Выпуск 22 (39) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88 + 517.51 + 519.3 + 519.95

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

С.С.Кутателадзе

Цель настоящей работы - обсуждение некоторых аспектов развития выпуклого анализа.

Напомним, что в "Математической энциклопедии" в статье*), посвященной этому предмету, В.М.Тихомиров пишет: "Выпуклый анализ - раздел математики, занимающий промежуточное положение между анализом и геометрией, в котором изучаются выпуклые функции, выпуклые функционалы и выпуклые множества. Основания выпуклого анализа были заложены Г.Минковским, создавшим выпуклую геометрию, т.е. геометрию выпуклых множеств в конечномерном пространстве. Многие понятия и концепции выпуклой геометрии нашли свое завершение в функциональном анализе. С работы В.Фенхеля начался новый этап выпуклого анализа, на котором детально исследовались свойства выпуклых функционалов. Формирование выпуклого анализа как самостоятельного раздела относится к 50-60-м гг. 20 в." И далее: " Основными в выпуклом анализе являются понятие поляры, субдифференциала и сопряженной функции. Теоремы выпуклого анализа связывают операции сопряжения, перехода к поляре и взятия субдифференциала с алгебраическими, теоретико-множественными и порядковыми операциями над выпуклыми множествами и функциями. Исследуются также всевозможные двойственные отношения между множествами и их полярами, функциями и сопряженными к ним, множествами и выпуклыми однородными функциями и т.п." *)

---

*) Т.I. М., 1977, с.800-801.

Подчеркнем, что в приведенном определении в качестве содержания выпуклого анализа выступает изучение индивидуальных конструкций двойственности - функции и ее субдифференциала, функции и ее преобразования Юнга (сопряженной функции) и т.п. Иными словами, здесь речь идет о локальных свойствах выпуклой функции или ее преобразовании Хёрмандера - о локальном выпуклом анализе.

Надо сказать, что к 70-м гг. сложилось такое положение, при котором локальные проблемы выпуклого анализа стали восприниматься как в основном решенные. Известную неудовлетворенность специалистов вызывал лишь тот факт, что аппарат субдифференцирования не вполне адекватен классическому дифференциальному исчислению. Однако задача вычисления, скажем, субдифференциала суперпозиции - фактически основная проблема локального анализа - формально по сути дела и не ставилась в связи с ее очевидной недоступностью стандартному геометрическому аппарату.

В те же годы серьезно растет интерес к глобальным, массовым задачам выпуклого анализа - к проблемам, в которых участвуют сразу все выпуклые функции или множества или их достаточно обширные классы. Главными источниками таких задач глобального выпуклого анализа являются теория Шоке, выпуклая геометрия, теория выпуклых операторов. Так, теория Шоке, занимавшаяся формально локальной проблемой - изучением интегральных представлений точек индивидуального выпуклого компакта, стояла в стороне от основного русла выпуклого анализа. Объясняется это прежде всего тем, что для решения указанной локальной задачи в ней используется глобальный подход - концепция упорядоченности Шоке, т.е. отношение порядка

$$\mu \succ \nu \iff \forall f \int f\,d\mu \geq \int f\,d\nu,$$

где f - произвольная выпуклая функция на рассматриваемом компакте. Ясно, что такого рода отношения порядка необходимы и для анализа ряда классических проблем, например для изучения уравнений Эйлера - Лагранжа для задач с выпуклыми решениями, в частности, в теории изопериметрических задач выпуклой геометрии.

Эти и некоторые другие обстоятельства (параллелизм теорий выпуклых функций и выпуклых множеств, рост различных обобщений концепции выпуклости, необходимость анализа многоцелевых задач и т.п.) вызывают настоятельную потребность в некотором синтетическом подходе к общим проблемам выпуклости. С нашей точки зрения, такой подход состоит в построении выпуклого анализа на основе теории упорядоченных векторных пространств. Иными словами, в рамках последней теории можно достаточно естественным, общим и простым путем получить ответы на многие основные вопросы глобального характера, сохранив и расширив в то же время богатство содержания локального выпуклого анализа.

В качестве основных глобальных вопросов выделяются линейные задачи выпуклого анализа, т.е. задачи, сводящиеся в конечном счете к изучению линейных функционалов и операторов, положительных на конусе выпуклых в том или ином смысле функций или множеств. Замысел работы – получить общие теоремы о такого рода операторах и показать, как эти результаты применяются при решении конкретных проблем выпуклого анализа, недоступных прежним локальным методам. Полигоном являются три комплекса тесно связанных между собою задач (см. [I – 6]):

I. Проблемы, выдвинутые в 1961 г. Г.Шоке, связанные с описанием максимальных форм на заданной верхней решетке.

II. Проблемы двойственности Минковского, главным образом связанные с теорией выпуклых множеств. Прежде всего имеется в виду проблема параметризации экстремальных задач изопериметрического типа с операторными ограничениями.

III. Проблемы построения локального выпуклого анализа в пространствах Канторовича (K-пространствах) и, прежде всего, решение упомянутых выше основных задач вычисления субдифференциалов и преобразований Юнга произвольных выпуклых операторов.

Круг исследуемых выпуклым анализом объектов очерчивается классической концепцией двойственности Минковского. Напомним это понятие.

Пусть H – конус в K-пространстве Y. Множество $\mathcal{U}$ в H называется H-выпуклым, если $\mathcal{U}=\mathcal{U}_p^H=\{h\in H: h\leq p\}$ для некоторого $p\in Y$. Элемент $p\in Y$ называется H-выпуклым, если $p=\sup \mathcal{U}_p^H$. Между классом $P(H,Y)$ всех H-выпуклых элементов и классом $\mathcal{H}(H,Y)$ всех H-выпуклых множеств действует естественная биекция $p\mapsto \mathcal{U}_p^H$ – двойственность Минковского. Этим каноническим склеиванием выпуклого элемента и его опорного множества будем систематически пользоваться. Подчеркнем, что локальный выпуклый анализ занимается изучением переноса алгебраических, порядковых и топологических свойств для конкретно заданной двойственности Минковского.

Стоит отметить, что множество $P(H,Y)$ (или $\mathcal{H}(H,Y)$, что с точностью до двойственности Минковского то же самое) представляет собой конус в пространстве Y. Тем самым возникает основная линейная задача выпуклого анализа – задача представления сопряженного конуса $P(H,Y)^*$, или, в эквивалентной постановке, задача изучения упорядоченности Шоке

$$S \succ_P T \iff S - T \in P(H,Y)^*.$$

Такую задачу естественно, а в ряде случаев и необходимо, рассматривать и для произвольных положительных операторов.

Основным техническим шаблоном для исследования задач об упорядоченности Шоке является следующая теорема декомпозиции, которая уточняется и конкретизируется в различных ситуациях.

ТЕОРЕМА. Пусть $H_1,\dots,H_m$ – конусы в векторной решетке X и Y – некоторое K-пространство. Пусть $S,T \in L^+(X,Y)$ – положительные операторы. Неравенство

$$S h_1 \vee \dots \vee h_m \geq T h_1 \vee \dots \vee h_m$$

имеет место для любых $h_1 \in H_1,\dots,h_m \in H_m$ в том и только в том случае, если для любого разбиения $\hat{T}$ оператора T найдется разбиение $\hat{S}$ оператора S такое, что на конусе $H = H_1 \times \dots \times H_m$ выполняется $\hat{S} \succ_H \hat{T}$.

Как обычно, разбиения $\hat{S},\hat{T}$ – это положительные операторы из $L^+(X^m,Y)$, превращающие в коммутативные треугольники, составленные из S,T и диагонального вложения Δ пространства X в его степень X^m, т.е. $\hat{S} \circ \Delta = S$; $\hat{T} \circ \Delta = T$.

В частности, для функционалов $\mu, \nu \geq 0$ пишут $\mu \gg_H \nu$, если для всякого m выполняется

$$H = H_1 = \dots = H_m; \quad \forall \hat{\nu}\, \exists \hat{\mu}: \hat{\mu} \succ_{H^m} \hat{\nu}.$$

Отметим некоторые следствия приведенной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть X – локально-выпуклая решетка, вложенная в K-пространство Y и $P(H,X) = P(H,Y) \cap X$. Конус H обладает свойством Решетняка-Люиса, т.е.

$$P(H,X)^* = \{\mu - \nu:\ \mu,\nu \geq 0,\ \mu \gg_H \nu\},$$

в том и только в том случае, если $\overline{P(H)} \supset P(H,X)$. Здесь $P(H)$ - наименьшая верхняя решетка, натянутая на H.

Ясно, что приведенное следствие может эффективно применяться в теории выпуклых множеств. Например,

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть S получается из шаров Минковского S_1, S_2 в R^n с помощью операций сложения, умножения на положительный скаляр, перехода к пределу в метрике Хаусдорфа и взятия выпуклой замкнутой оболочки объединения. Тогда

$$S = \bigwedge_{x \neq 0} \|x\|_{S^\circ} \left(\frac{S_1}{\|x\|_{S_1^\circ}} \vee \frac{S_2}{\|x\|_{S_2^\circ}} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Неравенство для смешанных объемов

$$V(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{n-1}, \mathfrak{Z}) \geq V(\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_{n-1}, \mathfrak{Z})$$

имеет место для любого выпуклого компакта $\mathfrak{Z}$, лежащего в плоскости H в $\mathbb{R}^n$, в том и только в том случае, если для смешанных поверхностных функций выполняется

$$\mu(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{n-1}) \gg_H \mu(\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_{n-1}).$$

Совсем иного типа

СЛЕДСТВИЕ 4. Оператор $T \in L^+(X,Y)$ является решеточным гомоморфизмом векторной решетки X в K-пространство Y в том и только в том случае, если для всякого $0 \leq T' \leq T$ найдется мультипликатор α в Y, т.е. $0 \leq \alpha y \leq y$ $(y \in Y^+)$, такой, что $T' = \alpha \circ T$.

Эти разные по форме следствия приведены для того, чтобы показать, что общий шаблон, даваемый теорией декомпозиции, предоставляет достаточно широкие и разнообразные возможности.

После этих общих замечаний остановимся на линейных задачах выпуклого анализа, возникающих в теориии Шоке. Напомним постановку этих задач.

Пусть H – конус в X, являющийся верхней решеткой и такой, что $H+X^{+}=X$. Максимальные элементы в $(L^{+}(X,\mathbb{R}),\succ_H)$ называются максимальными функционалами (соответственно максимальные элементы в множестве $(L^{+}(X,Y),\succ_H)$ – максимальными операторами). Следует, во-первых, охарактеризовать максимальные функционалы в терминах их граничного поведения (расположения ядер), во-вторых – описать случаи симплициальности H, т.е. ситуации, в которых для каждого положительного оператора существует единственный максимальный оператор, мажорирующий его в упорядоченности Шоке, иными словами, случаи единственности выметания. Обратим внимание на то, что по самой своей постановке эти задачи относятся к глобальному выпуклому анализу.

Следующая основанная на декомпозиции теорема носит принципиальный характер, показывая, что теория интегральных представлений является разделом теории K-пространств.

ТЕОРЕМА. *Граничные в смысле Шоке операторы заполняют компоненту $\mathcal{B}(Y)$ в K-пространстве регулярных операторов $L(X,Y)$.*

(Как обычно, оператор называется граничным, если его модуль в пространстве операторов является максимальным.)

Приведенная теорема показывает, что трудности, возникающие в теории Шоке, носят типичный для K-пространств характер. В частности, в связи с тем, что компоненты в пространстве форм не обязаны быть полярами, особую роль приобретает построение естественных границ, дающих аппроксимации компоненты $\mathcal{B}(Y)$. Такие границы в общем виде в работах Шоке не строятся. Теорема о компоненте делает оправданным следующий подход.

Прежде всего, вместо исходной постановки

$$H\subset X \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$$

в рассмотрение вводятся пробное K-пространство Z и оператор $T_0\in L^{+}(X,Z)$, фиксирующий вложение X в Z. Оператор $T\in L^{+}(Z,Y)$ называется T_0-максимальным, если $TT_0\in$

$\in \mathcal{L}(Y)$, т.е. рассматривается диаграмма

$$\begin{tikzcd} H \subset X \arrow[r, "TT_0"] \arrow[dr, "T_0"'] & Y \\ & Z \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

Можно видеть, что T_0-максимальные операторы T также воспроизводят компоненту в пространстве $L(Z, Y)$. При этом в Z уже возникает граница $Ch(H, T_0)$- область значений наибольшего T_0-максимального проектора в Z (проектора Шоке P_{Ch}). Подчеркнем,что подобное определение границы невозможно в рамках первоначальной постановки, связанной с функционалами. Таким образом, уже здесь без привлечения общих областей значений не обойтись.

Роль введенной границы раскрывает следующая основная теорема об анормальности, дающая граничную характеризацию ядер максимальных операторов.

ТЕОРЕМА. Сужение любого T_0-максимального оператора на дизъюнктное дополнение $Ch(H, T_0)^d$ границы Шоке анормально. При этом $Ch(H, T_0)^d$ совпадает с наименьшей компонентой, содержащей общую часть ядер всех T_0-максимальных операторов, определенных на Z.

Следует сказать, что эта теорема доказана в весьма общих предположениях. В частности, в ней даже не предполагается наличие в X структуры векторной решетки.

Для того чтобы более наглядно показать роль введенной границы,остановимся на одном специальном классе симплициальных конусов.Напомним, что конус H в X такой, что $H + X^+ = X$ и $\overline{H - H} = X$, называется симплициальным, если для каждого K-пространства Y существует единственное выметание, т.е. селектор отображения

$$T \longmapsto \{T' \in \mathcal{L}(Y) : T' \geq 0,\ T' \succ_H T\}.$$

Внутреннее описание таких конусов - вторая из задач теории Шоке. Не будем восроизводить здесь ее общее решение, а ограничимся изложением свойств наиболее интересного в приложениях класса симплексов Бауэра.

Симплициальная верхняя решетка H называется стандартным конусом или симплициальной в смысле Бауэра, если оператор Ψ_H выметания в формах слабо непрерывен - сопряжен к так называемому оператору Дирихле $\mathcal{D}_H$ стандартного конуса H.

ТЕОРЕМА. Оператор Дирихле $\mathcal{D}_H$ стандартного конуса H максимален и идемпотентен. Область его значений есть

$$\mathcal{D}_H\langle X\rangle = \bar{H}\cap(-\bar{H}).$$

При этом для любого положительного оператора T коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\mathcal{D}_H"] \arrow[dr, "\Psi_H(T)"'] & & X \\ & Y \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

Эта теорема о факторизации, описывающая строение максимальных операторов на стандартном конусе, показывает, что в известном смысле для таких конусов разрешима абстрактная задача Дирихле, поставленная на границе Шоке этого конуса. Более точно, справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть $H\subset X\subset Z$, где H - подпространство, Z - некоторое K-пространство, причем $H+Z^{+}=Z$ и $X=P(H)-P(H)$.

(I) Если H является векторной решеткой в индуцированном из Z порядке и P - проектор в Z такой, что $P\leq P_{ch}$, то $P\langle X\rangle = P\langle H\rangle$.

(2) Если $P\langle X\rangle = P\langle H\rangle$ и $Ph\leq 0 \Rightarrow h\leq 0$ для $h\in H$, то $P\leq P_{ch}$ и при этом H является векторной решеткой в порядке, индуцированном из Z.

(Здесь граница Шоке строится относительно естественного вложения X в Z.)

Таким образом, абстрактная задача Дирихле может ставиться на подмножествах границы Шоке и, более того, только на них, если желательно иметь справедливость принципа максимума для решений.

В качестве иллюстрации к этой теореме разберем один способ построения симплексов Бауэра. Прежде всего заметим, что по теореме факторизации компонента $\mathfrak{F}(R)$ монотонно дополняема в соответствующей слабой топологии. Это последнее свойство само по себе встречается достаточно часто. Так, пространство аффинных в шаре функций обладает тем свойством, что граничные в смысле Шоке меры (меры, сосредоточенные на сфере) заполняют дополняемое в нужном смысле подпространство. В то же время, конечно же, задача Дирихле в классе аффинных функций неразрешима. В работе устанавливается общая теорема о перестройке, гласящая, что при известных предположениях в случае дополняемости компоненты $\mathfrak{F}(R)$ можно естественным образом расширить исходный класс функций до H так, чтобы все параметры теории Шоке (максимальные операторы, границы и т.п.) остались прежними и в то же время H порождал бы стандартный симплекс. Для метрических компактов удается описать ситуации, допускающие достаточное множество таких перестроек, - это так называемые тройки с CE-свойством. В частности, для пространства A аффинных функций в шаре и для любой сосредоточенной на сфере вероятностной меры μ_x с барицентром x существует подпространство $H \supset A$, порождающее симплекс Бауэра с теми же граничными свойствами. При этом для непрерывной функции f на сфере решение $\mathcal{D}_H f$ задачи Дирихле в точке x дается формулой

$$\mathcal{D}_H f(x) = \int f d\mu_x .$$

В частности, такой перестройкой (одной из многих возможных) является пространство гармонических функций.

Конечно, сформулированные теоремы воспринимаются как весьма абстрактные. Отметим, что это связано исключительно с абстрактной постановкой Шоке исходных задач в далеко продвинутой теории. В то же время кажется, что приведенные результаты показывают не только внутреннюю содержательность глобальных задач выпуклого анализа, но и неразрывную связь граничной теории с теорией упорядоченных векторных пространств. Последнее обстоятельство мне хотелось подчеркнуть особо.

Перейдем к некоторым более конкретным результатам. Именно, остановимся на проблемах параметризации изопериметрических задач выпуклой геометрии.

Как известно, применение чисто геометрических методов сильно лимитирует число дополнительных ограничений, участвующих в постановке экстремальной задачи. Уже два дополнительных ограничения создают серьезные и, как правило, непреодолимые трудности для решения. В то же время с точки зрения общих методов теории экстремальных задач трудность качественного анализа от числа ограничений не зависит. Существенным моментом является параметризация задачи - выбор векторного пространства, в котором будет проводиться исследование. При этом различным параметризациям отвечают различные классы допускающих решение задач и соответственно различные критерии оптимальности. Рассматриваются две наиболее естественные параметризации для задач геометрии - структура Минковского и структура Бляшке, являющиеся в известном смысле двойственными друг к другу.

Прежде всего, классический метод параметризации Минковского, основанный на концепции пространства множеств, развивается для анализа задач, в которых присутствуют операторные связи. В частности, выписываются эффективные критерии оптимальности (уравнения Эйлера - Лагранжа) для задач, в которых присутствуют условия типа включения : "решение симметрично", "решение содержится в данной фигуре" и т.п.

Принципиально другая параметризация - структура Бляшке - позволяет применять методы функционального анализа к исследованию задач, не поддающихся технике пространства множеств. Именно, здесь для вложения изопериметрических задач в задачи программирования используются поверхностные функции (меры А.Д. Александрова). Идея такого подхода была выдвинута еще в начале века В.Бляшке, однако ее техническое оформление стало возможным совсем недавно. При этом удается существенно расширить класс линейных задач изопериметрического типа.

Поясним качественную сторону указанных двух подходов к параметризации таких задач. Пусть, как обычно, $\mathcal{K}_n/\mathbb{R}^n$ - конус выпуклых компактов, факторизованный по сдвигам, и $\mathfrak{A}_n$ - конус поверхностных функций, т.е. положительных мер на евклидовой сфере Z_n, ортогональных к следам линейных функционалов. Структура Минковского в $\mathcal{K}_n/\mathbb{R}^n$ наводится вложением с помощью двойственности Минковского в пространство $C(Z_n)/\mathbb{R}^n$, а структура Бляшке - вложением в сопряженное пространство $(C(Z_n)/\mathbb{R}^n)'$, составленное из разностей поверхностных функций.

Важнейшие соотношения указанных структур видны из табл. I.

Т а б л и ц а I

Объекты параметризации	Структура Минковского	Структура Бляшке
Конус множеств	$\mathcal{K}_n / \mathbb{R}^n$	$\mathfrak{A}_n$
Двойственный конус	$(\mathcal{K}_n / \mathbb{R}^n)^+$	$\mathfrak{A}_n^*$
Положительный конус	$\mathfrak{A}_n^*$	$\mathfrak{A}_n$
Типичный линейный функционал	$V_1(z_n, \cdot)$ - ширина	$V_1(\cdot, z_n)$ - площадь
Вогнутый функционал	$V^{1/n}(\cdot)$	$V^{(n-1)/n}(\cdot)$
Простейшая выпуклая программа	задача Урысона	изопериметрическая задача
Ограничение операторного типа	$\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_0$	$\mu(\mathfrak{X}) \le \mu(\mathfrak{X}_0)$
Цена	поверхность	положительная функция
Дифференциал объема $V(\cdot)$ в точке $\bar{\mathfrak{X}}$ пропорционален	$f \longmapsto \int_{Z_n} f\, d\bar{\mathfrak{X}}$	$\mu \longmapsto \int_{Z_n} \bar{\mathfrak{X}}\, d\mu$

Из этой таблицы следует, что в структуре Бляшке уравнение Эйлера - Лагранжа для классической изопериметрической задачи имеет вид

$$\bar{\mathfrak{X}} = \bar{\alpha} \cdot \text{шар}.$$

Тем самым очевидно, что решение задачи

$$V_1(\mathfrak{X}, y_k) \le b_k \quad (k = 1, \ldots, m), \quad V(\mathfrak{X}) \longrightarrow \sup$$

имеет следующий вид:

$$\bar{\mathfrak{X}} = \sum_{k=1}^{m} \bar{\alpha}_k\, y_k .$$

Найдены способ учета различных ограничений, связанных с этой таблицей, и соответствующие конкретные примеры. Отметим, что суть полученного здесь состоит в указании тех задач геометрии со многими ограничениями, решения которых выписываются в явном виде.

Стоит подчеркнуть, что при анализе конкретных проблем представляется целесообразным комбинировать предлагаемый подход, основанный на общих функционально-аналитических методах, с классическими соображениями, например с методом симметризаций. Так, задача максимизации объема при заданных интегральной ширине и толщине Δ, как видно из табл. I, не является выпуклой в рассматриваемых структурах. Тем не менее однократное применение симметризации Минковского показывает, что решение лежит в классе центрально-симметричных фигур и, значит, оптимальность фигуры обеспечивается совместностью системы (для некоторого $z_0 \in Z_n$)

$$\bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_n) + \bar{\beta}(\varepsilon_{z_0} + \varepsilon_{-z_0}) \gg_{R^n} \mu(\bar{\mathfrak{X}}) + \mu;$$

$$V(\bar{\mathfrak{X}}) + 1/n \int_{Z_n} x\,d\mu = \bar{\alpha} V_1(\mathfrak{z}_n, \bar{x}) + 1/n\,\bar{\beta}(\bar{x}(z_0) + \bar{x}(-z_0));$$

$$\bar{x}(z) = 1/2\,\Delta \qquad (z \in supp(\mu)).$$

Таким образом, поверхность вида $\bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_n) + \bar{\beta}(\varepsilon_{z_0} + \varepsilon_{-z_0})$ имеет наибольший объем среди всех тел с теми же интегральной шириной и толщиной. При $n = 3$ получаем так называемую сырообразную поверхность вращения постоянной кривизны.

Остановимся, наконец, на приложениях к проблемам локального выпуклого анализа.

Пусть $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ - выпуклый оператор, действующий из векторного пространства X в K-пространство Y с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$ и

$$dom(F) = \{x \in X : Fx < +\infty\}$$

- эффективное множество оператора F. Для точки $\bar{x} \in dom(F)$ субдифференциалом оператора F в этой точке называется множество

$$\partial_{\bar{x}}(F) = \{A \in L(X, Y) : Ax - A\bar{x} \leq Fx - F\bar{x} \ (x \in X)\}.$$

Кроме того, каждому линейному оператору $A \in L(X, Y)$ отвечает элемент

$$F^*A = \sup_{x \in dom(F)} (Ax - Fx).$$

Тем самым возникает преобразование Юнга F^* оператора F.

В табл. 2 представлены результаты по вычислению субдифференциалов и преобразований Юнга.

Таблица 2

Оператор	Субдифференциал		Преобразование Юнга	
$F_1, F_2 : X \to Y \cup \{+\infty\}$ $F_1 + F_2$	$Y = \mathbb{R}$ Хан - Банах; Моро - Рокафеллар	Канторович; Левин; Фельдман	$Y = \mathbb{R}$ Моро	
$F_1, F_2 : X \to Y \cup \{+\infty\}$ $A \in L^+(Y, Z)$ $A \circ (F_1 \vee F_2)$	$Z = Y = \mathbb{R}$ Дубовицкий - Милютин; принцип Лагранжа для решений		$Z = Y = \mathbb{R}$ Иоффе - Тихомиров; принцип Лагранжа для значений	
$F : X \to Y \cup \{+\infty\}$ $A \in L^+(Y, Z)$ $A \circ F$	$Z = \mathbb{R}, Y \in (A)$ Левин			
$F : X \to Y \cup \{+\infty\}$ $G : Y \to Z \cup \{+\infty\}$ $G \circ F$	$Z = \mathbb{R}$ Гольштейн; критерий оптимальности Парето			

Пустые клетки, относящиеся к общему случаю, заполнены в последнее время. Отметим здесь же, что ситуацию в локальном анализе следовало бы изобразить по меньшей мере "трехмерной" таблицей - существенное для приложений значение имеют условия, при которых выводятся соответствующие правила. Не вдаваясь в детали, подчеркнем, что степень заполненности таблицы по третьему измерению в общем случае не меньшая, чем для скалярных функций.

Вряд ли имеет смысл выписывать все формулы. Приведем только одну наиболее идейную и новую даже в скалярном случае формулу для вычисления субдифференциала суперпозиции с о-непрерывным возрастающим оператором G :

$$\partial_{\bar{x}}(G \circ F) = \{A \circ [\partial_{\bar{x}}(F)] : A \circ \Delta_{\partial_{\bar{x}}(F)} \in \partial_{F\bar{x}}(G); A \in L^{+}((Y^{\partial_{\bar{x}}(F)})_{\infty}, Z)\}.$$

Здесь $\bar{x}$ - внутренняя точка в $dom(F)$, точка $F\bar{x}$ - внутренняя в $dom(G)$. Оператор $[\mathfrak{A}]$ для слабо порядково ограниченного множества $\mathfrak{A}$ в $L(X,Y)$ действует из X в пространство $(Y^{\mathfrak{A}})_{\infty}$ ограниченных по порядку Y-значных функций на $\mathfrak{A}$ по формуле $[\mathfrak{A}]x = (Ax)_{A \in \mathfrak{A}}$. Оператор $\Delta_{\mathfrak{A}}$ осуществляет естественное отождествление пространства Y с подпространством констант в $(Y^{\mathfrak{A}})_{\infty}$. Как видно по структуре приведенной формулы, она тесно связана с декомпозицией. Подчеркнем, что способ получения формул является новым даже для скалярных функций. Этот тесно связанный с теорией Шоке способ основан, неформально говоря, на том, что в силу двойственности Минковского существует лишь один существенно нелинейный выпуклый оператор - оператор верхней грани, на необходимость анализа которого, как недавно стало известно автору, указывал еще А.Лебег.

Отметим, что сегодняшний уровень заполнения табл. 2 позволяет говорить об известном завершении проблематики локального выпуклого анализа.

В заключение можно сделать следующий вывод. Представленные результаты, базирующиеся на едином подходе, свидетельствуют о плодотворности и эффективности развития выпуклого анализа на основе теории упорядоченных векторных пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. - "Успехи мат. наук", 1972, т.27, № 3, с. 127-176.
2. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Границы Шоке в K-пространствах.-"Успехи мат. наук", 1975, т. 30, № 4, с. 107-146.
3. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск, "Наука", 1976.
4. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Формулы для вычисления субдифференциалов.- "ДАН СССР", 1977, т. 232, № 4, с.770-772.
5. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Замены переменных в преобразовании Юнга. - "ДАН СССР", 1977, т.233, № 6, с.1039-1041.

6. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск, "Наука", 1978.

Поступила в ред.-изд. отдел
8.УI.1978.