Выпуск 21(38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Выпуклый анализ

УДК 517.51

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ МНОЖЕСТВЕ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Б.П.Черник

Известна связь задачи наилучшего приближения непрерывной функции обобщенными полиномами с аппроксимацией ее сужения на некоторые конечные подмножества. Еще Л.Г.Шнирельманом [1] получена оценка для числа элементов таких подмножеств. Дальнейшие исследования в этом направлении содержатся в работах Е.Я. Ремеза [2], В.С.Виденского [3], Н.А.Лебедева и И.Ю.Рыжакова [4], М.Б. Коробковой [5] и других *).

Настоящая статья посвящена установлению некоторых аналогов упомянутых результатов для задачи наилучшего приближения измеримой существенно ограниченной функции на сегменте $[a,b]$.

Рассмотрим пространство $L^\infty(E)$ измеримых существенно ограниченных вещественных функций, определенных на множестве $E=[a,b]$, и $(n+1)$- мерное подпространство H с базисом $\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n$. Как обычно, функции $P=\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i$ из H будем называть полиномами. Для функций $g\in L^\infty(E)$ и измеримых множеств $Q\subset E$, $mes\,Q>0$, положим

$$\|g\|_Q=\underset{t\in Q}{\mathrm{vrai\,sup}}\,|g(t)|,\quad \|g\|=\|g\|_E.$$

*) См. библиографию, имеющуюся в обзорных статьях В.С.Виденского [6] и Дж.Л.Уолша [7].

Зафиксируем теперь некоторую функцию $f \in \bar{H}$ и введем для нее следующие обозначения:

$$\mu(f,Q)=\min_{P\in H}\|f-P\|_Q,\ \mu(f)=\mu(f,E),$$

$$V(f,Q)=\{P^*\in H : \|f-P^*\|_Q=\mu(f,Q)\},\ V(f)=V(f,E).$$

При $\varepsilon>0$ для $t\in E$ полагаем $U_{t,\varepsilon}=[t-\varepsilon,t+\varepsilon]\cap E$. Впредь условимся, что $X_m=\{t_1,t_2,\dots,t_m\}$ – упорядоченный набор различных точек из E,

$$X_{m,\varepsilon}=\bigcup_{i=1}^{m}U_{t_i,\varepsilon},\quad d=\frac{1}{2}\min(t_{i+1}-t_i),\ i=1,2,\dots,m-1.$$

Если $\varepsilon\in(0,d)$, положим $X_{m,\varepsilon,k}=X_{m,\varepsilon}\setminus U_{t_k\varepsilon}$ для всякого $k=1,2,\dots,m$.

Множество X_m будем называть характеристическим множеством задачи (f,E) наилучшего приближения функции f полиномами из H на E, если

1) $\mu(f)=\mu(f,X_{m,\varepsilon'})$ для любого $\varepsilon'>0$,

2) существует такое $\varepsilon''\in(0,d)$, что $\mu(f)>\mu(f,X_{m,\varepsilon'',i})$, $i=1,2,\dots,m$.

ЛЕММА I. Для произвольного $\varepsilon>0$ имеет место равенство

$$\mu(f)=\sup_{X_{n+2}\subset E}\mu(f,X_{n+2,\varepsilon}). \tag{I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и определим на $R^{n+1}\times E$ функцию φ,

$$\varphi(A,t)=\|f-\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i\|_{U_{t,\varepsilon}},$$

где $A=(a_0,a_1,\dots,a_n)$. Поскольку для каждого $t\in E$ выполняется $\varphi(A,t)\le\|f-\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i\|$, то $\varphi(A,\cdot)$ ограничена на E при любом $A\in R^{n+1}$. Функция $\varphi(\cdot,t)$ непрерывна на R^{n+1} равномерно относительно $t\in E$, так как

$$|\varphi(A,t)-\varphi(A_0,t)|\le\|\sum_{i=0}^{n}(a_i-a_i^0)\varphi_i\|_{U_{t,\varepsilon}}\le\gamma\sum_{i=0}^{n}|a_i-a_i^0|,$$

где $A_0=(a_0^0,a_1^0,\dots,a_n^0)$, $\gamma=\max_i\|\varphi_i\|$ $(i=0,1,\dots,n)$.

Для $\lambda>0$ и $t\in E$ положим $F(\lambda,t)=\{A\in R^{n+1}:\varphi(A,t)<\lambda\}$. Нетрудно убедиться в том, что $F(\lambda,t)$ – выпуклая область в R^{n+1} при любом фиксированном t и положительном λ.

В силу леммы 2 [8], для некоторого семейства $\{E_j, <\}_{j=1}^{n+2}$ *) ($E_j \subset E$, $j=1,2,\ldots,n+2$) отличен от нуля определитель Δ системы линейных относительно $x_{-1}, x_0, \ldots, x_n$ уравнений

$$\sum_{i=-1}^{n} x_i \int_{E_j} \psi_i(t)dt = \int_{E_j} r(t)dt \quad (j=1,2,\ldots,n+2),$$

где $\psi_{-1}=f$, $\psi_i=\varphi_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$, $r=f-\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i$. Для точки t_j^* $(j=1,2,\ldots,n+2)$, при любом $\eta>0$ удовлетворяющей условию $\|r\|_{U_{t_j^*,\eta}\cap E_j}=\|r\|_{E_j}$, имеет место оценка

$$\left|\int_{E_j} r(t)dt\right| \le \|r\|_{E_j}\cdot mes\, E_j \le \|r\|_{U_{t_j^*,\varepsilon}}\cdot mes\, E = \varphi(A,t_j^*)\cdot mes\, E.$$

Таким образом, если $A\in\bigcap_{j=1}^{n+2} F(\lambda, t_j^*)$, а δ – наибольший из модулей миноров порядка $n+1$ определителя Δ, то

$$|a_i| \le \frac{(n+2)\cdot\lambda\cdot\delta\cdot mes\, E}{|\Delta|} \quad (i=0,\ldots,n).$$

В силу теоремы I [I], имеем

$$\inf_{A\in R^{n+1}} \sup_{t\in E} \varphi(A,t) = \sup_{X_{n+2}\subset E} \inf_{A\in R^{n+1}} \sup_{t\in X_{n+2}} \varphi(A,t).$$

Отсюда следует (I), так как

$$\sup_{t\in E}\varphi(A,t)=\|f-\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i\|,\ \sup_{t\in X_{n+2}}\varphi(A,t)=\|f-\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i\|_{X_{n+2,\varepsilon}}.$$

ЛЕММА 2. Для любого $\varepsilon>0$ существует такое множество X_p $(1\le p\le n+2)$, что

$$\mu(f)=\mu(f, X_{p,\varepsilon}). \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольно $\varepsilon>0$ и $\varepsilon_0\in(0,\varepsilon)$. Согласно лемме I, для некоторой последовательности множеств $X_{n+2}^{\nu}=\{t_1^{\nu}, t_2^{\nu},\ldots,t_{n+2}^{\nu}\}$, $\nu=1,2,\ldots,$

$$\lim_{\nu\to\infty}\mu(f, X_{n+2,\varepsilon_0}^{\nu})=\mu(f). \tag{3}$$

---

*) Символ $\{E_j, <\}_{j=1}^{k}$ означает $\{E_j\}_{j=1}^{k}$, $\sup E_j \le \inf E_{j+1}$, $j=1,2,\ldots,k-1$.

Не умаляя общности рассуждения, можно считать, что существует $\lim_{\nu\to\infty} t_i^\nu = t_i^0$ $(i=1,2,\dots,n+2)$. Пусть среди $t_1^0, t_2^0, \dots, t_{n+2}^0$ имеется p различных точек $t_{i_1}^0 < t_{i_2}^0 < \dots < t_{i_p}^0$, $X_p = \{t_{i_1}^0, t_{i_2}^0, \dots, t_{i_p}^0\}$. Тогда найдется ν_0, для которого $X_{n+2,\varepsilon_0}^{\nu_0} \subset X_{p,\varepsilon}$, что в силу (3) влечет (2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Леммы I и 2 остаются справедливыми, если вместо E взять компакт положительной меры.

Следуя [9], будем говорить, что $t_0 \in E$ – экстремальная точка не эквивалентной нулю на E функции $g \in L^\infty(E)$ для множества $Q \subset E$, если $\|g\| = \|g\|_{U_{t_0,\varepsilon} \cap Q}$ при любом $\varepsilon > 0$. Обозначим через $G(g,Q)$ $(G(g))$ множество всех экстремальных точек функции g для $Q(E)$.

ТЕОРЕМА I. Для задачи (f,E) существует характеристическое множество X_m, причем $1 \le m \le n+2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольно $\varepsilon_1 > 0$ и, пользуясь предыдущей леммой, для некоторого p_1 $(1 \le p_1 \le n+2)$ найдем такое $X_{p_1} = \{t_1^1, t_2^1, \dots, t_{p_1}^1\}$, что $\mu(f,Y_1) = \mu(f)$, где $Y_1 = X_{p_1,\varepsilon_1}$. Пусть не все φ_i $(i=0,1,\dots,n)$ эквивалентны нулю на Y_1 (в противном случае для любой точки $t^* \in G(f\chi_{Y_1})$ *) множество $\{t^*\}$ характеристическое) и сегменты $S_j = [\alpha_j, \beta_j]$ $(j=1,2,\dots,m)$ таковы, что $Y_1 = \bigcup_{j=1}^{m_1} S_j$, причем $S_j \cap S_{j+1} = \emptyset$ $(j=1,2,\dots,m_1-1)$. Если $m_1 > 1$, то, положив $\rho = \min(\alpha_{j+1} - \beta_j)$, $j=1,\dots,m_1-1$, возьмем ε_2, $0 < \varepsilon_2 < \min\{\rho, \frac{\varepsilon_1}{2}\}$, и отвечающие ему p_2 $(1 \le p_2 \le n+2)$ и $X_{p_2} = \{t_1^2, t_2^2, \dots, t_{p_2}^2\}$, для которых $Y_2 \subset Y_1$ и $\mu(f,Y_2) = \mu(f)$, где $Y_2 = X_{p_2,\varepsilon_2} \cap Y_1$. В случае $m_1 = 1$ множество X_{p_2} строим, применяя лемму (2), при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/2$.

Продолжая этот процесс, для каждого $\nu = 1,2,\dots$ найдем компакт**) $Y_\nu = X_{p_\nu,\varepsilon_\nu} \cap Y_{\nu-1}$ $(Y_0 = E,\ 1 \le p_\nu \le n+2)$ такой, что

---

*) Как обычно, χ_Q – характеристическая функция множества Q.

**) Считаем, что ни на одном шаге не получится множество, на котором все φ_i $(i=0,1,\dots,n)$ эквивалентны нулю; если это не так, то, рассуждая как выше, легко построить одноэлементное характеристическое множество.

$V_{\nu+1} \subset Y_\nu$, $\mu(f, Y_\nu)=\mu(f)$. Тогда $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} Y_\nu = X_p$, причем $1\le p\le n+2$. Действительно, если некоторое $X_{n+3} = \{\bar t_1, \bar t_2, \ldots, \bar t_{n+3}\}$ удовлетворяет условию $X_{n+3} \subset \bigcap_{\nu=1}^{\infty} Y_\nu$, положим $\sigma = \min_i (\bar t_{i+1} - \bar t_i)$, $i=1, 2, \ldots, n+2$. При $\varepsilon_{\nu_0} < \frac{\sigma}{2}$ в $U_{t_i^{\nu}, \varepsilon_{\nu_0}}$ $(i=1,2,\ldots,p_{\nu_0})$ не более одной точки из X_{n+3}, а это невозможно, так как $p_{\nu_0} \le n+2$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует ν_1, при котором $Y_{\nu_1} \subset \operatorname{Int} X_{p,\varepsilon}$. В противном случае $Z_\nu = Y_\nu \setminus \operatorname{Int} X_{p,\varepsilon'} \ne \emptyset$ $(\nu=1,2,\ldots)$ для некоторого $\varepsilon' > 0$, а поскольку Z_ν – компакт и $Z_{\nu+1} \subset Z_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$, то $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} Z_\nu \ne \emptyset$. Отсюда $Z_\nu \cap X_p \ne \emptyset$ $(\nu=1,2,\ldots)$, что невозможно. Таким образом, $\mu(f, X_{p,\varepsilon}) = \mu(f)$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Если при этом $X_p = \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$ не является характеристическим множеством, то для любого $\eta \in (0, d)$ найдется j $(1\le j\le p)$, для которого $\mu(f, X_{p,\eta,j}) = \mu(f)$. Возьмем убывающую 0-последовательность $\eta_\nu \in (0,d)$, $\nu=1,2,\ldots$, и выделим из $\{\eta_\nu : \nu=1,2,\ldots\}$ таких p подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_p$, что $\mu(f, X_{p,\eta_\nu,k}) = \mu(f)$ при $\eta_\nu \in M_k$ $(1\le k\le p)$. По крайней мере одно из этих множеств, например M_ℓ, бесконечно. Тогда нетрудно убедиться в том, что $\mu(f, X_{p,\eta,\ell}) = \mu(f)$ при всех $\eta \in (0,d)$. Если множество $X_p \setminus \{t_\ell\}$ не будет характеристическим, то для него рассуждения можно вести по изложенной выше схеме.

ЛЕММА 3. *Если X_m – характеристическое множество задачи (f, E), то* $X_m \subset \bigcap_{P^* \in V(f)} G(f-P^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $m > 1$. Допустив, что для некоторого $P_0^* \in V(f)$ найдется $t_k \in X_m$ $(1\le k\le m)$, не являющаяся экстремальной точкой $f - P_0^*$ для E, возьмем $\varepsilon \in (0,d)$ так, чтобы

$$\mu(f, X_{m,\varepsilon,k}) < \mu(f), \quad \eta_1 = \|f - P_0^*\|_{U_{t_k,\varepsilon}} < \mu(f).$$

Положим $\eta_2 = \mu(f) - \eta_1$ и рассмотрим $P = \lambda P_1^* + (1-\lambda) P_0^*$ $(0<\lambda<1)$, где $P_1^* \in V(f, X_{m,\varepsilon,k})$.

Если $\|f - P_1^*\|_{U_{t_k,\varepsilon}} < \frac{\eta_2}{\lambda}$, то

$$\|f - P\|_{U_{t_k,\varepsilon}} < \mu(f). \tag{4}$$

Кроме того, поскольку $P_1^* \in V(f, X_{m,\varepsilon,k})$, то $\|f - P_1^*\|_{X_{m,\varepsilon,k}} < \mu(f)$ и, следовательно,

$$\|f-P\|_{X_{m,\varepsilon,k}}<\mu(f). \qquad (5)$$

Из (4) и (5) вытекает, что

$$\|f-P\|_{X_{m,\varepsilon}}=\max\{\|f-P\|_{U_{t_k,\varepsilon}}, \|f-P\|_{X_{m,\varepsilon,k}}\}<\mu(f),$$

а это невозможно.

Случай $m=1$ лишь упрощает наши рассуждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X_m - характеристическое множество задачи (f,E), $P^*\in H$. Чтобы $P^*\in V(f)$, достаточно, а если $G(f-P^*)$ конечное, то и необходимо, чтобы для произвольного $P\in H$ выполнялось

$$\sup_i \lim_{\alpha\to 0+} \operatorname{vrai}\sup_{t\in U_{t_i,\alpha}} N(P,t)\geq\|f-P^*\|^2, i=1,2,\ldots,m, \qquad (6)$$

где $N(P,t)=f(t)-P^*(t))(f(t)-P(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Возьмем $\varepsilon>0$ так, чтобы $U_{t',\varepsilon}\cap U_{t'',\varepsilon}=\emptyset$ для всех $t'\neq t''$ из $G(f-P^*)$. Согласно предыдущей лемме, $G(f-P^*,X_{m,\varepsilon})=X_m$.

Поскольку $P^*\in V(f,X_{m,\varepsilon})$, то, применяя теорему 2 [10], при любом $P\in H$ получим

$$\sup_{t_0\in G(f-P^*,X_{m,\varepsilon})} \lim_{\alpha\to 0+} \operatorname{vrai}\sup_{t\in U_{t_0,\alpha}\cap X_{m,\varepsilon}} N(P,t)\geq\|f-P^*\|^2_{X_{m,\varepsilon}},$$

что равносильно (6).

Достаточность. Для произвольного $P\in H$ и почти всех $t\in E$ будет $|f(t)-P(t)|^2\geq N(\widetilde{P},t)$, где $\widetilde{P}=2P-P^*$. Отсюда

$$\|f-P\|^2_{U_{t_i,\alpha}}\geq \operatorname{vrai}\sup_{t\in U_{t_i,\alpha}} N(\widetilde{P},t) \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

и, следовательно,

$$\|f-P\|^2\geq \sup_i \lim_{\alpha\to 0+} \operatorname{vrai}\sup_{t\in U_{t_i,\alpha}} N(\widetilde{P},t) \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Из последнего неравенства, в силу (6), получим $\|f-P\|\geq\|f-P^*\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что из (6) следует

$$\sup_i \lim_{\alpha\to 0+} \operatorname{vrai}\sup_{t\in U_{t_i,\alpha}} P(t)(f(t)-P^*(t))\geq 0,\ i=1,\dots,m, \quad (7)$$

каков бы ни был $P\in H$. Действительно, если для $P_0\in H$ не имеет места (7), то $\sup_i \lim_{\alpha\to 0+} \operatorname{vrai}\sup_{t\in U_{t_i,\alpha}} N(P_1,t)<\|f-P^*\|^2\ (i=1,\dots,m)$, где $P_1=P^*-P_0$. Однако в части достаточности теоремы нельзя заменить (6) условием (7), даже когда $G(f-P^*)$ конечное. Это видно из примера:

$$E=[-1,1],\ \varphi_0(t)=1,\ f(t)=\begin{cases} t+1 & \text{при } t\in[-1,0],\\ t-1 & \text{при } t\in E\setminus[-1,0].\end{cases}$$

Для $P^*=\frac{1}{2}\varphi_0$ множество $G(f-P^*)=\{0\}$ и (7) выполняется. Тем не менее, $P^*\bar{\in} V(f)$.

Точка $t_0\in E$ называется (+)-экстремальной ((-)-экстремальной) точкой не эквивалентной нулю на E функции $g\in L^\infty(E)$, если

$$\operatorname{vrai}\sup_{t\in U_{t_0,\varepsilon}} g(t)=\|g\| \quad (\operatorname{vrai}\inf_{t\in U_{t_0,\varepsilon}} g(t)=-\|g\|)$$

при любом $\varepsilon>0$ *). Взяв в этом определении вместо $U_{t_0,\varepsilon}$ сегмент $[t_0-\varepsilon,t_0]$ ($[t_0,t_0+\varepsilon]$), определим (+)-экстремальную точку слева (справа). Точка, (+)-экстремальная и (-)-экстремальная хотя бы с одной стороны, называется сингулярной; точка, (+)-экстремальная слева (справа) и (-)-экстремальная справа (слева), не являющаяся сингулярной, называется экстремальной точкой кратности 2.

Обозначим через $G_s(g)$ ($G_2(g)$) множество всех сингулярных точек (соответственно экстремальных точек кратности 2) функции g. Положим

$$G_{s,2}(g)=G_s(g)\cup G_2(g).$$

Множество $\tilde{E}\subset E$ называется (+)-экстремальным ((-)- экстремальным) множеством функции g, когда

$$\operatorname{vrai}\sup_{t\in\tilde{E}} g(t)=\|g\| \quad (\operatorname{vrai}\inf_{t\in\tilde{E}} g(t)=-\|g\|).$$

---

*) Классификацию экстремальных точек см. в [9].

Наконец, если для g существует семейство $\{E_i, \prec\}_{i=1}^{k}$ экстремальных множеств последовательно противоположных знаков, то говорят, что g имеет k-членный альтернанс.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ - T^*-система*) на E, $P^* \in V(f)$. Если найдется характеристическое множество $X_m = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ задачи (f, E) такое, что $X_m \cap \tilde{G}(f-P^*) = \emptyset$, где

$$\tilde{G}(f-P^*) = \begin{cases} G_2(f-P^*) & \text{при } m>1, \\ G_{3,2}(f-P^*) & \text{при } m=1, \end{cases}$$

то P^* - единственный в H полином наилучшего приближения f на E.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $m>1$. Покажем, что $X_m \cap G_3(f-P^*) = \emptyset$. Предполагая противное, возьмем $t_j \in G_3(f-P^*)$, $1 \le j \le m$, и $k \ne j$. Пусть, для определенности, t_j - (+)-экстремальная и (-)-экстремальная точка слева функции $f-P^*$. Для каждого $P \in H$ найдется такое $\eta > 0$, что P на $[t_j-\eta, t_j]$ не меняет знак. Отсюда при любом $\varepsilon \in (0, d)$ вытекает

$$\|f-P\|_{U_{t_j,\varepsilon}} \ge \|f-P^*\|_{U_{t_j,\varepsilon}} = \mu(f),$$

и, следовательно, $\mu(f, X_{m,\varepsilon,k}) = \mu(f)$, а это невозможно.

Допуская, что существует $P^{**} \in V(f)$, не эквивалентный на E полиному P^*, положим $P = \lambda P^* + (1-\lambda)P^{**}$ $(0<\lambda<1)$. Тогда $X_m \cap G_{3,2}(f-P) = \emptyset$. В самом деле, пусть, например, $t_p \in G_2(f-P)$, $1 \le p \le m$, и, для определенности, точка t_p (+)-экстремальная слева и (-)-экстремальная справа. Поскольку $t_p \,\bar{\in}\, G_{3,2}(f-P^*)$, то t_p не является либо (+)-экстремальной слева, либо (-)-экстремальной справа точкой функции $f-P^*$. Поэтому найдется такое $\varepsilon' > 0$, что выполняется по крайней мере одно, например первое, из соотношений:

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_p-\varepsilon', t_p]} (f(t)-P^*(t)) < \mu(f), \quad \operatorname*{vrai\,inf}_{t \in [t_p, t_p+\varepsilon']} (f(t)-P^*(t)) > -\mu(f).$$

Отсюда $\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [t_p-\varepsilon', t_p]} (f(t)-P(t)) < \mu(f)$, что невозможно, так как t_p - (+)-экстремальная точка слева функции $f-P$.

При некотором $\varepsilon_0 \in (0, d)$ будет $X_{m,\varepsilon_0} \cap G_{3,2}(f-P) = \emptyset$. В

---

*) Определение T^*-системы и другие см. в [11].

противном случае существует ℓ $(1 \le \ell \le m)$, для которого $U_{t_\ell,\varepsilon} \cap$ $\cap G_{3,2}(f-P) \ne 0$, каково бы ни было $\varepsilon \in (0,d)$. В силу замкнутости $G_{3,2}(f-P)$, получим $t_\ell \in G_{3,2}(f-P)$, что противоречит доказанному выше.

Поскольку $P \in V(f, X_{m,\varepsilon_0})$, то, проводя с необходимыми изменениями рассуждения из доказательства части необходимости теоремы 2 [II], построим $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_{n+2}^*$ - экстремальные точки последовательно противоположных знаков функции $f-P$, а значит, $f-P^*$ и $f-P^{**}$. Согласно лемме 2 [II], t_i^* $(i=1,\ldots,n+2)$ является 0-точкой полинома $\widetilde{P}=P^*-P^{**}$, а это противоречит условию $\widetilde{P} \in H$.

В случае $m=1$ доказательство можно провести по этой же схеме.

В заключение приношу искреннюю благодарность Г.И.Натансону и Г.Ш.Рубинштейну за ряд ценных советов, использованных в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ШНИРЕЛЬМАН Л.Г. О равномерных приближениях. - "Изв. АН СССР. Сер. мат.", 1938, т.2, № 1, с.53-60.
2. РЕМЕЗ Е.Я. О чебышевских приближениях в комплексной плоскости. - "ДАН СССР", 1951, т.77, № 6, с. 965-968.
3. ВИДЕНСКИЙ В.С. О равномерном приближении в комплексной плоскости. - "Успехи мат. наук", 1956, т.II, № 5; с.169-175.
4. ЛЕБЕДЕВ Н.А., РЫЖАКОВ И.Ю. О чебышевском приближении функций, непрерывных на компактных множествах комплексной плоскости. - "Вест. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика, астрономия", 1969, т.3, № 13, с.39-40.
5. КОРОБКОВА М.Б. О равномерном приближении на компактных подмножествах действительной прямой. - "Мат. заметки", 1974, т. 16, № 2, с.325-336.
6. ВИДЕНСКИЙ В.С. Качественные вопросы теории наилучшего приближения функций комплексного переменного. - В кн.: Исследования по современным пробчемам теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1960. с. 258-272.
7. WALSH J.L. Best-approximations polynomials of given degree. - "Proc.Sympos.Math.",1956, v.6, 213-218.

8. ЧЕРНИК Б.П. Об одном обобщении понятия слабо чебышевской системы. - Наст. сб., с. 55-64.
9. ЯРАХМЕДОВ Г.Я. К одной теореме П.Л. Чебышева. - "Успехи мат. наук", 1965, т. 20, № 5, с. 251-256.
10. ЯРАХМЕДОВ Г.Я. К одной теореме А.Н.Колмогорова. - "Изв. вузов. Математика", 1972, № 3, с.103-107.
11. ЯРАХМЕДОВ Г.Я. К вопросу о единственности многочлена наилучшего приближения в метрике M. - "Изв. вузов. Математика", 1966, № 6, с. 1977-186.

Поступила в ред.-изд.отдел
26.04.1978 г.