Выпуск 21(38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Численные методы

УДК 518:517.948

К ОПТИМИЗАЦИИ БЛОЧНЫХ ПРОЦЕССОВ НЬЮТОНА - КАНТОРОВИЧА

С.С.Волокитин

1. Рассмотрим задачу уточнения приближенного решения нелинейного уравнения

$$F(x)=0 \qquad (1)$$

с помощью алгоритма произвольного чередования основного и модифицированного методов Ньютона - Канторовича [1,2]

$$x_k^{(s)}=x_k^{(s-1)}-\Gamma_k^{(0)}F(x_k^{(s-1)}),\ s=1,2,\dots,m_k,\ k=1,2,\dots, \qquad (2)$$

где $x_k^{(0)}=x_{k-1}^{(m_{k-1})}$ при $k\geq 2$, $\Gamma_k^{(0)}=[F'(x_k^{(0)})]^{-1}$, элемент $x_1^{(0)}$ задан. Считаем, что оператор F определен в открытом шаре $\Omega(x_1^{(0)},\rho)\subset X$ $(F:\Omega\longrightarrow Y)$ и имеет в замкнутом шаре $\bar\Omega_0(x_1^{(0)},r)\subset\Omega$ непрерывную производную Фреше; здесь X и Y - пространства Банаха.

Хорошо известно, что при практическом использовании процесс (2), как правило, экономичнее основного метода. Однако выбор наиболее оптимального в каком-либо смысле конкретного алгоритма из класса (2), определяемого целочисленными параметрами m_k, затруднителен из-за отсутствия достаточно точных и в то же время поддающихся теоретическому анализу априорных оценок погрешности процесса (2), справедливых при обычных условиях Л.В.Канторовича сходимости метода Ньютона.

В настоящей работе при указанных условиях для (2) устанавливается оптимальная на классе функций априорная оценка погрешности рекуррентного вида и общая оценка сверхлинейной быстроты сходимости, с помощью которых решается одна задача оптимизации процесса (2). Кроме того, получены новые оптимальные оценки для модифицированного метода Ньютона – Канторовича. На основе выведенных оценок изучаются асимптотические свойства основного и модифицированного методов.

Для понимания дальнейшего процесс (2) удобно рассматривать как последовательность k конечных блоков (групп) итераций модифицированного метода с m_k итерациями в k-м блоке.

2. Установим необходимые вспомогательные результаты. Определим две возрастающие последовательности полиномов относительно h : $\{P_s(h)\}$ и $\{R_s(h)\}$, $h \geq 0$, $s \geq 0$, элементы которых, начиная с третьего, возрастают по h и определяются рекуррентным образом:

$$\left.\begin{aligned} &P_0(h)=0,\ R_0(h)=1,\ P_s(h)=1+1/2\, hP_{s-1}^2(h),\\ &R_s(h)=1/2\, R_{s-1}(h)[P_s(h)+P_{s-1}(h)],\ s\geq 1. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Введенные функции играют основную роль в последующих оценках сходимости процесса (2). Далее всюду предполагаем $h \in [0, 1/2]$. Обозначим $N(h)=(1-\sqrt{1-2h})/h$. Используя равенство $1/2\, h=(N(h)-1)/N^2(h)$, имеем

$$P_s(h)=Q_s(h)/[N(h)]^{2^s-2}, \quad (4)$$

где $Q_0(h)=0,\ Q_s(h)=[N(h)]^{2^s-2}+[N(h)-1]Q_{s-1}^2(h),\ s\geq 1,$ причем $Q_s(h)<[N(h)]^{2^s-1}$, что легко устанавливается индукцией по s. Поэтому $P_s(h)<N(h),\ s\geq 0$, откуда, в силу $1\leq N(h)\leq 2$, вытекает

$$hP_s(h)<1,\ s\geq 0. \quad (5)$$

Отметим еще равенство

$$P_s(h)+R_s(h)h^s-1/2\, hP_s^2(h)=1,\ s\geq 0. \quad (6)$$

Обозначим

$$d_s(h)=h^s R_s(h)/[1-hP_s(h)]^2,\ s\geq 0. \quad (7)$$

Как легко видеть, функции $d_s(h)$ возрастают по h. Далее, справедливо неравенство

$$d_{s+1}(h) \leq d_s(h) \leq 1, \; s \geq 0. \tag{8}$$

Действительно, $d_0(h)=1$, а

$$d_{s+1}(h) = \frac{h^s R_s(h) \cdot 1/2\, h[1+1/2\, hP_s^2(h)+P_s(h)]}{[1-hP_s(h)]^2 \cdot 1/2\, h[1+1/2\, hP_s^2(h)+P_s(h)]+\theta},$$

где $\theta = 1/2(h-1/2)[hP_s(h)]^2+(h-1/2)hP_s(h)+h^2-5/2\,h+1$ и $\theta \geq 0$ при $0 \leq hP_s(h) < 1$ (см.(5)). Заменяя θ на 0 в выражении $d_{s+1}(h)$, приходим к (8).

Пусть $m, M \in \{1,2,\ldots\}$, $m \leq M$. Тогда на основании (8)

$$\sup_{m \leq s \leq M} d_s(h) = d_m(h). \tag{9}$$

В связи с процессом (2) введем теперь числовые последовательности $\{h_k\}$ и $\{\eta_k\}$, $k=1,2,\ldots$, где

$$\left.\begin{aligned} h_k &= h_{k-1}^{m_{k-1}+1} R_{m_{k-1}}(h_{k-1})/[1-h_{k-1}P_{m_{k-1}}(h_{k-1})]^2, \\ \eta_k &= \eta_{k-1} h_{k-1}^{m_{k-1}} R_{m_{k-1}}(h_{k-1})/[1-h_{k-1}P_{m_{k-1}}(h_{k-1})], \; k \geq 2, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

а $h_1 \in (0, 1/2)$ и $\eta_1 \in (0,+\infty)$ заданы далее в теореме I. В силу (5) и (8), обе последовательности убывающие (лишь $h_1 = 1/2 = h_k$) и $h_k > 0$, $\eta_k > 0$.

Справедливо тождество

$$N(h_{k-1})\eta_{k-1} - N(h_k)\eta_k = P_{m_{k-1}}(h_{k-1})\eta_{k-1}, \; k \geq 2, \tag{11}$$

устанавливаемое с учетом (6) подстановкой в $N(h_k)\eta_k$ значений h_k и η_k из (10).

3. В этом пункте осуществим вывод и анализ априорных оценок. Сначала отметим, что блочный процесс (2) сходится при обычных условиях Л.В.Канторовича для метода Ньютона (см. [2], теорема 6(I.XVIII)). Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА I. Пусть: I) существует линейный оператор $\Gamma_1^{(0)} \in [Y \longrightarrow X]$; 2) $\|\Gamma_1^{(0)} F(x_1^{(0)})\| \leq \eta_1$; 3) $\|\Gamma_1^{(0)} F'(x) - \Gamma_1^{(0)} F'(y)\| \leq \|K\| x-y\| \; (x,y \in \Omega_0)$;

4) $h_1 = K\eta_1 \le 1/2$. Тогда, если $r \ge N(h_1)\eta_1$, то уравнение (I) имеет решение x^*, к которому сходится процесс (2), и $\|x^* - x_1^{(0)}\| \le N(h_1)\eta_1$. Если одновременно $r < L(h_1)\eta_1 = (1+\sqrt{1-2h_1})\eta_1/h_1$ или $N(h_1)\eta_1 = r = L(h_1)\eta_1$, то в шаре Ω_0 решение x^* единственно. При этом справедливы оценки погрешностей

$$\|x^* - x_k^{(s)}\| \le t^* - t_k^{(s)}, \quad s = 1,2,\ldots,m_k,\ k = 1,2,\ldots, \tag{I2}$$

где $t^* = N(h_1)\eta_1$, $t_k^{(s)}$ - приближения, полученные при $t_1^{(0)} = 0$ процессом (2) для вещественного уравнения

$$\varphi(t) \equiv 1/2\,Kt^2 - t + \eta_1 = 0; \tag{I3}$$

а также (см.(I0)) оценка

$$\|x^* - x_k^{(m_k)}\| \le N(h_{k+1})\eta_{k+1},\ k = 1,2,\ldots \tag{I4}$$

Скорость сходимости процесса (2) характеризуется неравенством

$$\|x^* - x_k^{(m_k)}\| \le N(h_1)[1 - h_1 P_m(h_1)]^k \times$$

$$\times [d_m^{1/2}(h_1)]^{\prod\limits_{i=1}^{k}(m_i+1) - 1 + \sum\limits_{i=1}^{k}(\lambda - m_i)\cdot \Pi_{i,k}}\,\eta_1,\ k = 1,2,\ldots, \tag{I5}$$

где $m = \inf\limits_k m_k$, $\lambda \in \{1,2,\ldots\}$, $d_m(h) \le 1$ (см.(9)), а

$$\Pi_{i,k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ \prod\limits_{j=i+1}^{k}(m_j+1), & 1 \le i \le k-1. \end{cases} \tag{I6}$$

Справедливость утверждений теоремы I, за исключением оценок (I4) и (I5), вытекает из результатов работ [ ] и [4], доказанных на основе метода мажорант Л.В.Канторовича. Все утверждения теоремы I, кроме оценки (I2), можно непосредственно получить аналогично [5], используя идею прямого метода доказательства Л.В.Канторовича. Здесь в целях краткости для обоснования оценок (I4) и (I5) реализуем другой подход: докажем эквивалентность (I2) и (I4), а затем, пользуясь (I4), выведем

(15).

Рассмотрим процесс (2) для уравнения (13)

$$t_k^{(s)} = t_k^{(s-1)} + \left[1/2\; h_1/\eta_1 \left(t_k^{(s-1)}\right)^2 - t_k^{(s-1)} + \eta_1\right] \Big/ \left[1 - h_1/\eta_1\, t_k^{(0)}\right],$$

$$t_1^{(0)} = 0,\quad s = 1, 2, \dots, m_k,\quad k = 1, 2, \dots \qquad (17)$$

Покажем, что при любом фиксированном $k \geq 1$

$$t_k^{(s)} = \sum_{i=1}^{k-1} P_{m_i}(h_i)\eta_i + P_s(h_k)\eta_k,\quad 0 \leq s \leq m_k. \qquad (18)$$

Здесь и в дальнейшем считаем всю сумму равной нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего. Пусть (18) выполняется при $s = n \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$. Тогда, полагая $s = n+1$ и обозначая $u_1 = 1$, $u_\nu = \eta_\nu/\eta_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$, для знаменателя дроби в (17) имеем

$$1 - h_1/\eta_1\, t_k^{(0)} = 1 - h_1 \sum_{i=1}^{k-1} P_{m_i}(h_i) \cdot \prod_{j=1}^{i} u_j = \prod_{i=1}^{k-1} [1 - h_i P_{m_i}(h_i)], \qquad (19)$$

а для числителя

$$1/2\; h_1/\eta_1 \left(t_k^{(n)}\right)^2 - t_k^{(n)} + \eta_1 = 1/2\; h_1/\eta_1 \sum_{i=1}^{k-1} [\eta_i P_{m_i}(h_i)]^2 + 1/2\; h_1/\eta_1 [\eta_k P_k(h_k)]^2 -$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1} \eta_i \left[P_{m_i}(h_i) - h_1 \sum_{\varkappa=1}^{i-1} P_{m_i}(h_i) P_{m_\varkappa}(h_\varkappa) \cdot \prod_{l=1}^{\varkappa} u_l\right] -$$

$$-\eta_k \left[P_n(h_k) - h_1 \sum_{\varkappa=1}^{k-1} P_n(h_k) P_{m_\varkappa}(h_\varkappa) \cdot \prod_{l=1}^{\varkappa} u_l\right] + [1 - P_{m_1}(h_1)]\eta_1 =$$

$$= [P_{n+1}(h_k) - P_n(h_k)]\eta_k \cdot \prod_{i=1}^{k-1} [1 - h_i P_{m_i}(h_i)]. \qquad (20)$$

Первое равенство в (19) вытекает на основании (18) при $s = 0$ и связи

$$\frac{\eta_\nu}{\eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta_1} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{\eta_3}{\eta_2} \cdots \frac{\eta_\nu}{\eta_{\nu-1}} = u_1 u_2 \cdots u_\nu,\quad \nu \geq 1,$$

а второе – с учетом представления

$$h_{\nu+1}=h_\nu u_{\nu+1}/[1-h_\nu P_{m_\nu}(h_\nu)],\ \nu\geq 1,$$

которое следует из определения u_ν и формул (I0). При выводе (20) первое равенство получается после подстановки в числитель дроби из (I7) выражения $t_k^{(s-1)}(s=n+1)$ согласно (I8), замены η_ν на $\eta_1 u_1 \ldots u_\nu$, возведения $t_k^{(n)}$ в квадрат и последующей группировки слагаемых. Далее необходимо последовательно выделять сомножители $1-h_i P_{m_i}(h_i),\ i=1,2,\ldots,k-1$, каждый раз заменяя квадратичные члены по формуле (6), используя определение u_ν и формулы (I0). В итоге, подставляя соответствующие выражения из (I8) – (20) в (I7), по индукции убеждаемся в справедливости (I8). На основании (I8)

$$t^*-t_k^{(s)}=N(h_1)\eta_1-\sum_{i=1}^{k-1}P_{m_i}(h_i)\eta_i-P_s(h_k)\eta_k. \tag{2I}$$

В то же время, в силу (II),

$$N(h_{k+1})\eta_{k+1}=N(h_1)\eta_1-\sum_{i=1}^{k}P_{m_i}(h_i)\eta_i.$$

Полагая теперь в (2I) $s=m_k$, получаем

$$t^*-t_k^{(m_k)}=t^*-t_{k+1}^{(0)}=N(h_{k+1})\eta_{k+1},\ k\geq 1,$$

следовательно, оценки (I2) и (I4) эквивалентны.

Известная ранее рекуррентная оценка погрешности для основного метода Ньютона – Канторовича (в (2) $m_k=1$ [I]) вытекает из (I4) как частный случай.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Формулой (I4) можно пользоваться для оценки погрешности любого приближения $x_k^{(s)}$ процесса (2). Для этого достаточно в выражениях h_{k+1} и η_{k+1} из (I0) последовательно принимать $s=m_k,\ m_k=1,2,\ldots$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рекуррентная формула (I4) является, по существу, априорной оценкой погрешности на классах функций. Она оптимальна на классе квадратных уравнений (I3), определяемых параметрами K и η_1, поскольку для $F(x)=\varphi(x)$ в (I4), как и в мажорантной оценке (I2), достигается точное равенство. В дальнейшем оптимальность оценок понимается в указанном смысле.

Далее, выведем аналитическую оценку (I5). Обозначим $d_m(h_1)=d$ (см. (7)-(9), где $m=\inf_k m_k, M=\sup_k m_k$). Тогда на основании (I0), применяя обычную технику последовательных оценок (см., например, [I] , [5]), получаем

$$h_{k+1}\le d h_1^{-m_k} h_k^{m_k+1}\le h_1 d^{\,1+\mathcal{X}_k},$$

где $\mathcal{X}_1=0$, $\mathcal{X}_k=\sum_{l=2}^{k}\prod_{j=l}^{k}(m_j+1)$, $k=2,3,\ldots$;

$$\eta_{k+1}\le[1-h_1P_m(h_1)]d(h_1^{-1}h_k)^{m_k}\eta_k\le[1-h_1P_m(h_1)]^k d^{\,1+\mathcal{X}_k}\eta_1=$$

$$=[1-h_1P_m(h_1)]^k(d^{1/\lambda})^{\prod_{i=1}^{k}(m_i+1)-1+\sum_{i=1}^{k}(\lambda-m_i)\cdot\Pi_{i,k}}\eta, \qquad (22)$$

где $\lambda\in\{1,2,\ldots\}$, а $\Pi_{i,k}$ определено формулой (I6). В силу (22) и свойств $N(h)$, оценка (I5) следует теперь из (I4).

Анализ информации, доставляемой формулой (I5) о быстроте сходимости процесса (2), выполнен далее в п. 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Формула (I5) не оптимальна, но обладает высокой степенью точности. Ею можно пользоваться для несколько огрубленной оценки погрешности любого приближения $x_k^{(s)}$ процесса (2). Для этого достаточно в ней последовательно принимать $s=m_k$, $m_k=1,2,\ldots$, дополнительно контролируя правильность выбора $m=\inf_{1\le i\le k} m_i$, определяющего $d_m(h_1)$.

4. Формулы (I4) и (I5) неудобно применять в исходном виде для характеристики обычного модифицированного процесса, формально получаемого из (2) при $k=1$, $m_1\to\infty$ (см. (I0) и определения m, M). Ввиду особой самостоятельной важности указанного метода построим для него простые аналоги (I4) и (I5), при этом уже обе оценки будут оптимальными.

Для модифицированного метода Ньютона - Канторовича

$$x_{k+1}=x_k-[F'(x_1)]^{-1}F(x_k),\ x_1=x_1^{(0)},\ k=1,2\ldots, \qquad (23)$$

в условиях теоремы I аналоги формул (I0) имеют вид

$$h_k'=\frac{h_1^k R_{k-1}(h_1)}{[1-h_1P_{k-1}(h_1)]^2},\ \eta_k'=\frac{h_1^{k-1}R_{k-1}(h_1)}{1-h_1P_{k-1}(h_1)}\eta_1,\ k\ge1, \qquad (24)$$

и справедлива оптимальная рекуррентная оценка погрешности (ср. (14) и [8])

$$\|x^* - x_k\| \leq N(h_k')\eta_k', \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

обоснование которой легко вытекает из рассмотрения соответствующих формул вида (17)-(20) и тождества $N(h_k')\eta_k' = N(h_1)\eta_1 - P_{k,1}(h_1)\eta_1$ (ср. (11)). Тогда, в силу (25) и (4), получаем

$$\|x^* - x_k\| \leq [N(h_1) - P_{k-1}(h_1)]\eta_1 = [(N(h_1))^{2^{k-1}} - Q_{k-1}(h_1)] /$$

$$/(N(h_1))^{2^{k-1}-2}\eta_1 = [N(h_1)-1]^{k-1} \cdot \Pi_{k-1}/(N(h_1))^{2^{k-1}-2}\eta_1, \quad k \geq 1,$$

где $\Pi_{k-1} = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ \prod\limits_{i=0}^{k-2}[(N(h_1))^{2^{i-1}} + Q_i(h_1)], & k \geq 2, \end{cases}$

или иначе, с использованием равенства $N(h_1) - 1 = N(h_1)[1-\sqrt{1-2h_1}]/2$,

$$\|x^* - x_k\| \leq [1-\sqrt{1-2h_1}]^{k-1}\Pi_{k-1}\eta_1/2^{k-1}[N(h_1)]^{2^{k-1}-k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Здесь $\Pi_{k-1}/2^{k-1}[N(h_1)]^{2^{k-1}-k-1} \leq N(h_1)$ (см. 4)).

Оценка (26) быстроты сходимости метода (23) одновременно является оптимальной рекуррентно-аналитической оценкой погрешности. Отметим, что для основного метода Ньютона - Канторовича различные оптимальные оценки скорости сходимости получены в [6-8] .

Выведенные оценки (14), (15), (25), (26) представляют самостоятельный интерес для теории блочных модификаций (2) (в частности, (23)). Кроме того, их легче, чем непосредственно (12), анализировать. Поэтому они могут быть эффективно использованы при исследовании оптимизации и устойчивости вычислительной схемы (2).

Проиллюстрируем только что сказанное на примере решения одной задачи оптимизации для (2), поставленной Б.А. Вертгеймом [9, 10].

ЗАДАЧА А . Даны: 1) конкретное уравнение (1) и начальное приближение $x_1^{(0)}$, для которых выполнены условия теоремы I; 2) натуральные числа k и a, $k \le a$. Требуется найти натуральные числа m_i, $i=1,2,\dots,k$, составляющие в сумме a, которые минимизируют норму $\left\| x^* - x_k^{(m_k)} \right\|$, где $x_k^{(mk)}$ есть a-е приближение к точному решению x^* уравнения (I), полученное процессом (2) с допустимым числом m_i.

Практически вместо нормы погрешности приходится минимизировать какую-либо ее оценку. Имея в виду (I5), будем считать

$$\left\| x^* - x_k^{(m_k)} \right\| \sim \delta =$$

$$= \alpha(h_1, \eta_1, m)[\beta(h_1, \lambda, m)]^{\prod_{i=1}^{k}(m_i+1)+\sum_{i=1}^{k}(\lambda-m_i)\cdot\Pi_{i,k}-1}, \quad (27)$$

где $\beta(h_1,\lambda,m)<1$ и α, β убывают по m. В (27) для определенности удобно принять, например, $\lambda = -[-a/k]$.

Таким образом, отыскание набора $\{m_i\}_1^k$, дающего $\min \delta$ при условии $\sum_{i=1}^{k} m_i = a$, составляет задачу нелинейного целочисленного программирования.

ТЕОРЕМА 2. Решением аппроксимированной согласно (27) задачи А, являются числа

$$m_i^* = \left[\frac{a+i-1}{k}\right] = \begin{cases} q, & \text{если } 1 \le i \le k-r, \\ q+1, & \text{если } k-r < i \le k, \end{cases} \quad (28)$$

где q – частное, а r – остаток от деления a на k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы близко обоснованию леммы I и теоремы I из [IO]. Именно, аналогично [IO] устанавливается, что

$$\max \prod_{i=1}^{k}(m_i+1)+\sum_{i=1}^{k}(\lambda-m_i)\cdot\Pi_{i,k}-1$$

по всем допустимым m_i и достигается на элементах (28), для которых $m^* = \inf_{1\le i\le k} m_i^* = q$. Далее легко показывается, что если

$\mathfrak{M}$ - конечное множество всевозможных последовательностей $\{m_i\}$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{k} m_i = a$, то

$$\sup_{\{m_i\}\in\mathfrak{M}} \inf_{1\le i\le k} m_i = q.$$

Следовательно, $\alpha(h_1, \eta_1, m)$ и $\beta(h_1, \eta, m)$, как убывающие функции m, достигают минимума при $m = m^*$, и последовательность (28) является искомой. В отличие от [IO], теоремы 2 и 4, результат теоремы 2 справедлив сразу, как только выполнены условия теоремы I, без дополнительных ограничений на норму $F''(x)$ или величину $h_1 < 1/2$.

Заметим, что вид оптимальной последовательности $\{m_i^*\}$ (28) не зависит от значений α и β в (27), т.е. от точности оценки погрешности, а зависит лишь от естественности ее структуры. Этот вывод подтверждается и тем, что результат теоремы 2 сохраняется, если согласно (I4) принять $\delta = N(h_{k+1})\eta_{k+1}$. Ввиду громоздкости рассуждений на обосновании этого факта здесь не останавливаемся.

6. Решение задачи А$_1$ представляет прежде всего теоретический интерес. Для практики важно изучение свойств процессов (5) с учетом вычислительных затрат. Ниже на основе полученных оптимальных оценок при учете трудоемкости итераций устанавливается, что схема (2) содержит алгоритмы, которые часто обладают лучшими асимптотическими свойствами, нежели основной или обычный модифицированный процессы Ньютона - Канторовича.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть для последовательных приближений x_n, x_{n+1} $(n \geq 0)$ данного итерационного процесса однозначно определен способ вычисления положительной константы Δt_{n+1}, связанной с нормой поправки приближенного решения конкретным соответствием: $\|x_{n+1} - x_n\| \sim \Delta t_{n+1}$. Тогда величина Δt_{n+1} называется длиной итерации x_{n+1}, построенной из x_n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Коэффициентом эффективности (к.э.) данной итерации называется отношение ее длины к объему вычислительных затрат на ее реализацию.

Далее в качестве критерия сравнения различных методов используется к.э. итераций при согласованном в определенном смысле выборе их длин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Итерационный метод называется асимптотически неоптимальным, если найдется индекс n_1 и другие методы такие, что для любого $n \geqslant n_1$ к.э. итерации исходного метода x_{n+1}, построенной из x_n, меньше к.э. итерации некоторого нового метода $\tilde{x}_{n+1}$, также построенной из x_n при условии, что длины итераций x_{n+1} и $\tilde{x}_{n+1}$ совпадают с оптимальными в одинаковом смысле оценками норм поправок для соответствующих методов.

Обратимся к классу алгоритмов (2). В качестве длин итераций выбираем правые части оптимальных априорных оценок сверху (см. (18) и (6)):

$$\left\| x_k^{(s)} - x_k^{(s-1)} \right\| \leqslant t_k^{(s)} - t_k^{(s-1)} = h_k^{s-1} R_{s-1}(h_k) \eta_k,$$

$$\left\| x_k^{(s)} - x_k^{(0)} \right\| \leqslant t_k^{(s)} - t_k^{(0)} = P_s(h_k) \eta_k, \quad s = \overline{1, m_k}. \tag{29}$$

Пусть числа C_1 и C_2 $(0 < C_2 < C_1)$ определяют вычислительные затраты при реализации одного шага соответственно основного и обычного модифицированного методов Ньютона - Канторовича, причем C_1 и C_2 не зависят от номера итерации. Предполагаем, что выполнены условия теоремы I при $h_1 < 1/2$.

ТЕОРЕМА 3. *Основной метод Ньютона - Канторовича асимптотически неоптимален.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}$ - приближения основного метода. Тогда длины итераций $x_{k+1}^{(1)}$ основного и $x_k^{(2)}$ модифицированного методов, построенных из $x_k^{(1)} = x_{k+1}^{(0)}$, соответственно равны (см. (29) и (10)):

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_k}{1-h_k} \eta_k \quad \text{и} \quad \Delta \eta_k = h_k R_1(h_k) \eta_k,$$

откуда

$$\eta_{k+1} / \Delta \eta_k = 1/(1-h_k) < 2.$$

Так как $h_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\eta_{k+1}/\Delta\eta_k \xrightarrow[k]{} 1$. Тогда, в силу $C_1/C_2>1$, найдется такой индекс k_1, что для $k\geq k_1$ будет

$$\frac{\eta_{k+1}}{\Delta\eta_k}<\frac{C_1}{C_2}\quad, \text{ т.е. } \frac{\eta_{k+1}}{C_1}<\frac{\Delta\eta_k}{C_2}.$$

Применяя определение 3, получаем утверждение теоремы.

Если $C_1/C_2>2$ (а обычно $C_1/C_2\gg 1$), то $k_1=1$ при $h_1\leq 1/2$.

Заметим, что в последовательностях итераций $x_1^{(1)}, x_2^{(1)},\ldots, x_k^{(1)}, x_k^{(2)},\ldots$ $(k\geq k_1)$ процессов, используемых для сравнения с основным, вид итераций, следующих за $x_k^{(2)}$, в данном случае выяснять не требуется. Их выбор, вообще говоря, связан с постановками и решениями конкретных задач оптимизации для (2), которые здесь не рассматриваются.

ТЕОРЕМА 4. Обычный модифицированный метод Ньютона-Канторовича асимптотически неоптимален, если существует число $\varepsilon>0$, при котором

$$C_1/C_2\leq 1/(\sqrt{1-2h_1}+\varepsilon h_1). \tag{30}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (30) выполнено с некоторым $\varepsilon>0$. Если $x_1^{(1)}, x_1^{(2)},\ldots, x_1^{(s)}$ – приближения модифицированного метода, то длины итераций $x_1^{(s+1)}$ модифицированного и $x_2^{(1)}$ основного методов, построенных из $x_1^{(s)}=x_2^{(0)}$, соответственно равны (см. (29) и (10)):

$$\Delta\eta_1=h_1^s R_s(h_1)\eta_1 \quad \text{и} \quad \eta_2=\frac{h_1^s R_s(h_1)}{1-h_1P_s(h_1)}\eta_1.$$

Согласно оценке (26),

$$0<N(h_1)-P_s(h_1)\leq(1-\sqrt{1-2h_1})^{s+1}/h_1,\ s\geq 0.$$

Поэтому $N(h_1)-P_s(h_1)\to 0$ при $s\to\infty$ и найдется такой индекс s_1, что при $s\geq s_1$ будет $N(h_1)-\varepsilon<P_s(h_1)$. Следовательно, в силу (30), для $s\geq s_1$

$$\frac{\tau_2}{\Delta\tau_1} = \frac{1}{1-h_1 P_3(h_1)} > \frac{1}{1-h_1[N(h_1)-\varepsilon]} \geqslant \frac{C_1}{C_2},$$

т.е. $\Delta\tau_1/C_2 < \tau_2/C_1$, откуда, согласно определению 3, вытекает утверждение теоремы.

Теоремы 3,4 характеризуют и практическую значимость блочных процессов (2). Так, для задачи о получении заданной точности приближенного решения при минимуме вычислительных затрат существование индекса k_1 в теореме 3 (s_1 в теореме 4) до достижения требуемой точности решения является необходимым (достаточным) условием некоторого чередования основного и модифицированного методов. В то же время отметим, что основные задачи о выборе конечных оптимальных алгоритмов из (2) с учетом вычислительных затрат оказываются задачами нелинейного целочисленного программирования с нефиксированным числом неизвестных (аналогично [II]) и составляют предмет отдельных исследований.

7. В заключение остановимся на вопросе об определении порядка скорости сходимости процесса (2), который, на наш взгляд, заслуживает особого обсуждения.

При определенных m_k процесс (2) порождает последовательность $\mathcal{H} = \{\{x_k^{(s)}\}_{s=1}^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся в условиях теоремы I к x^*. Из $\mathcal{H}$ можно выделить различные сходящиеся подпоследовательности, в частности $\{x_k^{(m_k)}\}$, характеризующую быстроту сходимости концевых итераций блоков в (2) согласно оценке (I5). В известной нам литературе отсутствуют какие-либо определения порядка сходимости непосредственно для $\mathcal{H}$, что связано с существом проблемы: порядок $\mathcal{H}$ является, очевидно, переменной величиной. Более того, при неравных m_k даже подпоследовательность $\{x_k^{(m_k)}\}$ нестационарна и для нее затруднительно указать единый порядок сходимости.

С целью получения достаточно правдоподобной характеристики порядка сходимости комбинированных процессов предлагается следующий подход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элементарной итерацией (э.и.) называется итерация, для реализации которой требуется решить только одно линейное операторное уравнение.

Различаем основную э.и. и упрощенную э.и. соответственно тому, вычисляется или не вычисляется в линейном уравнении новый оператор.

Далее считаем, что

I) при любой форме записи итерационные процессы совпадают, если их практическая реализация сводится к построению одной и той же последовательности э.и.;

2) порядок итерационного процесса равен порядку порождаемой им полной последовательности э.и. (т.е. содержащей все э.и. без исключения).

В связи с этим ниже предлагается порядок итерационного метода определять как величину, отнесенную к одной его э.и. Хотя для процесса, содержащего и основные и упрощенные э.и., такая характеристика порядка является осредненной величиной, она, на наш взгляд, вполне достоверно отражает его естественные свойства. Так, исключается возможность одному и тому же процессу приписывать различные "высшие" порядки в зависимости от формы его записи (по терминологии [13] , например, основной метод Ньютона - Канторовича второго порядка, сгруппированный по две итерации, является уже методом четвертого порядка и т.д.). Кроме того, в таком подходе при рассмотрении процесса, сконструированного из значений исходного оператора и его первой производной (метод "высшего"порядка с усложненной итерацией), не возникает иллюзии преимущества этого процесса по порядку в сравнении с основным методом Ньютона - Канторовича, поскольку любой такой процесс сводится к некоторой последовательности основных и упрощенных э.и. и в расчете на одну э.и. имеет порядок не выше, чем у основного метода, порождающего последовательность только основных э.и.

Введем понятие осредненного оценочного порядка (О-порядка) сходящейся последовательности.

Пусть $\gamma(n)$ - возрастающая функция натурального аргумента с натуральными значениями, последовательность $\{x_{\gamma(n)}\}=\chi$ сходится к x^* и известна оценка

$$\left\| x_{\gamma(n)} - x^* \right\| \leq \alpha(n)\beta^{\mu(n)-1}, \quad n=1,2,\ldots,$$

где $0<\beta<1$, $\alpha(n)>0$ – константа или бесконечно малая величина, $\beta^{\mu(n)-1}$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\alpha(n)$. Пусть $\sigma(n)$ обозначает количество элементов в χ при данном n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. О-порядком последовательности χ называется величина

$$\rho_o = \lim_{n\to\infty} \mu(n)^{\frac{1}{\sigma(n)}} .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Итерационный процесс называется сходящимся линейно, сверхлинейно или квадратично, если для порождаемой им последовательности э.и. $\rho_o=1$, $\rho_o\in(1,2]$, $\rho_o=2$ соответственно.

Рассмотрим последовательность э.и. $\bar{\mathscr{X}}=\{\{x_k^{(s)}\}_{s=1}^{m}\}$, порождаемую процессом (2) при $m_k=m$. В оценке (I5) полагаем $\lambda=m$ (при $\lambda\le m$ величину $d_m^{(s)}(h_1)$ можно, например, заменить на ограничивающую ее сверху традиционную постоянную $\beta=2h_1$ (см. [I,2]); указанное неравенство проверяется индукцией по m). Тогда

$$\mu(k)=\prod_{i=1}^{k}(m_i+1)+\sum_{i=1}^{k}(\lambda-m_i)\cdot\Pi_{i,k}=(m+1)^k,\ \sigma(k)=km$$

и

$$\rho_o=\lim_{k\to\infty}(1+m)^{k\cdot 1/km}=\sqrt[m]{1+m}\in(1,2],$$

следовательно, общий процесс (2) сходится сверхлинейно. В частности, для последовательности э.и. $\{x_k^{(1)}\}$ основного метода $\rho_o=2$. Квадратичная сходимость основного метода сохраняется и при его группировке по m_k итераций в k-м блоке (в формуле (2) $\Gamma_k^{(0)}$ заменяется на $\Gamma_{k}^{(s)}{}_{k}$). В этом случае $\mu(k)=\prod_{i=1}^{k}2^{m_i}=2^{\sum_{i=1}^{k}m_i}$ (см.[5]), $\sigma(k)=\sum_{i=1}^{k}m_i$. Для последовательности э.и. $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ обычного модифицированного метода Ньютона – Канторовича получаем $k=1$, $\mu(m)=1+m$, $\sigma(m)=m$, что приводит к пределу $\rho_o=\lim_{m\to\infty}(1+m)^{1/m}=1$, подтверждающему линейную сходимость модифицированного метода. Тот же результат получается на основе оценки (26). Заметим, наконец, что подпоследовательность $\{x_k^{(m)}\}$ из $\mathcal{R}$ сходится с порядком $p_0 = 1+m$ $(\mu(k)=(1+m)^k,\ \sigma(k)=k)$, что также соответствует известным результатам (см., например, [I2], с. 76; [I3], с. 307).

ЛИТЕРАТУРА

I. КАНТОРОВИЧ Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. - "Успехи мат. наук", 1948, т. 3, вып. 6, с. 89-185.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
3. DENNIS J.E. On the Kantorovich hypothesis for Newton's method. - "SIAM J.Numer.Analysis",1969,v.6,N 3,493-507.
4. ОКИНШЕВИЧ И.Н. О методе Ньютона - Канторовича и его некоторых модификациях. - "Сиб. мат. журн.", 1971, т. 12, № 4, с. 913-919.
5. БЕЛЬТЮКОВ Б.А., ВОЛОКИТИН С.С. Блочные модификации возмущенного метода Эйткена - Стеффенсена. - "Журн. вычисл. математики и мат. физики", 1973, т. 13, № 6, с. 1390-1401.
6. КИВИСТИК Л. Об одном обобщении метода Ньютона. - "Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук",1960, т.9, № 4,с.301-312.
7. GRASS W.B., TAPIA R.A. Optimal error bounds for the Newton-Kantorovich theorem. - "SIAM J.Numer.Analysis",1974, v.11, N 1, 10-13.
8. ВОЛОКИТИН С.С. О неулучшаемых априорных оценках погрешности метода Ньютона - Канторовича. - В кн.: Вопросы прикладной математики. Иркутск, изд. СЭИ СО АН СССР, 1975, с.153-158.
9. ВЕРТГЕЙМ Б.А. Приближенное решение нелинейных уравнений как управляемый процесс. "ДАН СССР", 1970, т. 194, № 1, с.16-20.
10. ВЕРТГЕЙМ Б.А. Оптимальное чередование основного и модифицированного процессов Ньютона - Канторовича. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, "Наука", 1970, вып.17, с. 10-31.
11. ВОЛОКИТИН С.С. Об одной задаче оптимизации блочных процессов Ньютона - Канторовича. - "Мат. заметки", 1975, т. 18,

вып. 6, с. 921-928.

12. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н., ДАНИЛИН Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М., "Наука", 1975.

13. ОРТЕГА ДЖ., РЕЙНБОЛЬДТ В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., "Мир", 1975.

Поступила в ред.-изд. отд. 21.01.1976 г., в переработанном виде - 28.10.1976 г.