Выпуск 22 (39) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.8:517.51

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И МНОЖЕСТВА

Е.М. Бронштейн

Пусть K - выпуклое множество в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Через $\mathcal{F}(K)$ обозначим множество выпуклых замкнутых ограниченных функций, определенных на K. Всюду полагаем $n \geq 2$. В [I] доказано, что если K - область, то объединение крайних лучей множества $\mathcal{F}(K)$ с естественной структурой выпуклого конуса плотно в $\mathcal{F}(K)$ в топологии равномерной сходимости на компактах.

Цель статьи - наделить $\mathcal{F}(K)$, где K - симплекс, такой структурой выпуклого конуса,что объединение крайних лучей конуса $\mathcal{F}(K)$ образует достаточно бедное множество. Для этого сложение в $\mathcal{F}(K)$ вводится как аналог сложения Бляшке выпуклых множеств. Предварительно множеству $\mathcal{F}(K)$ сопоставляется взаимно-однозначно некоторое множество $\mathcal{U}(K)$ неограниченных выпуклых тел, замкнутое относительно сложения типа Бляшке.

Объединение экстремальных лучей выпуклого конуса $\mathcal{K}$ будем обозначать через $extr\,\mathcal{K}$.

§ I. Множество $\mathcal{U}(K)$ и структура конуса в $\mathcal{F}(K)$

Здесь считаем, что K - n-мерный выпуклый компакт. Пусть компакт K расположен в E^{n+1} таким образом, что точка $(0,\dots,0,I)$ - центр тяжести K и $K \subset \{x : x_{n+1} = 1\}$. Обозначим через T выпуклый конус с вершиной в начале координат пространства E^{n+1}, основанием которого является компакт K. Конус T имеет внутренние точки в E^{n+1}.

Всякую функцию $f \in \mathcal{F}(K)$ можно продолжить до положительно однородной выпуклой замкнутой функции $\bar{f}$, определенной на всем пространстве E^{n+1}, распространив ее естественным образом на конус T и положив $\bar{f}(x) = +\infty$ при $x \notin T$. Функция $\bar{f}$ является опорной для некоторого замкнутого выпуклого множества $B(f)$ [2].

Множество $B(f)$ имеет рецессивный конус $T^{\perp}$, образованный пересечением полупространств $(x, b) \leq 0$, $b \in T$. Опорная функция множества $B(f)$, ограничена на множестве $\partial T \cap S^n$, где S^n – сфера в E^{n+1} радиуса I с центром в начале координат. Обратно: всякому замкнутому выпуклому множеству в E^{n+1}, имеющему рецессивный конус $T^{\perp}$ и такому, что сужение его опорной функции на $\partial T \cap S^n$ ограничено, соответствует некоторая функция из $\mathcal{F}(K)$. Совокупность всех множеств вида $B(f)$, $f \in \mathcal{F}(K)$, обозначим через $\mathcal{U}(K)$.

Так как линейные функции и только они являются опорными функциями точек и сложение множеств по Минковскому приводит к поточечному сложению их опорных функций, то множества $B(f)$ и $B(g)$ совмещаются параллельными переносами, если и только если функция $f - g$ аффинная.

Всякому борелевскому подмножеству ω выпуклой на сфере области $G = S^n \cap \operatorname{Int} T$ соответствует некоторое борелевское подмножество границы тела из $\mathcal{U}(K)$, состоящее из точек, внешние нормали к телу в которых направлены в ω. Мера этого подмножества границы есть σ-аддитивная неотрицательная борелевская функция множества на G, конечная на замкнутых множествах, – поверхностная функция А.Д.Александрова [3].

Сопоставим каждому телу $B \in \mathcal{U}(K)$ два объекта: h_B – сужение опорной функции тела B на $\partial G = S^n \cap \partial T$ и F_B – поверхностную функцию, определенную в данном случае на борелевском σ-кольце множества G. Так как область G содержится в открытой полусфере сферы S^n, справедлива следующая

ТЕОРЕМА А (А.Д.Александров). Если функция h служит сужением на ∂G опорной функции какого-либо выпуклого тела и F – неотрицательная борелевская мера на G, конечная на замкнутых подмножествах, то существует единственное выпуклое замкнутое множество B с рецессивным конусом $T^{\perp}$, для которого $F_B = F$; $h_B = h$.

Заметим, что если функция h ограничена, то это множество является элементом $\mathcal{U}(K)$.

Определим для множеств из $\mathcal{U}(K)$ сложение, являющееся модификацией операции Бляшке. Пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{U}(K)$. Суммой Бляшке назовем такое тело $B = B_1 \# B_2$, у которого $h_B = h_{B_1} + h_{B_2}$; $F_B = F_{B_1} + F_{B_2}$. Такое тело по теореме А существует, так как опорная функция суммы Минковского выпуклых тел равна сумме их опорных функций. Определим также умножение тел из $\mathcal{U}(K)$ на неотрицательные действительные числа $\lambda \circ B$ следующим образом: $h_{\lambda \circ B} = \lambda \cdot h_B$; $F_{\lambda \circ B} = \lambda \cdot F_B$. Так определенное умножение, вообще говоря, отлично от обычного, так как $F_{\lambda \cdot B} = \lambda^n \cdot F_B$. Легко проверяется следующая

ЛЕММА I. Множество $\mathcal{U}(K)$ с введенными операциями является выпуклым конусом.

Перенесем теперь эту структуру выпуклого конуса с $\mathcal{U}(K)$ на $\mathcal{F}(K)$, воспользовавшись установленным между этими множествами взаимно-однозначным соответствием. Операции в $\mathcal{F}(K)$ обозначим теми же символами. Очевидно, что $(\lambda \circ f)(x) = \lambda \cdot f(x)$, $(f \# g)(x) = f(x) + g(x)$ при $x \in \partial K$.

Впредь символами $\mathcal{F}(K)$ и $\mathcal{U}(K)$ будем обозначать множества с введенной структурой выпуклых конусов. Легко устанавливается

ЛЕММА 2. Если $f \in \mathcal{F}(K)$, a - функция, аффинная на K, то $(f \# a)(x) = f(x) + a(x)$.

§ 2. Экстремальная структура конусов $\mathcal{U}(K)$ и $\mathcal{F}(K)$

Пусть $\mathcal{K}$ - выпуклый конус и $\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{K} : \exists y \in \mathcal{K}, x + y = 0\}$ - максимальное подпространство конуса $\mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$, у которого $\mathcal{L} = \{0\}$, называется собственным. Точка $x \in \operatorname{extr} \mathcal{K}$, если из соотношения $x = y + z \; (y, z \in \mathcal{K})$ следует, что $y = \lambda \cdot x + l$, где $\lambda \in [0,1]$; $l \in \mathcal{L}$; $+$ и $\cdot$ - операции в $\mathcal{K}$.

Рассмотрим теперь два выпуклых конуса $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ с максимальными подпространствами $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

ЛЕММА 3. $\operatorname{extr}(\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2)=\operatorname{extr}\mathcal{K}_1\times\mathcal{L}_2\cup\mathcal{L}_1\times\operatorname{extr}\mathcal{K}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x=(x_1,x_2)\in\operatorname{extr}(\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2)$. Если $x=y+z$, то $y=\lambda\cdot x+l$, где $l\in\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2$, так как $\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2$ – максимальное подпространство, содержащееся в $\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2$. Пусть $y=(x_1/2,x_2/3)$, $z=(x_1/2,2x_2/3)$; $y+z=x$, откуда $y=\lambda\cdot x+l$, т.е. $x_1\cdot(1/2-\lambda)\in\mathcal{L}_1, x_2\cdot(1/3-\lambda)\in\mathcal{L}_2$. Так как λ отлично хотя бы от одного из чисел I/2, I/3, то выполняется хотя бы одно из соотношений: $x_1\in\mathcal{L}_1$, $x_2\in\mathcal{L}_2$.

Пусть, например, $x_2\in\mathcal{L}_2$. Если $x_1=y_1+z_1\ (y_1,z_1\in\mathcal{K}_1)$, то $(x_1,x_2)=(y_1,x_2/2)+(z_1,x_2/2)$. Отсюда (так как $x\in\operatorname{extr}(\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2)$) $y_1=\lambda\cdot x_1+l_1\ (l_1\in\mathcal{L}_1)$, т.е. $x_1\in\operatorname{extr}\mathcal{K}_1$. Таким образом, $\operatorname{extr}(\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2)\subset\operatorname{extr}\mathcal{K}_1\times\mathcal{L}_2\cup\mathcal{L}_1\times\operatorname{extr}\mathcal{K}_2$.

Допустим, что $x_1\in\operatorname{extr}\mathcal{K}_1, x_2\in\mathcal{L}_2, (x_1,x_2)=(y_1,y_2)+(z_1,z_2)$. Надо доказать, что $(x_1,x_2)\in\operatorname{extr}(\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2)$. Легко убедиться, что $y_2,z_2\in\mathcal{L}_2$. Так как $y_1=\lambda\cdot x_2+l_1$, где $\lambda\in[0,1]$, $l_1\in\mathcal{L}_1$, то $(y_1,y_2)=\lambda\cdot(x_1,x_2)+(l_1,s)$, где $s=y_2-\lambda\cdot x_2\in\mathcal{L}_2$. (В подпространстве $\mathcal{L}\subset\mathcal{K}$ определено вычитание.) Тем самым $\operatorname{extr}\mathcal{K}_1\times\mathcal{L}_2\cup\mathcal{L}_1\times\operatorname{extr}\mathcal{K}_2\subset\operatorname{extr}(\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2)$, и лемма 3 доказана.

Перейдем к изучению конусов $\mathcal{U}(K)$ и $\mathcal{F}(K)$, где K – симплекс в E^n. Применяя общие определения, получаем, что если из $B=B_1\#B_2\ (B_1,B_2\in\mathcal{U}(K))$ следует, что B_1 и B_2 – трансляты тел $\lambda_1\circ B$ и $\lambda_2\circ B$, где λ_1,λ_2 – неотрицательные скаляры, то $B\in\operatorname{extr}\mathcal{U}(K)$. Аналогично, если из $f=g\#h\ (g,h\in\mathcal{F}(K))$ следует, что $g=\lambda_1\circ f\#a_1, h=\lambda_2\circ f\#a_2$, где λ_1,λ_2 – неотрицательные скаляры, a_1,a_2 – аффинные функции, то имеем $f\in\operatorname{extr}(\mathcal{F}(K))$. По лемме 2 в последних равенствах можно брать поточечную сумму.

Обозначим через $\mathcal{H}(\partial G)$ выпуклый конус ограниченных функций, определенных на ∂G и являющихся сужением опорных функций выпуклых множеств из $\mathcal{U}(K)$ с поточечными операциями, а через $\mathcal{F}(\partial K)$ – выпуклый конус сужений на ∂K выпуклых на K функций с поточечными операциями. Ясно, что конусы $\mathcal{H}(\partial G)$ и $\mathcal{F}(\partial G)$ изоморфны. Очевидно следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Конус $\mathcal{F}(\partial K)$ состоит из функций, непрерывных на ∂K и таких, сужения которых на каждую $(n-1)$-мерную грань симплекса K – функции выпуклые. Максимальное под-*

пространство, содержащееся в $\mathcal{F}(\partial K)$, состоит из сужений на ∂K аффинных функций.

Из леммы 4 следует, что максимальное подпространство, содержащееся в $\mathcal{H}(\partial G)$, состоит из сужений на ∂G линейных функций.

Рассмотрим теперь конус $\Phi(G)$ неотрицательных борелевских мер, определенных на G и конечных на замкнутых подмножествах G. Конус $\Phi(G)$ собственный.

ЛЕММА 5. Множество $\mathrm{extr}\, \Phi(G)$ состоит из мер с одноточечным носителем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть мера F имеет одноточечный носитель и $F = F_1 + F_2$, где $F_1, F_2 \in \Phi(G)$. Так как меры неотрицательные, то $\mathrm{supp}\, F_1 \subset \mathrm{supp}\, F$, т.е. носитель меры F_1 либо совпадает с носителем F, либо пуст. В любом случае $F_1 = \lambda \cdot F$, где $\lambda \in [0, 1]$.

Пусть носитель меры F содержит по крайней мере две точки x_1 и x_2. Возьмем непересекающиеся окрестности этих точек ω_1 и ω_2 такие, что $\bar{\omega}_i \subset G \, (i = 1, 2)$. Определим на G меры F_1 и F_2 следующим образом:

$$F_1(\omega) = F(\omega)/2 - F(\omega \cap \omega_2)/3; \quad F_2(\omega) = F(\omega)/2 + F(\omega \cap \omega_2)/3.$$

Здесь ω – произвольное борелевское подмножество G; $F = F_1 + F_2$; $F_1, F_2 \in \Phi(G)$; $F_1(\omega_1) = F(\omega_1)/2$; $F_1(\omega_2) = F(\omega_2)/6$. Так как $F(\omega_1) > 0$, $F(\omega_2) > 0$, то $F \notin \mathrm{extr}\, \Phi(G)$. Лемма 5 доказана.

Поскольку, по определению, конус $\mathcal{U}(K)$ изоморфен конусу $\mathcal{H}(\partial G) \times \Phi(G)$, то из лемм 3–5 получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА I. $B \in \mathrm{extr}\, \mathcal{U}(K)$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) $F_B = 0$, $h_B \in \mathrm{extr}\, \mathcal{H}(\partial G)$;

б) h_B – сужение на ∂G линейной функции, мера F_B имеет одноточечный носитель.

Тела, удовлетворяющие условию а), образованы пересечением полупространств, внешние нормали к которым направлены на ∂G, т.е. они H-выпуклые в смысле В.Г.Болтянского [5] при $H = \partial G$. Тела, удовлетворяющие условию б), образованы пересечением транслятов конуса $T^{\perp}$ с полупространствами, внешние нормали к которым направлены в G.

Подмножество $\mathcal{P}\subset\mathcal{U}(K)$, состоящее из тел, удовлетворяющих условию а), взаимно-однозначно соответствует множеству $ext\,\mathcal{H}(\partial G)$, причем умножение на неотрицательные скаляры в одном из этих множеств переходит в ту же операцию в другом.

Всякому телу, удовлетворяющему условию б), можно сопоставить вектор из $E^{2(n+1)}$ вида $(b, F_B(G)\cdot supp\,F_B)$, где вектор $b\in E^{n+1}$ таков, что h_B – сужение функции (x,b). Тем самым конус $\mathcal{M}\subset\mathcal{U}(K)$, элементами которого являются тела, удовлетворяющие условию б), изоморфен конусу $E^{n+1}\times T\subset E^{2(n+1)}$.

$\mathcal{P}$ и $\mathcal{M}$ пересекаются по подпространству размерности $n+1$, содержащему тела вида $\{T^{\perp}+b : b\in E^{n+1}\}$.

Теорема I утверждает, что $ext\,\mathcal{U}(K)=\mathcal{P}\cup\mathcal{M}$. Оказывается, что это соответствие есть гомеоморфизм при наделении множеств естественными топологиями.

ТЕОРЕМА 2. Наделим конус $\mathcal{U}(K)$ метрикой Хаусдорфа ρ, конус $\mathcal{H}(\partial G)$ – метрикой C, а $\mathcal{M}$ – стандартной конечномерной топологией. Тогда указанное соответствие – гомеоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку все конусы метрические, рассуждать будем секвенциально. Пусть $\rho(B_n, B)\to 0$ при $n\to\infty$, где $B_n, B\in ext\,\mathcal{U}(K)$. Так как $\|h_{B_n}-h_B\|_C\le\rho(B_n,B)$ [6], то последовательность $\{h_{B_n}\}$ равномерно сходится к h_B.

Рассмотрим случаи, которые могут быть по теореме I.

I. Функция h_B не является сужением линейной.

2. Функция h_B является сужением линейной.

В первом случае при достаточно больших n функции h_{B_n} также не являются сужением линейных и поэтому $F_{B_n}=F_B=0$ при таких n.

Второй случай разобьем на два.

2а. Существует подпоследовательность последовательности $\{h_{B_n}\}$, каждый член которой не является сужением линейной функции.

2б. Такой последовательности нет.

В случае 2а проверяем равенство $F_B=0$. Рассмотрим тело B_0, полученное пересечением полупространств $\{(x,a)\le h_B(a):$

$a\in\partial G\}$. При достаточно больших n эти полупространства равномерно близки к полупространствам $(x,a)\le h_{B_n}(a)$, так как $\|h_{B_n}-h_B\|_C\to 0$. По теореме I $F_{B_n}=0$, т.е. тело B_n H-выпуклое при $H=\partial G$. Так как в конусе T плоские углы ограничены сверху числом, меньшим π, то $\rho(B_n,B_0)\to 0$; поскольку хаусдорфов предел выпуклых замкнутых множеств единствен, то $B=B_0$, а $F_{B_0}=0$.

Случай 2б. Функции h_{B_n} и h_B являются сужениями на ∂G линейных функций. Сдвигая тела B_n и B соответственно на векторы b_n и b такие, что $|b_n-b|\to 0$, добьемся того, что $h_{B_n}\equiv h_B\equiv 0$. Ясно, что для сдвинутых тел (которые будем обозначать так же) $\rho(B_n,B)\to 0$. Тела B_n и B получены отсечением от конуса $T^{\perp}$ вершин некоторыми гиперплоскостями, т.е. граница каждого из тел B, B_n состоит из части конической многогранной поверхности и гиперплоской конечной грани. Если $\rho(B_n,B)<\varepsilon$, то гиперплоские конечные грани тел B и B_n также ε-близки. Отсюда и из того, что конус $T^{\perp}$ расположен в круговом конусе с углом раствора $\alpha<\pi$, следует, что внешние нормали к конечным граням и меры граней близки, т.е. $|F_{B_n}(G)\operatorname{supp}F_{B_n}-F_B(G)\cdot\operatorname{supp}F_B|\to 0$. Напомним, что носители мер F_B, F_{B_n} одноточечные.

Докажем непрерывность обратного отображения. Пусть пары $(h_n,F_n),(h,F)$ соответствуют телам $B_n, B\in\operatorname{ext}\mathcal{U}(K)$, причем $\|h_n-h\|_C\to 0, |F_n(G)\operatorname{supp}F_n-F(G)\operatorname{supp}F|\longrightarrow 0$. Рассмотрим следующие случаи:

I. Существует подпоследовательность последовательности $\{h_n\}$, каждый член которой не является сужением линейной функции.

2.Все функции h_n при достаточно больших n - сужения линейных.

2а. $F=0$.

2б. $F\ne 0$.

В случае I для соответствующей подпоследовательности $F_n=0$, а потому и $F=0$. Следовательно, тела B_n и B получены пересечением равномерно близких полупространств, внешние нормали к которым направлены в ∂G. Аналогично предыдущему, тела B_n и B близки в метрике Хаусдорфа.

В случае 2 тела B_n и B получены отсечением некоторыми гиперплоскостями вершин от конгруэнтных близких конусов; как и раньше, можно считать, что все конусы совпадают с $T^{\perp}$, т.е. $h_n \equiv 0$.

2а. В этом случае $F_n(G) \to 0$. Обозначим через φ функцию, определенную на G, значение которой в точке a равно мере сечения конуса $T^{\perp}$ гиперплоскостью $(x,a)=-1$. Докажем, что $\inf\limits_{a\in G} \varphi(a)>0$. Рассмотрим точку $p(c)$ с координатами $(0,\dots,0,c)$, где $c<0$. Точка $p(c)\in T^{\perp}$. Построим шар наибольшего радиуса с центром в точке $p(c)$, лежащий в $T^{\perp}$. Так как $T^{\perp}$ – конус, то построенные шары при различных c гомотетичны с центром в вершине конуса, т.е. в начале координат. Рассмотрим гиперплоскость $(x,a)=-1 (a\in G)$. Так как между векторами a и $(0,\dots,0,-1)$ угол тупой, то $p(c)\in \in\{x:(x,a)=-1\}$ при некотором c. Поскольку число c не меньше, чем расстояние от гиперплоскости $(x,a)=-1$ до 0, то $c\geq 1$. Следовательно, в пересечении этой гиперплоскости с конусом $T^{\perp}$ лежит шар достаточно большого радиуса. Отсюда $\inf \varphi(a)>0$. Так как мера сечения конуса $T^{\perp}$ гиперплоскостью $(x,a)=c<0$ равна $|c|^n\cdot\varphi(a)$, то из $F_n(G)\to 0$ следует, что расстояния от начала координат до гиперплоскостей, отсекающих вершины конуса $T^{\perp}$ от тел B_n, стремятся к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\rho(B_n, B)\to 0$.

2б. Отсечение вершин при образовании тел B_n и B осуществляется гиперплоскостями, близкими по направлению, причем меры гиперплоских конечных граней тел B_n и B также близки. Из непрерывности функции φ следует, что расстояния от начала координат до гиперплоскостей, отсекающих вершины конуса $T^{\perp}$ от тел B_n и B, близки. Отсюда $\rho(B_n, B)\to 0$. Теорема 2 доказана.

Очевидно, что для конуса $\mathcal{F}(K)$ справедлива

ТЕОРЕМА $2'$. Пусть конусы $\mathcal{F}(K)$ и $\mathcal{F}(\partial K)$ наделены метрикой C. Множество $\operatorname{extr}\mathcal{F}(K)$ гомеоморфно множеству $\mathcal{P}\cup\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ можно отождествить с конусом $E^{n+1}\times T\subset E^{2(n+1)}$.

Из теорем 2 и $2'$ видно, что множества $\operatorname{extr}\mathcal{U}(K)$ и $\operatorname{extr}\mathcal{F}(K)$ не являются плотными подмножествами конусов в соответствующих топологиях. Тем не менее эти множества достаточно обширны, как показывает следующее утверждение.

ЛЕММА 6. Пусть x_1 - вершина симплекса K, K_1 - $(n+1)$-мерная грань K, не содержащая x_1. Пусть функция $f \in \mathcal{F}(\partial K)$ такова, что сужение f на K_1 принадлежит экстремальному лучу соответствующего конуса с поточечными операциями, а на остальные грани функция f продолжена как аффинная на каждом отрезке $[x_1, y]$, где $y \in \partial K_1$. Тогда $f \in \operatorname{exr} \mathcal{F}(\partial K)$.

Доказательство просто и здесь опускается.

По теореме 2.I из [I], множество $\operatorname{exr} \mathcal{F}(K_1)$ плотно в $\mathcal{F}(K_1)$, в топологии равномерной сходимости на внутренних компактах при $n > 2$. Напомним, что здесь множество $\mathcal{F}(K_1)$ наделено поточечными операциями. Однако при $n = 2$ (т.е. когда K - треугольник) экстремальные лучи конуса $\mathcal{F}(\partial K)$ допускают исчерпывающее описание.

§ 3. K - треугольник

Пусть S_1, S_2, S_3 - стороны треугольника K. Обозначим через $\mathcal{F}'(S_i)$ множество функций из $\mathcal{F}(\partial K)$, сужения которых на две стороны K', отличные от S_i, аффинные. Все рассматриваемые функциональные конусы наделим метрикой C.

ЛЕММА 7. $\operatorname{exr} \mathcal{F}(\partial K) = \bigcup_{i=1} \operatorname{exr} \mathcal{F}'(S_i)$.

Заметим, что три объединяемых множества имеют общее трехмерное подпространство, состоящее из функций, аффинных на каждой стороне треугольника K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \operatorname{exr} \mathcal{F}(\partial K)$. Прибавляя подходящую аффинную функцию, можно добиться того, чтобы в вершинах треугольника K функция f равнялась нулю. Проверим, что функция f равна нулю на двух сторонах K.

Пусть, напротив, функция f отлична от нуля на двух сторонах K, например S_1 и S_2. Определим две функции $g, h \in \mathcal{F}(\partial K)$ так:

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/2 & \text{при } x \notin S_1, \\ f(x)/3 & \text{при } x \in S_1, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} f(x)/2 & \text{при } x \notin S_1, \\ 2f(x)/3 & \text{при } x \in S_1. \end{cases}$$

Так как $f=g+h$ и $f\in \operatorname{ext} \mathcal{F}(\partial K)$, должно быть $g=\lambda\cdot f+a$, где a - сужение на ∂K функции, аффинной на K. Так как функция a может быть только нулевой, ясно, что такого λ нет.

Таким образом, $f=0$ на двух сторонах K ; ясно, что сужение f на третью сторону лежит на экстремальном луче соответствующего конуса, т.е. $f\in \operatorname{ext} \mathcal{F}(S_i)$.

Обратное включение следует из леммы 6. Лемма 7 доказана.

Экстремальные функции конуса $\mathcal{F}(S_i)$ представляют собой максимум двух аффинных [7]. Отсюда ясно, что множество $\operatorname{ext} \mathcal{F}(S_i)$ гомеоморфно прямому произведению двумерного конуса $\{(x_1, x_2): x_1\geq 0, |x_2|<x_1\}\cup\{(0,0)\}$ на пространство E^3, соответствующее сужениям на ∂K аффинных на K функций. Из теорем 2 и 2$'$ следует

ТЕОРЕМА 3. Если K - треугольник, то множества $\operatorname{ext} \mathcal{F}(K)$ и $\operatorname{ext} \mathcal{U}(K)$ гомеоморфны объединению трех пятимерных и одного шестимерного конусов с общим трехмерным подпространством.

Хотя объединения экстремальных лучей конусов $\mathcal{F}(K)$ и $\mathcal{U}(K)$ конечномерны, в них справедливы теоремы о представлении.

ТЕОРЕМА 4. Если K - треугольник, то конусы $\mathcal{F}(K)$ и $\mathcal{U}(K)$ в соответствующих метриках являются замкнутыми выпуклыми оболочками своих крайних лучей.

Эта теорема является простым следствием следующего утверждения.

ЛЕММА 8. Если K - треугольник, то любое множество из $\mathcal{U}(K)$ можно с произвольной точностью в метрике Хаусдорфа приблизить многогранником из $\mathcal{U}(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конус T, а следовательно, и конус $T^{\perp}$ многогранные. Пусть $B\in \mathcal{U}(K)$. Обозначим через $\mathcal{X}_t, \mathcal{X}_t^+, \mathcal{X}_t^-$ $(t>0)$ соответственно плоскость $x_3=-t$ и полупространства $x_3\leq -t$, $x_3\geq -t$. Множества $\mathcal{X}_t\cap B$ при достаточно больших t непусты, так как полуось $x_1=x_2=0, x_3\le 0$ лежит в конусе $T^{\perp}$, и ограничены, так как ни один вектор, перпендикулярный оси x_3, не лежит в конусе $T^{\perp}$[2]. В дальнейшем считаем, что t уже удовлетворяет этому условию.

Пусть h_t – сужение опорной функции плоской фигуры $\mathcal{T}_t \cap B$ на ∂G. Обозначим через $co(M,V)$, где M – ограниченное множество, V – выпуклый конус, наименьшее выпуклое множество, содержащее M и имеющее рецессивный конус V. Сужение на ∂G опорной функции тела $co(\mathcal{T}_t \cap B, T^{\perp})$ совпадает с h_t. Поскольку

$$B_t = co(\mathcal{T}_t \cap B, T^{\perp}) \subset B \cap \mathcal{T}_t^{+}, \qquad (\mathrm{I})$$

то последовательность $\{h_n\}: n=k, k+1,\ldots$ монотонно возрастает, оставаясь меньше h_B. Так как, кроме того, $h_n(a) \to h_B(a)$ $\forall a \in \partial G$ и все функции непрерывны, то по теореме Дини последовательность $\{h_B\}$ равномерно сходится к h_B на компакте ∂G.

Докажем, что $\rho(B_t, B\cap\mathcal{T}_t^{+}) = \|h_t - h_B\|_C$. То, что правая часть меньше левой, уже отмечалось при доказательстве теоремы 2. Проверим обратное неравенство. Обозначим через $\psi(t')$ число $\sup\inf|x-y|$, где нижняя грань берется по $y\in B_t$, а верхняя – по $x\in B\cap\mathcal{T}_{t'}$. Из (I) и определения расстояния Хаусдорфа $\rho(B_t, B\cap\mathcal{T}_t^{+}) = \sup\limits_{t'\ge t}\psi(t')$. Проверим неравенство $\psi(t')\le$ $\le\|h_t-h_B\|_C$ $\forall t'\ge t$. Из компактности множества $B\cap\mathcal{T}_{t'}$ следует, что существуют точки $x'\in B\cap\mathcal{T}_{t'}$ и $y'\in B_t$, удовлетворяющие равенству $\psi(t')=|x'-y'|$. Так как в точке y' реализуется нижняя грань, то отрезок $[x', y']$ перпендикулярен некоторой опорной плоскости P_1 тела B_t, проходящей через точку y'. Поскольку углы между полуосью $x_1=x_2=0, x_3\le 0$ и образующими конуса $T^{\perp}$ не превосходят $\alpha<\pi/2$, то $y_3'<-t'$. Отсюда следует, что внешняя нормаль a к плоскости P_1 направлена в ∂G, так как тело B_t образовано пересечением полупространств, внешние нормали к которым направлены в ∂G, и полупространства $\mathcal{T}_{t'}^{+}$. Поскольку в точке x' достигается верхняя грань, то плоскость $P_2 \parallel P_1$, проходящая через точку x', является опорной к фигуре $B\cap\mathcal{T}_{t'}$. Поэтому $\psi(t')=$ $=|x'-y'|=h_{t'}(a)-h_t(a)\le h_B(a)-h_t(a)\le\|h_B-h_t\|_C$, так как $a\in\partial G$ и $h_B\ge h_{t'}\ge h_t$.

Зафиксируем достаточно большое t, для которого $\|h_t-h_B\|_C\le$

$\le \varepsilon/2$. Выберем конечную $\varepsilon/2$-сеть X множества $B \cap \Pi_t^-$, содержащую X_1-конечную $\varepsilon/2$-сеть сечения $B \cap \Pi_t$, и построим множество $M = co(X, T^\perp)$, M - многогранник [4]. Докажем, что $\rho(M, B) \le \varepsilon$. Так как $X \subset B$, то $M \subset B$. По построению X,

$$\rho(B \cap \Pi_t^-, M \cap \Pi_t^-) \le \varepsilon/2. \qquad (2)$$

Обозначим через M_1 множество $co(X_1, T^\perp)$. Используя простые неравенства $\rho(M_1 \cap \Pi_t^+, B_t) \le \rho(M_1 \cap \Pi_t, B \cap \Pi_t) \le \rho(X_1, B \cap \Pi_t)$, получим $\rho(M_1 \cap \Pi_t^+, B \cap \Pi_t^+) \le \rho(M_1 \cap \Pi_t^+, B_t) + \rho(B_t, B \cap \Pi_t^+) \le \varepsilon$. Учитывая (2), окончательно имеем $\rho(M, B) \le \varepsilon$. Лемма 8 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. БРОНШТЕЙН Е.М. Экстремальные выпуклые функции. - "Сиб. мат. журн.", 1978, т.19, № I, с. 10-19.
2. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ М., "Мир", 1973.
3. АЛЕКСАНДРОВ А.Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел.I.- "Мат. сборник", 1937, т.2 (44), № 5, с.947-972.
4. АЛЕКСАНДРОВ А.Д. Выпуклые многогранники. М.-Л., Гостехиздат, 1950.
5. БОЛТЯНСКИЙ В.Г. О некоторых классах выпуклых множеств. - "ДАН СССР", 1976, т.226, № I, с. 19-24.
6. BONNESEN T., FENCHEL W. Theorie der konvexen Korper. Berlin, Springer, 1934.
7. BLASHKE W., PICK G. Distanzschatzungen im Funktionenraum.2.- "Math.Ann.", 1916, v.77, 277-302.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.VI.1978 г.