Выпуск 22 (39) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.873.1:513.88

ε-ЭНТРОПИЯ АФФИННО-ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ И КОМПАКТА МИНКОВСКОГО

Е.М.Бронштейн

ε-энтропией метрического компакта K называется величина $H_K(\varepsilon)=\log_2 N_K(\varepsilon)$, где $N_K(\varepsilon)$ – число точек в минимальной ε-сети компакта K. Множество всех замкнутых выпуклых подмножеств евклидова пространства E^n обозначим через $\mathfrak{M}^n$. Всюду $n \geq 2$.

1. Пусть $\mathfrak{M}^n_a$ – пространство классов аффинно-эквивалентных выпуклых тел (т.е. компактных множеств с непустой внутренностью) в E^n. Пространство $\mathfrak{M}^n_a$ можно снабдить метрикой следующим образом [1]: пусть

$$\delta(K_1,K_2)=\inf_A\left\{\frac{V(AK_2)}{V(K_1)}:K_1\subset AK_2\right\}, \qquad (1)$$

где K_1, K_2 – выпуклые тела в E^n; A – аффинное преобразование пространства E^n на себя; V – объем в E^n. Тогда $\rho_1(K_1,K_2)=\ln \delta(K_1,K_2)\cdot\delta(K_2,K_1)$ – метрика, инвариантная относительно аффинных преобразований, т.е. определена метрика в $\mathfrak{M}^n_a$, превращающая это пространство в метрический компакт [1].

ТЕОРЕМА 1*). $H_{\mathfrak{M}^n_a}(\varepsilon)\asymp(1/\varepsilon)^{(n-1)/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу. ε-различимым подмножеством метрического компакта называется множество, попарные расстояния между точками которого не меньше ε. Известно [2], что число точек в любом ε-различимом подмножестве компакта

*) Обозначения взяты из [2].

не превосходит числа точек в любой его ε-сети. Поэтому оценку ε-энтропии снизу можно получить, построив достаточно обширное ε-различимое подмножество компакта $\mathfrak{M}_a^n$.

Пусть $B_r\ (S_r)$ - шар (сфера) радиуса r в E^n с центром в начале координат, $x \in E^n$, $|x| = 1+\sigma\ (\sigma > 0)$. Выпуклая оболочка $conv(B_1 \cup \{x\})$ есть объединение шара B_1 и конической шапочки с вершиной x, пересекающихся по части сферы S_1. Легко проверить, что если $\sigma \geq 1$ и расстояние между проекциями точек x, y на сферу S_1 не меньше, чем $2\sqrt{\sigma}\,(|x| = |y| = 1+\sigma)$, то шапочки с вершинами x и y не пересекаются.

Зафиксируем некоторый ортонормальный базис и обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ точки сферы S_1, соответствующие векторам базиса. Выберем в части сферы $\{x \in S_1 : x_i \geq c > 0;\ |x_i - x_j| \geq c > 0\ (i,j = 1,2,\ldots,n)\}$ шар K, не содержащий точек, угловое расстояние между которыми больше $\pi/4$. Ясно, что для достаточно малого числа c такой шар с положительным радиусом существует. Построим в шаре K для достаточно малого $\sigma > 0$ $2(n+1)\sqrt{\sigma}$-различимое множество X_σ, являющееся $4(n+1)\sqrt{\sigma}$-сетью шара K. Пусть $X_\sigma = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+p}\}$. Имеем

$$c_1 \cdot (\sqrt{\sigma})^{1-n} \leq p \leq c_2 (\sqrt{\sigma})^{1-n} \quad (c_1 > 0), \qquad (2)$$

где c_1 и c_2 не зависят от σ.

Рассмотрим теперь всевозможные центрально-симметричные подмножества сферы S_1, порожденные точками $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\ (n+1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n+p)$, где $k = [p/2]$, $[\ ]$ - целая часть числа. Совокупность всех таких множеств обозначим через Y_σ.

Докажем, что для любых различных $P_1, P_2 \in Y_\sigma$ и ортогонального преобразования O пространства E^n существует точка $y \in P_2$ такая, что $2\sqrt{\sigma}$-окрестность точки y не пересекается с множеством OP_1. Ортогональное преобразование O однозначно определяется образами точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В шар K может попасть не более одного образа $Oa_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$.

Пусть, напротив, все точки множества P_2 лежат в $2\sqrt{\sigma}$-окрестностях точек множества OP_1. Тогда $(n-1)$ точка из точек $a_i\ (i \leq n)$ лежит в $2\sqrt{\sigma}$-окрестностях точек $Oa_j\ (j \leq n)$, т.е. тем самым при достаточно малом σ все точки a_i должны лежать в $2\sqrt{\sigma}$-окрестностях точек $Oa_j\ (j, i \leq n)$. Отсюда всякое такое преобразование должно быть близким к преобразованию O_1, сводящемуся к перемене порядка базисных векторов. Так как по построению множества $O_1 K$ и K отделены при $O_1 \neq I$, то при достаточно малом σ преобразование O должно мало отличаться от тождественного. Поскольку $\forall i \leq n \; |Oa_i - a_i| \leq 2\sqrt{\sigma}$, то $\forall x \in S_1 \; |Ox - x| \leq 2n\sqrt{\sigma}$, а отсюда, так как множество X_σ $2(n+1)\sqrt{\sigma}$-различимое и $|P_1| = |P_2|$, получаем, что $P_1 = P_2$. Противоречие.

Обозначим через $\mathfrak{N}_\sigma$ множество выпуклых тел вида $conv[B_1 \cup (1+\sigma)\cdot P]$ $(P \in Y_\sigma)$. Оценим расстояние $\rho_1(\mathcal{U}, W)$, где $\mathcal{U}, W \in \mathfrak{N}_\sigma$. Всякое линейное преобразование в соответствующем базисе представляется в виде произведения ортогонального и диагонального преобразований. По доказанному при любом ортогональном преобразовании O найдется пара симметричных шапочек тела W, которые не пересекаются с шапочками тела $O\mathcal{U}$.

Пусть F такое диагональное преобразование, что

$$FO\mathcal{U} \supset W. \tag{3}$$

Обозначим через λ_i собственные числа матрицы F и через e_i – соответствующие собственные векторы. Оценим произведение модулей собственных чисел матрицы F. Так как в некотором направлении ширина тела $O\mathcal{U}$ равна 2, а тела W – $2(1+\sigma)$, то для некоторого собственного числа (пусть λ_n) $|\lambda_n| \geq 1+\sigma$. Если прямые $te_1, te_2, \ldots, te_{n-1}$ $(-\infty < t < +\infty)$ не пересекают шапочек тела $O\mathcal{U}$, то ясно, что модули всех собственных чисел матрицы F не меньше I.

Пусть, напротив, некоторая прямая (для определенности, te_1) пересекает шапочки тела $O\mathcal{U}$. В этой ситуации возможно, что $|\lambda_1| < 1$. Пусть это так. Из (3) видно, что $|\lambda_1| \geq 1-\sigma$. Проведем плоскость Π_2 через векторы e_1, e_2. Учитывая размеры шапочек и их расположение, получаем, что одна из двух точек круга $\Pi_2 \cap S_1$ с координатами $(1-2\sigma, \pm(4\sigma-4\sigma^2)^{1/2})$ $(\sigma < 1)$ принадлежит телу $FOB_{1,2}$, т.е.

$$\frac{(1-2\sigma)^2}{\lambda_1^2} + \frac{4\sigma - 4\sigma^2}{\lambda_2^2} \leq 1. \tag{4}$$

Поэтому $\lambda_2^2 \geq \dfrac{(4\sigma-4\sigma^2)\cdot\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - (1-2\sigma)^2}$, откуда, как легко видеть, $\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \geq 1$ при $|\lambda_1| \leq 1$ и достаточно малых $\sigma > 0$.

Так как вектор e_2 можно заменить на любой из векторов $e_3, \dots, e_{n-1}$, то $|\lambda_i| \geq 1$ при $i = 3, \dots, n-1$. Окончательно при $n \geq 3$

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \geq 1 + \sigma. \tag{5}$$

Отдельно надо исследовать случай $n = 2$. Здесь нужная информация извлекается прямо из (4).

Учитывая, что $\lambda_2^2 \geq (1+\sigma)^2$, получаем

$$\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \geq \lambda_1^2 \cdot max\left\{\frac{(4\sigma - 4\sigma^2)\cdot\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - (1-2\sigma)^2}, (1+\sigma)^2\right\}; \lambda_1 \in (1-\sigma, 1].$$

Элементарная проверка показывает, что при достаточно малых $\sigma > 0$

$$|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \geq 1 + \sigma/2. \tag{6}$$

Так как $V(FOU) \geq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot ae_n$, где ae_n - объем n-мерного шара радиуса I, то, учитывая (5) и (6), получаем

$$V(FOU) \geq (1 + \sigma/2) \cdot ae_n \tag{7}$$

при достаточно малых $\sigma > 0$.

Оценим теперь сверху $V(W)$. Объем шапочки не больше, чем $2\sigma\tau/n$, где τ - мера части сферы S_1, по которой шапочка пересекается с шаром. Значит, $V(W) \leq ae_n + 2\sigma\tau \cdot ([P/2] + n)/n$, где P - число точек множества X_σ. Множество X_σ столь редкое, что $\tau([P/2] + n) < \tau_n/6$, где τ_n - мера сферы S_1. Отсюда

$$V(W) \leq ae_n + \tau_n \cdot \sigma/3n = ae_n(1 + \sigma/3). \tag{8}$$

Из (7) и (8) при достаточно малых $\sigma > 0$

$$\frac{V(FOU)}{V(W)} \geq \frac{1 + \sigma/2}{1 + \sigma/3} \geq 1 + \sigma/8. \tag{9}$$

Так как тела U, W - центрально-симметричные с общим центром, то

$$\inf_A \left\{\frac{V(AU)}{V(W)} : W \subset AU\right\} = \inf_T \left\{\frac{V(TU)}{V(W)} : W \subset TU\right\}, \tag{I0}$$

где A - аффинное, T -линейное преобразования. Из (I), (9), (I0) получаем $\delta(U, W) \geq 1 + \sigma/8$, т.е.

$$\rho_1(U,W)\geq 2\ln(1+\sigma/8). \qquad (II)$$

Пусть $\sigma=8(e^{\varepsilon/2}-1)$. Все найденные оценки будут справедливы для достаточно малых $\varepsilon>0$, так как $\sigma\to+0$ при $\varepsilon\to+0$. Из (II) множество элементов пространства $\mathfrak{M}_a^n$, имеющих представителей в $\mathcal{N}_\sigma$, при таком σ является ε-различимым. Число элементов множества $\mathcal{N}_\sigma$ равно $C_p^{[P/2]}$ или из (2) больше, чем $2^{c_3[\exp(\varepsilon/2)-1]^{(P-n)/2}}$. Отсюда $H_{\mathfrak{M}_a^n}(\varepsilon)>$ $>c_4\cdot\varepsilon^{\frac{1-n}{2}}$. Оценка снизу доказана.

Оценка сверху. По теореме Джона [I], для всякого выпуклого тела $K\subset E^n$ существует вписанный эллипсоид такой, что концентричный эллипсоид, полученный растяжением в n раз, содержит K. Поэтому для подходящего аффинного преобразования A $B_{1/n}\subset AK\subset B_1$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{M}}_a^n$ множество таких выпуклых тел K, для которых $B_{1/n}\subset K\subset B_1$. Пусть $\rho(K_1,K_2)$ $(K_1,K_2\in\mathfrak{M}^n)$ – расстояние Хаусдорфа, т.е. бо́льшая из верхних граней расстояний точек одного из тел до другого.

ЛЕММА. Если $K_1,K_2\in\widetilde{\mathfrak{M}}_a^n$, то $\rho_1(K_1,K_2)\leq 8\cdot n^n\cdot\rho(K_1,K_2)$ при достаточно малом расстоянии Хаусдорфа $\rho(K_1,K_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho(K_1,K_2)=\beta>0$. Это значит, что $K_1\subset K_2+\beta B_1$; $K_2\subset K_1+\beta B_1$ (сложение понимается в смысле Минковского). Так как $K_2\in\widetilde{\mathfrak{M}}_a^n$, то $B_1\subset nK_2$. Отсюда $K_1\subset(1+\beta n)K_2$. Оценим теперь $\delta(K_1,K_2)$. Взяв в (I) в качестве A растяжение с коэффициентом $1+\beta n$ и учитывая, что $V(K_2)/V(K_1)\leq$ $\leq 1+2\cdot n^n\beta$ при достаточно малых β, получаем $\delta(K_1,K_2)\leq$ $\leq(1+\beta n)^n\cdot(1+2\cdot n^n\beta)$. K_1 и K_2 равноправны, поэтому $\rho_1(K_1,K_2)\leq$ $\leq 2n\cdot\ln(1+\beta n)+2\ln(1+2n^n\beta)$. Отсюда при достаточно малом β $\rho_1(K_1,K_2)\leq 8\cdot n^n\beta$. Лемма доказана.

ε-энтропия пространства $\mathfrak{M}_1^n$ всех выпуклых замкнутых подмножеств шара B_1 с метрикой Хаусдорфа растет при $n\geq 2$ как $\varepsilon^{(1-n)/2}$ [3]. Отсюда и из леммы следует нужная оценка сверху. Теорема I доказана.

2. Обозначим через $\mathcal{R}^n$ множество n-мерных банаховых пространств. Раствором между $A,D\in\mathcal{R}^n$ называется число, вычисляемое по формуле $d(A,D)=\inf\limits_T\|T\|\cdot\|T^{-1}\|$, где $T:A\to D$ - изоморфизм; $\mu(A,D)=\ln d(A,D)$ – метрика Банаха - Мазура, превращающая $\mathcal{R}^n$ в компакт, часто называемый компактом Мин-

ковского.

Следующая теорема дает ответ на вопрос Кадеца [4].

ТЕОРЕМА 2. $H_{\mathcal{R}^n}(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{(1-n)/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единичный шар A^* n-мерного банахова пространства A есть выпуклое тело в E^n с центром симметрии в начале координат. Ясно, что

$$d(A,D)=\inf\{|\tfrac{\alpha}{\beta}| : \beta A^* \subset TD^* \subset \alpha A^*\}. \qquad (12)$$

Б. Грюн ;ум, рассматривающий в обзоре [1] эту метрику в пространстве выпуклых тел, отметил, что в наших обозначениях

$$\rho_1(A^*, D^*) \leq n \cdot \mu(A,D). \qquad (13)$$

Построенное при доказательстве теоремы I σ-различимое множество состоит из выпуклых тел с центром симметрии в начале координат, т.е. из единичных шаров некоторых элементов пространства $\mathcal{R}^n$. Из (13) соответствующие элементы из $\mathcal{R}^n$ образуют σ/n-различимое множество, и тем самым доказана оценка снизу.

Для доказательства оценки сверху сравним метрику μ с метрикой Хаусдорфа в пространстве единичных шаров. Очевидно, что метрика μ инвариантна относительно аффинных преобразований пространств A и D. Поэтому, используя, как и раньше, теорему Джона, можно считать, что пространства A и D таковы, что $B_{1/n} \subset A^* \subset B_1$; $B_{1/n} \subset D^* \subset B_1$.

Аналогично доказательству леммы получим, используя (12): $d(A,D) \leq [1+\rho(A^*, D^*)\cdot n]^2$. Отсюда $\mu(A,D) \leq 4n\rho(A^*, D^*)$ при достаточно малых значениях $\rho(A^*, D^*)$. Из уже использовавшегося результата об ε-энтропии компакта выпуклых множеств с метрикой Хаусдорфа следует оценка сверху в теореме. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГРЮНБАУМ Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М., "Наука", 1971.
2. КОЛМОГОРОВ А.Н., ТИХОМИРОВ В.М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. - "Успехи мат. наук", 1959, т.14, № 2, с.3-86.
3. БРОНШТЕЙН Е.М. ε-энтропия выпуклых множеств и функций.-

"Сиб. мат. журн.", 1976, т.17, № 3, с.508-514.
4. КАДЕЦ М.И. Геометрия банаховых пространств. – В кн.: Итоги науки. Математический анализ. Т.13, М., ВИНИТИ, 1975, с. 99-127.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.VI.1978 г.