Выпуск 20(37) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МОДЕЛЯХ НЕЙМАНА - ГЕЙЛА

А.М. Рубинов

Как известно, бесконечная траектория модели Неймана - Гейла называется оптимальной (эффективной), если в каждый момент времени состояние этой траектории лежит на паретовской границе соответствующего множества достижимости. Это определение неэффективно в том смысле, что не указана явно экстремальная задача, решением которой является оптимальная траектория. В настоящей работе показывается, что если модель обладает состоянием равновесия, то существует суперлинейный функционал q, с помощью которого можно явно строить оптимальные траектории. Точнее говоря, является оптимальной траектория $X=(x_t)$, исходящая из точки x_0 и построенная по следующему правилу: x_1 есть решение задачи выпуклого программирования $q(x)\longrightarrow max$ при условии $x\in a(x_0),\ldots$; x_t есть решение задачи $q(x)\longrightarrow max$ при условии $x_t\in a(x_{t-1}),\ldots$ Таким образом, существуют такие (вообще говоря, нелинейные) цены, не зависящие ни от начального состояния, ни от времени, что локальная оптимизация по этим ценам приводит к глобальной оптимальности (в рамках модели).

Ниже используются без пояснений терминология и обозначения книги [1]. Кроме того, используется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если a - суперлинейное отображение, то отображение $(a')^{-1}$, обратное двойственному к a отображению a', называется сопряженным к a и обозначается через a^*.

I. Рассмотрим модель Неймана - Гейла $\mathcal{Z}$, производственное отображение a которой определено на конусе R^n_+ (и принимает значения в совокупности выпуклых компактных подмножеств этого конуса).

Введем основное в дальнейшем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Суперлинейный неотрицательный функционал q, определенный на R^n_+, называется эффективным, если найдется число α такое, что для всех $x \geq 0$ выполняется соотношение

$$\max_{y \in a(x)} q(x) = \alpha q(x). \tag{I}$$

Число α, участвующее в этом определении, назовем показателем эффективности функционала q. Из формулы (I) непосредственно следует, что если q - эффективный функционал с показателем α, то для любой траектории $\chi = (x_t)$ модели $\mathcal{Z}$ выполняются неравенства

$$q(x_0) \geq \frac{q(x_1)}{\alpha} \geqslant \frac{q(x_2)}{\alpha^2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{q(x_t)}{\alpha^t}. \tag{2}$$

Траекторию $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)$ назовем оптимальной в смысле q, если на этой траектории в формуле (2) реализуются равенства, т.е.

$$q(\bar{x}_0) = \frac{q(\bar{x}_1)}{\alpha} = \cdots = \frac{q(\bar{x}_t)}{\alpha^t} = \cdots \tag{3}$$

Непосредственно из (3) следует, что построение оптимальной в смысле q траектории сводится к решению серии задач выпуклого программирования, а именно, если состояние $\bar{x}_t$ траектории $\bar{\chi}$ в момент t уже известно, то состояние $\bar{x}_{t+1}$ этой траектории в момент $t+1$ определяется как решение экстремальной задачи: найти $\max q(x)$ при условии $x \in a(\bar{x}_t)$. Отсюда вытекает, в частности, что из любой точки $x \geqslant 0$ исходят траектории, оптимальные в смысле q. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. *Пусть точка $x \geqslant 0$ такова, что $q(x) > 0$. Тогда оптимальная в смысле q траектория является оптимальной (эффективной) траекторией модели $\mathcal{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оптимальная в смысле q траектория $\bar{X}=(\bar{x}_t)$, исходящая из x, неэффективна. Тогда при некоторых натуральном T и $\lambda>1$ выполняется $\lambda\bar{x}_T\in a^T(x)$. Отсюда, привлекая (I), получим

$$\lambda q(\bar{x}_T)=q(\lambda\bar{x}_T)\le\max_{y\in a^T(x)}q(y)=\max_{u\in a^{T-1}(x)}\max_{y\in a(x)}q(y)=$$

$$=\max_{u\in a^{T-1}(x)}\alpha q(u)=\alpha\max_{u\in a^{T-1}(x)}q(u)=\ldots=\alpha^T q(x).$$

Это, однако, невозможно, так как $\lambda>1$ и $q(\bar{x}_T)=\alpha^T q(x)$. Предложение доказано.

Отметим, что неравенство $q(x)>0$ заведомо выполняется для всех внутренних точек конуса R^n_+. Таким образом, эффективный функционал q позволяет эффективным образом строить некоторые оптимальные траектории, исходящие из внутренних точек конуса R^n_+.

2. Здесь описываются все эффективные функционалы и доказывается их существование. Выпуклое множество $\xi<(R^n_+)^*$ называется собственным множеством отображения a^*, если при некотором $\alpha>0$ выполняется равенство $\alpha\xi=a^*(\xi)$ и, кроме того, замыкание ξ не содержит нуля. Указанное число α называется собственным числом отображения a^*.

Покажем, что каждый темп роста α отображения a является собственным числом отображения a^*. В самом деле, число α является, как легко видеть, темпом роста отображения $a''=na$ второго двойственного к a. Поэтому ([I], с. I06) число α^{-1} является темпом роста отображения a' и ([I], с. I39) число α является собственным числом отображения $(a')^{-1}=a^*$. Заметим, что каждое собственное множество ξ отображения a^* является $(R^n_+)^*$-устойчивым, т.е. $\xi+(R^n_+)^*\subset\xi$.

ЛЕММА I. Пусть ξ - собственное множество отображения a^*, отвечающее собственному числу α. Тогда функционал q, определенный формулой $q(x)=\inf\{f(x): f\in\xi\}\ (x\geq 0)$, является эффективным с показателем эффективности α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему двойственности (см. [I], с. 83) и теорему о минимаксе, имеем для $x\geq 0$

$$\max_{y\in a(x)} g(y) = \max_{y\in a(x)} \inf_{g\in\mathfrak{F}} g(y) = \inf_{g\in\mathfrak{F}} \max_{y\in a(x)} g(y) =$$

$$= \inf_{g\in\mathfrak{F}} \inf_{f\in a^*(g)} f(x) = \inf_{f\in a^*(\mathfrak{F})} f(x) = \inf_{f\in\alpha\mathfrak{F}} f(x) =$$

$$= \alpha \inf_{f\in\mathfrak{F}} f(x) = \alpha q(x).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Если модель $\mathcal{Z}$ имеет состояние равновесия, то эффективные функционалы существуют.

ЛЕММА 2. Пусть q – эффективный функционал с показателем эффективности α. Тогда *) субдифференциал ∂q этого функционала является собственным множеством отображения a^*, отвечающим собственному числу α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение эффективного функционала, теорему двойственности и теорему о минимаксе, имеем для $x \geqslant 0$

$$\alpha q(x) = \alpha \inf_{f\in\partial q} f(x) = \max_{y\in a(x)} \inf_{g\in\partial q} g(y) =$$

$$= \inf_{g\in\partial q} \max_{y\in a(x)} g(y) = \inf_{g\in\partial q} \inf_{f\in a^*(g)} f(x) = \inf_{f\in a^*(\partial q)} f(x).$$

Проверим, что множество $a^*(\partial q)$ замкнуто.

В самом деле, пусть $f_n \to f$, $f_n \in a^*(\partial q)$. Тогда найдутся функционалы $g_n \in \partial q$ такие, что $g_n \in (a^*)^{-1} = a'(f_n)$ (n = I,2,...). Так как последовательность (f_n) ограничена, то и последовательность (g_n) ограничена. Не умаляя общности, можно считать, что существует $\lim g_n = g$. Отсюда следует, что $f \in a^*(\partial q)$. Таким образом, множество $a^*(\partial q)$ замкнуто.

---

*) По терминологии [I] $\partial q = U_q$ – опорное множество функционала q.

Кроме того, это множество $(R^n_+)^*$-устойчиво. Из указанных свойств $a^*(\partial q)$ и равенства $\alpha q(x) = \inf\limits_{f \in a^*(\partial q)} f(x)$ вытекает (см. [I], с. 36), что $\alpha \partial q = a^*(\partial q)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из лемм I и 2 следует, что замыкание собственного множества $\mathfrak{F}$ отображения a^* является собственным множеством. Действительно, так как собственное множество $(R^n_+)^*$-устойчиво, то замыкание $\mathfrak{F}$ совпадает с субдифференциалом ∂q функционала $q(x) = \inf\{f(x) : f \in \mathfrak{F}\}$.

Из лемм I и 2 и следствия I вытекает следующая

ТЕОРЕМА I. Пусть модель Неймана - Гейла задается производственным отображением $a : R^n_+ \longrightarrow \Pi(R^n_+)$. Тогда существуют эффективные для этой модели функционалы. При этом сублинейный функционал $q : R^n_+ \longrightarrow R_+$ эффективен с показателем эффективности α в том и только в том случае, когда его субдифференциал ∂q является собственным множеством отображения a^*, отвечающим собственному числу α.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение a нормально и, кроме того, неразложимо в том смысле, что $a(\Gamma)$ не содержится в Γ для любой грани конуса R^n_+. Тогда для любого эффективного функционала q его показатель эффективности α совпадает с неймановским темпом роста модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см. [I], с. 128), отображение a имеет собственный нормальный компакт $\mathfrak{F}$. Из неразложимости a вытекает, что этот компакт телесен и поэтому ([I], с. 130) соответствующее ему собственное число совпадает с неймановским темпом роста λ отображения a. Пусть q - эффективный функционал с показателем α. Тогда в силу теоремы I выполняется равенство $a^*(\partial q) = \alpha \partial q$. Имеем

$$\sup_{x\in\mathfrak{F}} q(x)=\sup_{x\in\mathfrak{F}}\inf_{f\in\partial q} f(x)=\sup_{x\in\mathfrak{F}}\inf_{f\in\lambda^{-1}a^*(\partial q)} f(x)=$$

$$=\alpha^{-1}\sup_{x\in\mathfrak{F}}\inf_{f\in a^*(\partial q)} f(x)=\alpha^{-1}\sup_{x\in\mathfrak{F}}\inf_{g\in\partial q}\inf_{f\in a^*(g)} f(x)=$$

$$=\alpha^{-1}\sup_{x\in\mathfrak{F}}\inf_{g\in\partial q}\max_{y\in a(x)} g(y)=\alpha^{-1}\sup_{x\in\mathfrak{F}}\max_{y\in a(x)}\inf_{g\in\partial q} g(y)=$$

$$=\alpha^{-1}\sup_{y\in a(\mathfrak{F})} q(y)=\alpha^{-1}\sup_{y\in\lambda\mathfrak{F}} q(y)=\lambda\cdot\alpha^{-1}\sup_{y\in\mathfrak{F}} q(y).$$

Так как $\mathfrak{F}$ - телесное компактное множество, то $0<\sup_{x\in\mathfrak{F}} q(x)<+\infty$. Отсюда следует, что $\alpha=\lambda$. Теорема доказана.

Остановимся теперь на том случае, когда модель $\mathcal{Z}$ нормальна и имеет строгое состояние равновесия $(\alpha,(\bar{x},\alpha\bar{x}),\bar{p})$ (см. [I] , с. 235). Не умаляя общности, считаем, что $\alpha=1$. В этом случае, как показано в [2] , существует эффективный функционал $\tilde{q}: R^n_+\longrightarrow R_+$, обладающий следующим свойством: траектория $\chi=(x_t)$ модели $\mathcal{Z}$, исходящая из внутренней точки x конуса R^n_+, оптимальна в том и только в том случае, когда $x_t\longrightarrow\tilde{q}(x)\bar{x}$. Покажем, что $\tilde{q}$ - единственный (с точностью до множителя) эффективный функционал, имеющий показатель $\alpha=1$. В самом деле, пусть q - какой-то эффективный функционал с этим показателем, $x_0\gg 0$ и $\chi=(x_t)$ - оптимальная в смысле q траектория, исходящая из x_0 . Тогда $q(x_0)=q(x_1)=\ldots=q(x_t)=\ldots$ Так как траектория χ оптимальна, то $x_t\to\tilde{q}(x_0)\bar{x}$ и потому $q(x_t)\to\tilde{q}(x_0)q(\bar{x})$. Нормируя функционал q равенством $q(\bar{x})=1$, получим, что q совпадает с $\tilde{q}$ на $\operatorname{int} R^n_+$ и, следовательно, $q=\tilde{q}$. Из сказанного вытекает, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть модель $\mathcal{Z}$ имеет строгое состояние равновесия с темпом роста α . Тогда отображение a^* имеет единственное замкнутое собственное множество, отвечающее собственному числу α .

3. Здесь изучаются характеристики траекторий, оптимальных в смысле эффективного функционала q . Напомним, что по-

следовательность линейных функционалов - цен - (f_t), где $f_t \geq 0$, называется характеристикой траектории $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)$ модели $\mathcal{Z}$, если $f_t(\bar{x}_t) = const > 0$ и последовательность $(f_t(x_t))$ убывает для любой траектории $\chi = (x_t)$ этой модели. Отметим, что последовательность функционалов $(\alpha^t g)$, где α - показатель эффективности функционала g, можно рассматривать как некоторый аналог характеристики оптимальной в смысле g траектории. (Этот аналог определяется "нелинейными ценами".) Для описания характеристики оптимальной в смысле g траектории понадобится следующее простое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть g - эффективный функционал с показателем эффективности α. Тогда множество $\eta = \{x \geq 0: g(x) \geq 1\}$ является собственным множеством отображения a^{-1}, обратного отображению a, отвечающим собственному числу α^{-1}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in \eta$, $x \in a^{-1}(y)$. Тогда $y \in a(x)$, откуда следует, что $\alpha g(x) \geq g(y)$. Так как $g(y) \geq 1$, то $g(x) \geq \alpha^{-1}$, т.е. $x \in \alpha^{-1}\eta$. Таким образом, доказано включение $a^{-1}(\eta) \subset \alpha^{-1}\eta$. Пусть теперь $x \in \eta$. Найдется элемент $y \in \alpha\eta$ такой, что $g(y) = \alpha g(x) \geq \alpha$. Отсюда следует, что $y \in \alpha\eta$. Из соотношения $x \in a^{-1}(y) \subset a^{-1}(\alpha\eta)$ вытекает, что $\alpha^{-1}x \in a^{-1}(\eta)$. Таким образом, включение $\alpha^{-1}\eta \subset a^{-1}(\eta)$, а вместе с ним и предложение, доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для случая, когда отображение a нормально, справедливость предложения установлена по сути дела в работе Рокафеллера [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предложение 3 позволяет по каждому собственному множеству отображения $a^* = (a')^{-1}$, отвечающему собственному числу α, строить некоторым каноническим способом собственное замкнутое множество отображения a^{-1}, отвечающее собственному числу α^{-1}. При этом разным замкнутым собственным множествам отображения $(a')^{-1}$ отвечают разные собственные множества отображения .

Наряду с моделью $\mathcal{Z}$, определяемой отображением a, рассмотрим ее нормальную оболочку $n\mathcal{Z}$, определяемую отображением na. Непосредственно из определений следует, что эффективный (для модели $\mathcal{Z}$) функционал q является эффективным и для модели $n\mathcal{Z}$ с тем же показателем эффективности. Из предложения 3 следует, что множество $\eta=\{x: q(x)\geq 1\}$ является собственным множеством отображения $(na)^{-1}=(a')^{-1}=(a')^{*}$, отвечающим собственному числу α^{-1} (где, как и выше, α – показатель эффективности q). Из леммы I следует, что функционал q^*, определенный определенный на $(R^n_+)^*$ формулой $q^*(f)=\inf\{f(x): x\in\eta\}$, является эффективным с показателем эффективности α^{-1} для модели $\mathcal{Z}'$, двойственной к $\mathcal{Z}$. Выразим q^* через q. Имеем, учитывая, что $q(x)\neq 0$ при $x\gg 0$,

$$q^*(f)=\inf_{x\in\eta} f(x)=\inf_{q(x)\geq 1} f(x)=$$

$$=\inf_{q(x)\geq 1, x\gg 0} f(x)=\inf_{x\gg 0}\frac{f(x)}{q(x)}.$$

Из полученной формулы легко следует, что при всех $x\in R^n_+$ и $f\in(R^n_+)^*$ выполняется неравенство

$$q(x)q^*(f)\leq f(x). \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть q – эффективный функционал для модели $\mathcal{Z}$ и точка $x_0\geq 0$ такова, что $q(x_0)>0$ и $\partial q(x_0)\neq\emptyset$. Пусть, далее, $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ – траектория модели $\mathcal{Z}$, исходящая из точки x_0 и оптимальная в смысле q. Тогда любая траектория $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$, исходящая из точек, лежащих в $\partial q(x_0)$, и оптимальная в смысле q^*, является характеристикой траектории $\bar{\chi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть траектория $\bar{\varphi}$ исходит из точки $f_0\in\partial q(x_0)$. Так как $f_0\in\partial q$, то $q^*(f_0)=\inf_{x\geq 0, q(x)>0}\frac{f_0(x)}{q(x)}\geq 1$. Поскольку $f_0(x_0)=q(x_0)>0$, то $q^*(f_0)=1$.

Пусть α – показатель эффективности функционала q. Из определения траекторий $\bar{\chi}$ и $\bar{\varphi}$ следует, что

$$q(x_0)=\alpha^{-1}q(\bar{x}_1)=\ldots=\alpha^{-t}q(\bar{x}_t)=\ldots$$

$$\ldots q^*(f_0)=\alpha q^*(\bar{f}_1)=\ldots=\alpha^{t}q^*(\bar{f}_t)=\ldots \tag{5}$$

Откуда, используя равенства $f_0(x_0) = q(x_0)$ и $q^*(f_0)=1$, получим

$$f_0(x_0) = q(x_0) = q(x_0)q^*(f_0) = \ldots = q(\bar{x}_t)\, q^*(\bar{f}_t) = \cdots$$

Из формулы (4) теперь следует, что при всех натуральных t выполняется неравенство

$$f_t(\bar{x}_t) \geq q(\bar{x}_t)\, q^*(\bar{f}_t) = f_0(x_0).$$

Поскольку $\bar{\chi}$ и $\bar{\varphi}$ – траектории моделей $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$ соответственно, последовательность $(\bar{f}_t(x_t))$ убывает. Таким образом, $\bar{f}_t(\bar{x}_t) = q(x_0)$ $(t = 1,2,\ldots)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\bar{\varphi}$ – траектория, о которой шла речь в теореме. Тогда $\alpha^t \bar{f}_t \subset \partial q(\bar{x}_t)$ при всех t. В самом деле, из (5) следует, что $q^*(\alpha^t f_t) = 1$, откуда, привлекая (4), получим, что $\alpha_t f_t \in \partial q$. В то же время $\alpha^t \bar{f}_t(\bar{x}_t) = \alpha^t q(x_0) = q(\bar{x}_t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., "Наука", 1973, 336 с.
2. РУБИНОВ А.М. Оптимальные траектории в моделях Неймана – Гейла со строгим состоянием равновесия. – В кн.: Оптимизация. Вып. 17 (34). Новосибирск, 1975, с. 40–45.
3. ROCKAFELLAR R.T. Monotone processes of convex and concave type. – "Memoirs of Amer. Math. Soc.", 1967, N.77.

Поступила в ред.-изд. отд.
18.X.1977 г.