\nu)$, в вершине k_ν $(1\le\nu\le t)$ возникает в том случае, если $P_-(k_\nu)\ne\emptyset$, $i_\nu\ne i_{\nu-1}$ и $i_{\nu-1}\in M_0^{k_\nu}$ (см. п.2.6).

2.6. Исправление структурных нарушений. Опишем процедуры, ликвидирующие нарушения структурных требований (I.2).

2.6.I. Случай "чужого" столбца. Пусть для некоторого $k_0\in P$ такого, что $P_+^{k_0}\ne\emptyset$, номер $j'\in J_{k_0}$ принадлежит множеству $N_0^{k_0}$. Нас интересуют случаи, когда либо $k_0=\tau_0$, либо $k_0\in P_-^z$ при некотором $z\in L_{k_0}$, так что $I_{1k}\subset I^{k_0}$ при всех $k\in P_+^{k_0}$. Поскольку $N_0^{k_0}$ равно объединению множеств $N^k\setminus N_0^k$, $k\in P_+^{k_0}$, то найдется вершина $k_t\in P_+^{k_0}$, при которой $j'\in N^{k_t}\setminus N_0^{k_t}$. Для вершин k_ν, $\nu=0,1,\dots,t-1$, цепочки (2.I) определим последовательность номеров $i_{\nu+1}\in\tilde I_{k_\nu}$, где $\tilde I_{k_0}=I_{k_0}$, $\tilde I_{k_\nu}=I_{k_\nu}\cup\{i_\nu\}$, $0<\nu<t$, из условия неособенности матриц

$$A[I^{k_\nu}\cup\{i_\nu\}, J^{k_\nu}\cup\{j'\}]\quad(\nu=1,2,\dots,t). \tag{2.I3}$$

Так как каждая из матриц $A[I^{k_\nu}, J^{k_\nu}]$, $1\le\nu\le t$, окаймляется строкой и столбцом, то обратную к ней можно получить по схеме

$$D'_{k_\nu}[J^{k_\nu}\cup\{j'\},\ I^{k_\nu}\cup\{i_\nu\}] =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} D_{k_\nu}[J^{k_\nu},I^{k_\nu}]+\dfrac{R_{k_\nu}[J^{k_\nu},j']\cdot T_{k_\nu}[i_\nu,I^{k_\nu}]}{\alpha_{k_\nu}[i_\nu,j']} & -\dfrac{R_{k_\nu}[J^{k_\nu},j']}{\alpha_{k_\nu}[i_\nu,j']} \\ \hdashline -\dfrac{1}{\alpha_{k_\nu}[i_\nu,j']}\cdot T_{k_\nu}[i_\nu,I^{k_\nu}] & \underbrace{\dfrac{1}{\alpha_{k_\nu}[i_\nu,j']}}_{i_\nu} \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \}\,j' \end{array} \tag{2.I4}$$

где $\alpha_{k_\nu}[I,j']=A[I,j']-A[I,J^{k_\nu}]\cdot R_{k_\nu}[J^{k_\nu},j']$. Умножив соотношение (2.I4) слева на $A[I,J^{k_\nu}\cup\{j'\}]$, получим матрицу

$$T'_{k_\nu}[I,I^{k_\nu}\cup\{i_\nu\}]=$$

$$=\begin{array}{c}\\ \left[\begin{array}{c|c} T_{k_\nu}[I,I^{k_\nu}]-\dfrac{\alpha_{k_\nu}[I,j']\cdot T_{k_\nu}[i_\nu,I^{k_\nu}]}{\alpha_{k_\nu}[i_\nu,j']} & \overbrace{\dfrac{\alpha_{k_\nu}[I,j']}{\alpha_{k_\nu}[i_\nu,j']}}^{i_\nu} \end{array}\right]\end{array}$$

Для неособенности матриц (2.I3) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_{k_\nu}[i_\nu,j']\neq 0$, $\nu=1,2,\ldots,t$. Поэтому в качестве i_ν выбирается номер наибольшего по абсолютной величине элемента в столбце $\alpha_{k_\nu}[\tilde{I}_{k_{\nu-1}}\cap M^{k_\nu},j']$. Если бы этот элемент равнялся нулю, то

$$A[\tilde{I}_{k_{\nu-1}},j']=A[\tilde{I}_{k_{\nu-1}},J^{k_\nu}]\cdot R_{k_\nu}[J^{k_\nu},j'] \tag{2.I5}$$

(по определению столбца $\alpha_{k_\nu}[I,j']$). Так как $k_\nu\in P_+(k_{\nu-1})$, то в матрице $A[\tilde{I}^{k_{\nu-1}},J^{k_\nu}]$, где $\tilde{I}^{k_{\nu-1}}=I^{k_{\nu-1}}\cup\{i_{\nu-1}\}$, отлична от нуля разве лишь часть $A[\tilde{I}_{k_{\nu-1}}\cup I^{k_\nu},J^{k_\nu}]$. Из (2.I5) и определения столбца $R_{k_\nu}[J^{k_\nu},j']$ следует, что столбец $A[\tilde{I}^{k_{\nu-1}},j']$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $A[\tilde{I}^{k_{\nu-1}},J^{k_\nu}]$, а это противоречит неособенности матрицы $A[\tilde{I}^{k_{\nu-1}},J^{k_{\nu-1}}\cup\{j'\}]$.

Положим

$$I'_{k_\nu}=\tilde{I}_{k_\nu}\setminus\{i_{\nu+1}\},\quad 0\leq\nu<t,\quad I'_{k_t}=I_{k_t}\cup\{i_t\};$$

$$J'_{k_0}=J_{k_0}\setminus\{j'\},\ J'_{k_t}=J_{k_t}\cup\{j'\};\quad I'_{1k_\nu}=I_{1k_\nu}\setminus\{i_\nu\},\quad 1\leq\nu\leq t.$$

Если $P_-(k_t)\neq\emptyset$, то найдется вершина $\tau\in P_-^{k_t}$, для которой $P_-(\tau)=\emptyset$ и $j'\in N^\tau$. Это означает, что для вершин τ_μ, $\mu=1,2,\ldots,p$, цепочки

$$k_t\leftarrow\tau_1\leftarrow\tau_2\leftarrow\cdots\leftarrow\tau_{p-1}\leftarrow\tau_p=\tau \tag{2.I6}$$

множества $J_{1\tau_\mu}$ нужно заменить на $J_{1\tau_\mu}\cup\{j'\}$.

Заметим, что здесь, как и при циклической перестановке строк, в тех вершинах k_ν, $\nu=1,2,\ldots,t$, для которых $P_-(k_\nu)\neq\emptyset$, $i_{\nu+1}\neq i_\nu$ и $i_\nu\in M_0^{k_\nu}$, возникает нарушение структурного требования типа $I^k=I^{k_\nu}\cap M^k$, $k\in P_-(k_\nu)$. Оно устраняется описываемой ниже процедурой.

2.6.2. Случай "чужой" строки. Пусть для некоторого k_0 такого, что $P_-^{k_0}\neq\emptyset$, номер $i''\in I_{k_0}$ принадлежит множеству $M_0^{k_0}$. При этом либо $k_0=\tau_0$, либо $k_0\in P_+^{\tau}$ для некоторого

$\tau \in J_{k_0}$. Определим вершину $k_t \in P_-^{k_0}$ из условия $i'' \in M^{k_t} \setminus M_0^{k_t}$ и для каждой вершины k_ν, $0 \le \nu < t$, цепочки (2.I) выберем в качестве j_ν номер наибольшего по абсолютной величине элемента в строке $\alpha_{k_\nu}[i'', \tilde{J}_{k_{\nu-1}} \cap N^{k_\nu}]$, где $\tilde{J}_{k_0} = J_{k_0}$, $\tilde{J}_{k_\mu} = J_{k_\mu} \cup \{j_\mu\}$, $1 \le \mu \le \tau$, а строка $\alpha_{k_\nu}[i'', J]$ определяется формулой $\alpha_{k_\nu}[i'', J] = A[i'', J] - T_{k_\nu}[i'', I^{k_\nu}] \cdot A[I^{k_\nu}, J]$. Тогда матрица, обратная к $A[I^{k_\nu} \cup \{i''\}, J^{k_\nu} \cup \{j_\nu\}]$, определяется по схеме (2.I4) при $i_\nu = i''$ и $j' = j_\nu$ для каждого $\nu = 1, 2, \ldots, t$, а к матрице

$$R'_{k_\nu}[J^{k_\nu}, J] = R_{k_\nu}[J^{k_\nu}, J] - \frac{1}{\alpha_{k_\nu}[i'', j_\nu]} \cdot R_{k_\nu}[J^{k_\nu}, j_\nu] \cdot \alpha_{k_\nu}[i'', J]$$

приписывается строка

$$R'_{k_\nu}[j_\nu, J] = \frac{1}{\alpha_{k_\nu}[i'', j_\nu]} \cdot \alpha_{k_\nu}[i'', J].$$

В этих условиях положим

$$I'_{k_0} = I_{k_0} \setminus \{i''\}, \quad I'_{k_t} = I_{k_t} \cup \{i''\};$$

$$J'_{k_\nu} = \tilde{J}_{k_\nu} \setminus \{j_{\nu+1}\}, \ 0 \le \nu < t, \ J'_{k_t} = \tilde{J}_{k_t}; \ J'_{1k_\nu} = J_{1k_\nu} \setminus \{j_\nu\}, \quad 1 \le \nu \le t.$$

Кроме того, если $P_+(k_t) \ne \emptyset$, то $i'' \in M^{\tau}$, $\tau \in P_+^{k_t}$ и $P_+(\tau) = \emptyset$. Для вершин τ_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, цепочки (2.I6) положим $I'_{1\tau_\mu} = I_{1\tau_\mu} \cup \{i''\}$. Заметим, что в тех вершинах k_ν, $1 \le \nu \le t$, для которых $P_+(k_\nu) \ne \emptyset$, $j_{\nu+1} \ne j_\nu$ и $j_\nu \in N_0^{k_\nu}$, возникает нарушение структурного требования типа "чужой" столбец.

§ 3. Использование стандартных процедур при изменении базиса

Посмотрим, как с помощью процедур 2.I-2.6 можно осуществить преобразование хранимой информации (I.5) в связи со следующими изменениями матрицы $A[I, J]$: заменой столбца или строки, окаймлением одной строкой и одним столбцом или усечением по одной строке и одному столбцу. Рассмотрим сначала для каждого из этих преобразований наиболее благоприятные ситуации, а затем покажем, что и все остальные можно свести к таковым.

3.I. Замена столбца. В базисной паре (I, J) множество J заменяется на $J' = (J \setminus \{j''\}) \cup \{j'\}$, причем $j'' \in J_\tau$, а $\tau \in P_-^{\tau_0} \cup \{\tau_0\}$. Кроме того, предполагается, что в столбце

$R_{\tau_0}[J,j']$ величина $R_{\tau_0}[j'',j']$ отлична от нуля, что является условием неособенности матрицы $A[I,J']$.

Расширим граф (P,Q) добавлением фиктивной вершины τ_0', связав с ней дугой $\tau_0' \leftarrow \tau_0$ корень τ_0 и отметив его знаком -I. Базисную матрицу $A[I,J]$ окаймим по схеме

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \underbrace{A[I,j']}_{j'} & A[I,J] \end{array}\right]\begin{matrix}\}0\\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

положив $I_{\tau_0'}=\{0\}$, $J_{\tau_0'}=\{j'\}$, $D_{\tau_0'}[j',0]=1$. Поскольку $R_{\tau_0}[j'',j']\neq 0$, а $z\in P_-^{\tau_0}$, то можно применить циклическую перестановку столбцов (п.2.4), положив $k_0=\tau_0'$, $k_t=z$, $j_0=j'$. Отбросив затем вершину τ_0' и метку корня τ_0, следует произвести исправление структурных нарушений, если они возникли.

3.2. Замена строки. В базисной паре (I,J) множество I заменяется на $I'=(I\setminus\{i'\})\cup\{i''\}$, причем $i'\in I_z$, а $z\in P_+^{\tau_0}\cup\{\tau_0\}$. Введя фиктивную вершину τ_0' с дугой $\tau_0'\leftarrow\tau_0$ и отметив τ_0 знаком +I, базисную матрицу $A[I,J]$ окаймим по схеме

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & A[i'',J] \\ \hline \underbrace{0}_{0} & A[I,J] \end{array}\right]\begin{matrix}\}i''\\ \\ \end{matrix}$$

и положим $I_{\tau_0'}=\{i''\}$, $J_{\tau_0'}=\{0\}$, $D_{\tau_0'}[0,i'']=1$. Предположение $T_{\tau_0}[i'',i']\neq 0$ позволяет применить циклическую перестановку строк (п.2.5), положив $k_0=\tau_0'$, $k_t=z$, $i_0=i''$.

3.3. Усечение матрицы. Базисная пара (I,J) заменяется на (I',J'), где $I'=I\setminus\{i'\}$, $J'=J\setminus\{j''\}$.

а) Если $i'\in I_{\tau_0}$, $j''\in J_{\tau_0}$, то можно сразу же применить операцию усечения (п.2.I), положив $k_t=k_0=\tau_0$.

б) Если $i'\in I_{\tau_0}$, $j''\in J_z$, причем $z\in P_-^{\tau_0}$, то применим циклическую перестановку столбцов (п.2.4), положив $k_0=\tau_0$, $k_t=z$ и выбрав в качестве j_0 номер наибольшего по абсолютной величине элемента в строке $R_{\tau_1}[j'',J_{\tau_0}]$, где τ_1 - элемент цепочки

$$\tau_0\leftarrow\tau_1\leftarrow\cdots\leftarrow\tau_{s-1}\leftarrow\tau_s = z. \qquad (3.I)$$

Теперь можно выполнить операцию усечения в условиях а), а затем, если нужно, исправить структурные нарушения.

в) Если $j'' \in J_{\tau_0}$, $i' \in I_z$, причем $z \in P_+^{\tau_0}$, то сделаем сначала циклическую перестановку строк (п.2.5), положив $k_0 = \tau_0$, $k_t = z$ и выбрав в качестве i_0 номер наибольшего по абсолютной величине элемента в столбце $T_{\tau_1}[I_{\tau_0}, i']$.

3.4. Окаймление матрицы. В этом случае $I' = I \cup \{i''\}$, $J' = J \cup \{j'\}$ и величина $\alpha_{\tau_0}[i'', j']$ отлична от нуля. Введя фиктивную вершину τ_0' с дугой $\tau_0' \leftarrow \tau_0$ так, как это сделано в пп. 3.I или 3.2, положим

$$M^{\tau_0'} = M^{\tau_0},\ N^{\tau_0'} = N^{\tau_0},\ I_{\tau_0'} = \{i''\},\ J_{\tau_0'} = \{j'\},\ D_{\tau_0'}[j', i''] = \frac{1}{\alpha_{\tau_0}[i'', j']} .$$

Теперь к матрице $A[I', J']$ достаточно применить операцию исправления структурных нарушений, положив $k_0 = \tau_0'$.

3.5. Приведение номера i' в благоприятную ситуацию. Из рассмотренных случаев видно, что неблагоприятной ситуацией для номера $i' \in I_z$ является такая, при которой в цепочке (3.I) имеются вершины, отмеченные знаком -I. Эта ситуация, в свою очередь, разветвляется на две: $\tau_s \in P_+(\tau_{s-1})$ и $\tau_s \in P_-(\tau_{s-1})$.

Стандартный шаг. В случае $i' \in I_{\tau_s}$, $\tau_s \in P_+(\tau_{s-1})$ определим в цепочке (3.I) самую левую вершину τ_ρ $(\rho > 0)$, при которой $\tau_s \in P_+^{\tau_\rho}$. Для вершин цепочки

$$\tau_\rho \leftarrow \tau_{\rho+1} \leftarrow \cdots \leftarrow \tau_{s-1} \leftarrow \tau_s \tag{3.2}$$

построим последовательность номеров j_μ, $\mu = s, s-1, \ldots, \rho$, на которых реализуются максимумы

$$max\ \{|D_{\tau_\mu}[j, i']| : j \in \tilde{J}_{\tau_\mu}\},$$

где $\tilde{J}_{\tau_s} = J_{\tau_s}$, $\tilde{J}_{\tau_\mu} = J_{\tau_\mu} \cup \{j_{\mu+1}\}$, $\rho \leq \mu < s$. В цепочке (3.2) выберем самую правую вершину τ_ν $(\rho \leq \nu \leq s)$, при которой $j_\rho = j_{\rho+1} = \cdots = j_\nu$.

Если $\nu \neq s$, то применим циклическую перестановку строк (п.2.5), положив в ней $k_0 = \tau_\nu$, $k_t = \tau_s$ и в качестве i_0 выбрав номер наибольшего по абсолютной величине элемента в столбце $T_{\tau_{\nu+1}}[I_{\tau_\nu} \cap M^{\tau_{\nu+1}}, i']$. После этого применим прогонку строки через зону горизонтального подчинения (в варианте п.2.2.2), положив в ней $k_0 = \tau_\rho$, $j_0 = j_\nu$, а в качестве k_t выбрав в цепочке (3.I) самую левую вершину τ_q, при которой $\tau_\rho \in P_-^{\tau_q}$. Если $\nu = s$, то прогонка осуществляется сразу (п.2.2.2).

К концу стандартного шага, подвинувшись по цепочке (3.I) влево, окажемся либо в тех же условиях, в каких были перед его началом (и тогда этот шаг нужно повторить), либо в благоприятных условиях.

Нестандартный шаг. Если $i' \in I_{\tau_s}$, $\tau_s \in P_-(\tau_{s-1})$, то в цепочке (3.I) найдем самую левую вершину τ_q, для которой $\tau_s \in P_-^{\tau_q}$. После прогонки строки через зону горизонтального подчинения (п.2.2.1) при $k_0 = \tau_s$, $k_t = \tau_q$ окажемся либо в условиях стандартного шага, либо в благоприятных.

3.6. Приведение номера j'' в благоприятную ситуацию.

Стандартный шаг. Пусть $j'' \in J_{\tau_s}$ и $\tau_s \in P_-(\tau_{s-1})$. Определим в цепочке (3.I) самую левую вершину τ_p, при которой $\tau_s \in P_-^{\tau_p}$. Построим последовательность номеров i_μ, $\mu = s, s-1, \dots, p$, на которых реализуются максимумы

$$\max\{|D_{\tau_\mu}[j'', i]| : i \in \tilde{I}_{\tau_\mu}\},$$

где $\tilde{I}_{\tau_s} = I_{\tau_s}$, $\tilde{I}_{\tau_\mu} = I_{\tau_\mu} \cup \{i_{\mu+1}\}$, $p \le \mu < s$. В цепочке (3.2) найдем самую правую вершину τ_ν, при которой $i_p = i_{p+1} = \dots = i_\nu$.

При $\nu \ne s$ применим циклическую перестановку столбцов (п.2.4), положив в ней $k_t = \tau_s$, $k_0 = \tau_\nu$ и в качестве j_0 выбрав номер наибольшего по абсолютной величине элемента в строке $R_{\tau_{\nu+1}}[j'', J_{\tau_\nu} \cap N^{\tau_{\nu+1}}]$. Затем применим процедуру прогонки столбца через зону вертикального подчинения (п.2.3.2), положив в ней $k_0 = \tau_p$, $i_0 = i_\nu$, а в качестве k_t выбрав в цепочке (3.I) самую левую вершину τ_q, при которой $\tau_p \in P_+^{\tau_q}$.

Нестандартный шаг. Если $j'' \in J_{\tau_s}$, $\tau_s \in P_+(\tau_{s-1})$, то в цепочке (3.I) найдем самую левую вершину τ_q, при которой $\tau_s \in P_+^{\tau_q}$, и применим прогонку столбца через зону вертикального подчинения (п.2.3.I).

ЛИТЕРАТУРА

I. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.

2. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А. Обобщение понятия блочности в линейном программировании. -"ДАН СССР", 1977, т.205, № 5, с. 993-996.

2. ЗВЯГИНА Р.А. Системы линейных уравнений с иерархической симметричной блочностью матриц. - Настоящий сб-к,с.69-82.

4. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. М., "Наука", 1977.

Поступила в ред.-изд.отдел
30.IX.1978 г.