Выпуск 21(38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Выпуклый анализ

УДК 518.9

ОПОРНАЯ ФУНКЦИЯ ЯДРА ВЫПУКЛОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЫ

В.А.Васильев

В заметке вычисляется опорная функция ядра $C(v)$ выпуклой кооперативной игры n лиц. Найденная формула используется для установления внутренней характеристики ядер одного класса кооперативных игр.

Приведем необходимые определения. Пусть Γ - произвольная кооперативная игра n лиц, заданная в форме характеристической функции $v_\Gamma : 2^N \to R$ (здесь и далее $N=\{1,\dots,n\}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1,2]. Кооперативная игра Γ называется выпуклой, если функция $v=v_\Gamma$ удовлетворяет условию:

$$v(S\cup T)+v(S\cap T)\geq v(S)+v(T) \qquad (1)$$

для всех $S,T\subseteq N$. Совокупность всех выпуклых игр n лиц будем обозначать через $\mathfrak{S}(N)$.

Выпуклые игры введены Шепли в работе [1]. Там же установлены их характеристические свойства и обоснована важность этого класса для общей теории кооперативных игр. В дальнейшем используется только один факт из [1] - непустота ядер выпуклых игр. Напомним соответствующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. Ядром кооперативной игры (N,v) называется совокупность всех максимальных элементов множества $X_v=\{x\in R^n \mid x_i\geq v(\{i\}), x(N)=v(N)\}$ *) относительно доминирования

*) Здесь и далее $x(S)\triangleq\sum_{i\in S}x_i$ для любых $x\in R^n$, $S\subseteq N$.

$\succ_{dom}$:

$$y \succ_{dom} z \Longleftrightarrow \exists S \subseteq N (y(S) \leq v(S),\ y_i > z_i\ (i \in S)). \qquad (2)$$

Ядро кооперативной игры $\Gamma=(N,v)$ будем обозначать через $C(v)$. Наконец, через H_v обозначим опорную функцию множества $C(v)$:

$$H_v(p) \triangleq \sup\{p(x) \mid x \in C(v)\} \qquad (p \in R^n).^{*)}$$

Устанавливаемая ниже формула для $H_v (v \in \mathscr{G}(N))$ записывается через последовательные разности v_ω функции v, однозначно определяемые системой линейных уравнений:

$$v_\emptyset \triangleq 0, \qquad v(S) = \sum_{\omega \subseteq S} v_\omega \qquad (S \subseteq N) \qquad (3)$$

(см.[3]). Величины v_ω $(\omega \subseteq N)$ имеют смысл суммарных дивидендов, находящихся в распоряжении союзов $\omega \subseteq N$, образуемых в рамках игры Γ (см.[3,4]). Укажем еще, что эти величины совпадают с соответствующими полиномиальными разностями функции v, введенными для более общей ситуации в работе[5].

В принятых обозначениях основной результат работы формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА. Для любой выпуклой игры $\Gamma=(N,v)$ функция H_v имеет вид

$$H_v(p) = \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega \cdot \max\{p_i \mid i \in \omega\} \qquad (p \in R^n). \qquad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in \mathscr{G}(N)$ и p - произвольный элемент из R^n. Обозначим через $\alpha(p)$ число различных значений, которые принимают компоненты вектора p, и положим

$$T_k = \{i \in N \mid p_i \leq \min_{s \in N \setminus T_{k-1}} p_s\}, \quad k=1,\dots,\alpha(p)$$

(здесь $T_0 \triangleq \emptyset$).

Нетрудно проверить, что в рассматриваемой ситуации ядро $C(v)$ представляет собою совокупность всех решений системы линейных неравенств

$$x(S) \geq v(S) \qquad (S \subseteq N), \qquad (5)$$

*) $p(x)$ - скалярное произведение векторов p и x.

удовлетворяющих дополнительному ограничению

$$x(N) = v(N). \tag{6}$$

Поэтому $C(v)$ - ограниченный многогранник и, стало быть, существует вектор $x_p \in C(v)$, удовлетворяющий равенству

$$p(x_p) = H_v(p). \tag{7}$$

Положим $\mathcal{T}_p = \{S \mid x_p(S) = v(S)\}$ и покажем, что

$$T_k \in \mathcal{T}_p \qquad (k=1,\ldots,\alpha(p)). \tag{8}$$

Для этого заметим, что $\varnothing, N \in \mathcal{T}_p$ и, кроме того, $\mathcal{T}_p$ замкнуто относительно операций пересечения и объединения. Действительно, пусть $S_1, S_2 \in \mathcal{T}_p$. Поскольку $x_p \in C(v)$,

$$\begin{aligned} &x_p(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1 \cup S_2), \\ &x_p(S_1 \cap S_2) \geq v(S_1 \cap S_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда, в силу выбора S_1, S_2 и выпуклости v, имеем

$$x_p(S_1 \cup S_2) + x_p(S_1 \cap S_2) \geq v(S_1 \cup S_2) + v(S_1 \cap S_2) \geq x_p(S_1) + x_p(S_2). \tag{10}$$

Так как $x_p(S_1 \cup S_2) + x_p(S_1 \cap S_2) = x_p(S_1) + x_p(S_2)$, то из (10) вытекает $x_p(S_1 \cup S_2) + x_p(S_1 \cap S_2) = v_p(S_1) + v_p(S_2)$, что вместе с (9) и дает требуемые включения $S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 \in \mathcal{T}_p$.

Переходя к доказательству соотношений (8), зафиксируем $k \leq \alpha(p)$ и рассмотрим семейство $\mathcal{T}_p^k = \{S \in \mathcal{T}_p \mid T_k \subseteq S\}$. Так как $\mathcal{T}_p$ замкнуто относительно операции пересечения, то $\mathcal{T}_p^k$ содержит наименьший (по включению) элемент S_k. Покажем, что $S_k = T_k$. Поскольку $T_{\alpha(p)} = N$, можно, не уменьшая общности, считать $k < \alpha(p)$. Допустим, что $T_k \neq S_k$. Выберем произвольный элемент $i \in S_k \setminus T_k$ и для каждого $j \in T_k$ определим

$$\mathcal{T}_{ij} = \{S \subseteq N \mid i \notin S,\ j \in S\},$$

$$\delta_{ij} = \min\{x_p(S) - v(S) \mid S \in \mathcal{T}_{ij}\}.$$

Возможны две альтернативы:

1) $\forall j \in T_k \ (\delta_{ij} = 0)$,

2) $\exists j_0 \in T_k \ (\delta_{ij_0} > 0)$.

Пусть реализуется первый случай. Выберем произвольные $S_{ij} \in \mathcal{T}_{ij} \cap \mathcal{T}_p$ $(j \in T_k)$ и положим $T_k^i = (\bigcup_{j \in T_k} S_{ij}) \cap S_k$. Тогда, как уже отмечалось, $T_k^i \in \mathcal{T}_p$ и, в силу построения, $T_k \subseteq T_k^i \subseteq S_k$ и $i \notin T_k^i$. Но это противоречит минимальности S_k.

Рассмотрим вторую альтернативу. Выберем произвольное $\varepsilon\in(0,\delta_{ij_0})$ и положим $x_p^\varepsilon=x_p+\varepsilon e_i-\varepsilon e_{j_0}$, где e_i, e_{j_0} - соответствующие орты из R^n. Из определения x_p^ε вытекают соотношения

$$x_p^\varepsilon(S)=\begin{cases} x_p(S), & i,j_0\in S, \\ x_p(S)+\varepsilon, & i\in S,\ j_0\notin S, \\ x_p(S)-\varepsilon, & i\notin S,\ j_0\in S, \end{cases}$$

откуда, в силу выбора ε, получаем: $x_p^\varepsilon\in C(v)$. В то же время, поскольку $p_i>p_{j_0}$, справедливо неравенство

$$p(x_p^\varepsilon)>p(x_p),$$

что противоречит (7).

Итак, $S_k=T_k$, что, ввиду произвольности k, и означает справедливость (8).

Перейдем, наконец, к доказательству формулы (4). Из (8) и определения T_k $(k=1,\dots,\alpha(p))$ имеем

$$p(x_p)=\sum_{k=1}^{\alpha(p)}\bar p_k(x_p(T_k\setminus T_{k-1}))=\sum_{k=1}^{\alpha(p)}\bar p_k(v(T_k)-v(T_{k-1})), \quad (11)$$

где

$$\bar p_k=max\{p_i\,|\,i\in T_k\}.$$

Далее, из определения величин v_ω получаем

$$v(T_k)-v(T_{k-1})=\sum_{\omega\in T_{k-1,k}}v_\omega, \quad (12)$$

где

$$T_{k-1,k}=\{\omega\subseteq N\,|\,\omega\subseteq T_k,\ \omega\cap(T_k\setminus T_{k-1})\neq\emptyset\}.$$

Учитывая, что $max\{p_i|i\in\omega\}=\bar p_k$ для всех $\omega\in T_{k-1,k}$, получаем на основании (11),(12) требуемое:

$$p(x_p)=\sum_{\omega\subseteq N}v_\omega\cdot max\{p_i\,|\,i\in\omega\}.$$

Приведем некоторые следствия полученного результата. Прежде всего следует отметить свойство аддитивности ядра выпуклой игры, вытекающее непосредственно из формулы (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $v_1,v_2\in\mathcal{G}(N)$, то $C(v_1+v_2)=C(v_1)\dot{+}C(v_2)$.

Подчеркнем в связи с этим, что в общей ситуации правилом является несовпадение $C(u+w)$ и $C(u)+C(w)$.

Содержанием следующего предложения является внутренняя характеристика ядер из класса $W_+(N)=\{v \mid v_\omega \geq 0\ (|\omega| \geq 2)\}$.*) Оказывается, что в этом случае элемент $x \in R^n$ принадлежит ядру $C(v)$ в том и только в том случае, если каждая его компонента (выигрыш соответствующего участника) складывается в результате некоторого распределения дивидендов v_ω $(\omega \subseteq N)$ между участниками соответствующих союзов. Дадим точные формулировки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Элемент $x \in R^n$ называется A-дележом игры $\Gamma=(N,v)$, если он представим в виде

$$x_i = \sum_{\omega \subseteq N / i \in \omega} q_i^\omega \cdot v_\omega \qquad (i \in N),$$

где $q_i^\omega (i \in \omega \subseteq N)$ - некоторые неотрицательные числа, удовлетворяющие равенствам

$$\sum_{i \in \omega} q_i^\omega = 1 \qquad (\omega \subseteq N).$$

Совокупность всех A-дележей игры (N,v) будем обозначать через $A(v)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $v \in W_+(N)$, то $C(v)=A(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $U_\omega = \{x \in R^n_+ \mid x(N)=1, x_i=0\ (i \notin \omega)\}$. Тогда, как нетрудно проверить, $A(v)=\sum_{\omega \subseteq N} v_\omega \cdot U_\omega$. Поэтому, если $v \in W_+(N)$, то опорная функция $\tilde{H}_v$ множества $A(v)$ вычисляется по формуле

$$\tilde{H}_v(p) = \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega \cdot max\{p_i \mid i \in \omega\} \qquad (p \in R^n).$$

Для завершения доказательства предложения 2 остается только заметить, что $W_+(N)$ представляет собою собственную часть $\mathscr{C}(N)$. Последнее вытекает непосредственно из определения величин v_ω (соотношения (3)) и их неотрицательности при $|\omega| \geq 2$. Итак, $\tilde{H}_v = H_v$, откуда, в силу выпуклости $C(v)$ и $A(v)$, и вытекает их совпадение.

Отметим, что равенство $C(v)=A(v)$ полностью характеризует класс $W_+(N)$; в частности, если $u \in \mathscr{C}(N) \setminus W_+(N)$, то $A(u) \setminus C(u) \neq 0$.

В заключение приведем простое доказательство известной теоремы Шепли о крайних точках $Ex\,C(v)$ ядра выпуклой игры

---

*) Здесь $|\omega|$ - число элементов в ω.

$\Gamma = (N, v)$, основанное на использовании опорной функции H_v. Схема этого доказательства представляется также более удобной для перенесения на бесконечный случай (который предполагается рассмотреть в отдельной статье).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [I]. Пусть $v \in \mathcal{G}(N)$. Тогда

$$Ex\, C(v) = \{x^{\pi} \mid \pi \in \Pi\},$$

где Π - множество всех перестановок N, а

$$x_k = v(S_k^{\pi}) - v(S_{k-1}^{\pi}) \quad (\pi \in \Pi, k = 1, \ldots, n),$$

$$S_k = \{i \in N \mid \pi(i) \le k\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C(v)$ - выпуклый многогранник, то $x \in Ex\, C(v)$ тогда и только тогда, когда существует открытое множество $G^x \subseteq R^n$ такое, что для каждого элемента $p \in G^x$ множество $M(p) = \{y \in C(v) \mid H_v(p) = p(y)\}$ состоит ровно из одного элемента x. Но каждая окрестность в R^n содержит точку, все координаты которой различны. Следовательно, $x \in Ex\, C(v)$ тогда и только тогда, когда существует $p \in R^n$ такой, что $\alpha(p) = n$, и (на основании соотношений (8))

$$x_k = v(T_k) - v(T_{k-1}) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Если теперь положить $\pi(s_i) = i \quad (i = 1, \ldots, n)$, где s_i выбирается из условия $i \in T_{s_i} \setminus T_{s_i - 1}$, то очевидно, что $x = x^{\pi}$. Итак, $Ex\, C(v) = \{x^{\pi} \mid \pi \in \Pi\}$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

I. SHAPLEY L.S. Cores of convex games. - " Intern. J.Game Theory", 1971, N 1, 11-26.

2. РОЗЕНМЮЛЛЕР И. Кооперативные игры и рынки. М.,"Мир", 1974.

3. ВАСИЛЬЕВ В.А. Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации. - В кн.: Оптимизация. Вып. 16 (33). Новосибирск, 1975, с. 99-120.

4. HARSANYI J.S. A bargaining model for the cooperative - person game. - "Ann.Math.Studies", 40,1959, 325-355.

5. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. 9 (26). Новосибирск, 1973, с.157-165.

Поступила в ред.-изд.отдел
1.06.1978 г.