1971 г.   О П Т И М И З А Ц И Я   Выпуск 2(19)

УДК 51.330.115

U- ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Я.И. Орлов

В работе рассматривается задача максимизации суммарной полезности в модели экономической динамики. (по поводу определений см., например, [4] и разделы 1^0 - 2^0 настоящей статьи). Необходимые условия оптимальности выводятся из свойств эффективных траекторий (см. 3^0). В важном частном случае устанавливаются необходимые условия оптимальности в виде равенств и алгоритм приближенного решения задачи; в очень узком классе моделей решение задачи даётся уравнением инвариантной кривой. В конце статьи предлагается обобщение некоторых полученных результатов на более широкий класс моделей.

1^0. Нам будет удобнее сформулировать интересующую нас задачу как экстремальную в $S(R^n)$ -пространстве последовательностей элементов из n -мерного арифметического пространства R^n.

Дан выпуклый компакт $\Omega \subset S(R^n_+)$, где R^n_+ - положительный ортант R^n. Сходимость в $S(R^n)$ поточечная. Любой последовательности $\{c_t\}_{t=1}^{\infty} \in \Omega$, $c_t \in R$ сопоставляется $\{\gamma_t\}_{t=1}^{\infty}$, где $\gamma_t = \sum_{\tau=1}^{t} u_\tau (c_\tau)$, $u_t : R^n_+ \to R_+$, функции u_t непрерывны и вогнуты на R^n_+, $u_t(0)=0$ $t=1,\ldots$. Условимся интервал изменения t от 1 до ∞ не писать около знака фигурной скобки.

Последовательность $\{\bar{c}_t\} \in \Omega$ называется U -оптимальной траекторией, если

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(\bar{\gamma}_t - \gamma_t) > 0 ,$$

($\{\bar{\gamma}_t\}$ и $\{\gamma_t\}$ соответствуют $\{\bar{c}_t\}$ и произвольной $\{c_t\} \in \Omega$). Таким образом, определение оптимальности не предполагает ограниченность сверху последовательности $\{\gamma_t\}$, и эта общность создает настолько большие трудности в доказательстве теоремы существования, что такой теоремы до сих пор нет. В следующем пункте будут приведены только необходимые условия существования оптимальной траектории.

В заключение пункта I^0 отметим, что в случае ограниченности сверху последовательности $\{\gamma_t\}$ рассматриваемая задача состоит в максимизации функционала $\sum_{t=1}^{\infty} u_t\,(c_t)$ на Ω.

Этот функционал, очевидно, полунепрерывен снизу, значит, для применения теоремы Веерштрасса необходимо потребовать его непрерывность на Ω. Итак, существование оптимальной траектории пока известно только в предположении непрерывности функционала $\sum_{t=1}^{\infty} u_t\,(c_t)$.

2^0. Сейчас мы определим компакт Ω рекуррентными соотношениями, для этого надо ввести последовательность точечно-множественных отображений $a_t : R^n_+ \to \Sigma\,(R^n_+)$, $t = 0,1,2,\dots$. Здесь через $\Sigma\,(R^n_+)$ обозначается множество всех выпуклых компактных подмножеств R^n_+. На a_t накладываются естественные ограничения, взятые нами из [3]:

(1) $a_t(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \supset \lambda\, a_t(x') + (1-\lambda)\,a_t(x'')$, $0 \le \lambda \le 1$.

(2) Пусть $x_n \to x$, $y_n \in a_t\,(x_n)$ и $y_n \to y$, тогда $y \in a_t\,(x)$.

(3) $a_t\,(0) = 0$.

(4) Если $x'' \le x'$ и $x' \in a_t(x)$, то $x'' \in a_t\,(x)$ ($x'' \le x'$ понимается как $x' - x'' \in R^n_+$). Это условие нормальности a_t. Последовательность отображений a_t определяет модели экономической динамики. Модель функционирует по закону

$$x_t + c_t \in a_{t-1}\,(x_{t-1})\ ,$$

где $c_t, x_t \in R^n_+$, $t = 1,2,\dots$. Последовательность векторов $\{c_t\}$, удовлетворяющую этому рекуррентному соотношению, назовем допустимой траекторией модели. Компактность множества всех допустимых траекторий есть следствие теоремы Тихонова. Действительно, в силу условия (2) рассматриваемое множество замкнуто (в $S(R^n)$ сходимость поточечная) и лежит в компактном множестве $\prod_{t=0}^{\infty} a^t\,(x_0)$. Здесь, как обычно, $a^t(x_0)$ обозначает "все, что можно получить из x_0 за t шагов", т.е.

$$a^{t+1}(x_0) = \bigcup_{x \in a^t(x_0)} a_t(x), \quad t = 0, 1, \cdots, \quad a^0(x_0) = a_0(x_0).$$

Для всех t множества $a^t(x_0)$ компактны (замкнутость следует из (2), ограниченность проверяется непосредственно), т.е. $\prod_{t=0}^{\infty} a^t(x_0)$ действительно компакт, и интересовавший нас факт установлен.

С другой стороны, любой выпуклый компакт Ω, удовлетворяющий свойству нормальности, можно представлять как множество всех допустимых траекторий соответствующей модели. В самом деле, пусть

$$\Omega_T = \{(c_1, \ldots, c_T) \in R_+^T : \{\tilde{c}_t\} \in \Omega, \quad \tilde{c}_t = c_t, \ t \leq T, \ \tilde{c}_t = 0, \ t > T\}, \ T = 1, 2 \ldots$$

По этим множествам последовательно определяются отображения a_t. Остается заметить, что Ω_T однозначно задают весь компакт Ω. В оставшейся части работы будем рассматривать только нормальные Ω, а задачу формулировать для модели, т.е. в терминах a_t.

3^0. В этом разделе выведем необходимые условия U-оптимальности, рассматривая последовательности пар $\{(x_t, y_t)\}$. Такой подход побуждает ввести еще одну последовательность точечно-множественных отображений, именно:

$$b_t : R_+^n \to \Pi(R_+^{n+1}), \qquad t = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$b_1(x_0) = \{(x_1, y_1) : x_1 + c_1 \in a_0(x_0), \quad y_1 = u_1(c_1)\};$$

$$b_t(x_0) = \bigcup_{(x_{t-1}, y_{t-1}) \in b_{t-1}(x_0)} \{(x_t, y_{t-1} + u_t(c_t)) : \ x_t + c_t \in a_{t-1}(x_{t-1})\} \qquad t \geq 2;$$

По построению множества $b_t(x_0)$ суть выпуклые, нормальные компакты, состоящие из всевозможных допустимых пар (x_t, y_t) при начальном состоянии x_0. В этих множествах нас интересует их неотрицательная граница. Напомним определение: точки пересечения границы выпуклого нормального компакта ξ (здесь граница в смысле метрики R^{n+1}) с лучами из начала координат называются неотрицательной границей этого компакта и обозначаются $m\xi$. Множество $m\xi$ есть поверхность в R^{n+1}, т.е. $m\xi$ гомеоморфно шару из R^n.

Возвращаясь к моделям, назовем, вслед за [I], эффективной такую траекторию $\{(\bar{x}_t, \bar{y}_t)\}$, на которой для всех t $(\bar{x}_t, \bar{y}_t) \in m\, b_t(x_0)$. В [I] показано существование эффективных траекторий при любой последовательности суперлинейных отображений, но, разумеется, условий (I) – (4) (суперлинейность без однородности) достаточно для получения результата (как нетрудно проверить, b_t удовлетворяет условиям (I) – (4) одновременно с a_t). Сейчас мы дадим важный для дальнейшего построения пример эффективной траектории $\{(x_t, y_t)\}$. Пусть $x_t^* \in m a^t(x_0)$, $x_0^* = x_0$, т.е. $\{x_t^*\}$ есть эффективная траектория в модели с a_t. Такая траектория существует в соответствии с [I]. Тогда $(x_t^*, 0) \in m\, b_t(x_0)$ при всех t, т.е. $\{(x_t^*, 0)\}$ есть эффективная уже в модели, определяемой отображениями b_t. Очевидно, последней траектории соответствует $\{c_t^*\} = (0, 0, \cdots)$ – наихудшая в смысле критерия оптимальности, значит, в оптимальной траектории необходимо существует t, при котором $\bar{y}_t > 0$. Допустим, оптимальной $\{\bar{c}_t\}$ соответствует неэффективная $\{(\bar{x}_t, \bar{y}_t)\}$, тогда найдется $\bar{y}_T > 0$, $(\bar{x}_T, \bar{y}_T) \notin m\, b_T(x_0)$ и в силу выпуклости $b_T(x_0)$ существует $\{(x_t', y_t')\}$ такая, что $(x_T', y_T') \in m\, b_t(x_0)$ и $\bar{y}_t < y_t'$, $t \geq T$ – противоречие с оптимальностью траектории $\{\bar{c}_t\}$. Итак, справедлива

ЛЕММА I. U - о п т и м а л ь н а я т р а е к т о р и я $\{\bar{c}_t\}$ н е о б х о д и м о п о р о ж д а е т э ф ф е к т и в н у ю т р а е к т о р и ю $\{(\bar{x}_t, \bar{y}_t)\}$, о т л и ч н у ю о т $\{(x_t^*, 0)\}$.

В такой формулировке лемма удобна при выяснении существования оптимальных траекторий, но для других целей (например, построения алгоритма вычисления элементов оптимальной траектории) надо преобразовать лемму. Именно, охарактеризуем все эффективные, отличные от $\{(x_t^*, 0)\}$. Из определения неотрицательной границы понятно, что траектория $\{(\bar{x}_t, \bar{y}_t)\}$ будет эффективной тогда и только тогда, когда найдутся такие вектор $p_x(t) \in R_+^n$ и число $p_y(t) \geq 0$, что

$$p_x(t)\, \bar{x}_t + p_y(t)\, \bar{y}_t \geq p_x(t)\, x_t + p_y(t)\, y_t \;, \quad (x_t, y_t) \in b_t(x_0),\ t = 1, \cdots$$

Оказывается, если $\{(\bar{x}_t, \bar{y}_t)\}$ отлична от $\{(x_t^*, 0)\}$, то можно положить $p_y(t) > 0$, $t = 1, 2, \cdots$. Докажем это. Начнем с момента $t = 1$. Гиперплоскость, опорная к $m\, b_1(x_0)$ в точке $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, пересекает ось y (т.е. последнюю координатную прямую, ко-

торой соответствует γ) тогда и только тогда, когда $\rho_\gamma(1)>0$.
Так как

$$m\mathcal{B}_1(x_0)=\{(x_1,u_1(c_1)):\ x_1+c_1\in m\,a_0(x_0)\},$$

то пересечение указанной гиперплоскостью оси γ эквивалентно условию $\left(\frac{\partial u_1(\bar c_1)}{\partial c^i}\right)_{np}<\infty$, $i=1,\dots n$. Здесь вместо производной от $u_1(c)$, существующей почти всюду, рассматривается правая производная, существующая уже при любом $c\in R^n_+$ (напомним, что $u_1(c)$ есть непрерывная вогнутая функция). Производная (правая) принимает значения из расширенной числовой прямой, т.е. возможно $\left(\frac{\partial u_1(c)}{\partial c^i}\right)_{np}=\infty$. Пояснив обозначения, продолжим прерванное доказательство. Учитывая убывание $\left(\frac{\partial u_1(c)}{\partial c^i}\right)_{np}$ по c^i, получаем с необходимостью $\rho_\gamma(1)>0$ в тех случаях, когда $\bar c_1\gg 0$ (т.е. $\bar c^i>0$, $i=1,\dots n$) или же $\left(\frac{\partial u_1(0)}{\partial c^i}\right)_{np}<\infty$, $i=1,\dots n$. Нам осталось рассмотреть еще один случай, когда существует такое i_0, что $\left(\frac{\partial u_1(0)}{\partial c^{i_0}}\right)_{np}=\infty$. Тогда покажем следующее: если окажется $\bar c_1=0$, то необходимо $\rho_\gamma(t)=0$, $i=1,\ \ $. Действительно, $\rho_\gamma(1)=0$, т.к. опорная гиперплоскость в точке $(\bar x_1,0)$ не пересекает ось γ. Переходя к $t=2$, рассмотрим множество всех допустимых x_1 при фиксированном $c_1\in a_0(x_0)$. Обозначим это множество через $A_{x_0}(c_1)=R^n_+\cap\{a_0(x_0)-c_1\}$. Точно так же $A_{x_1}(c_2)=R^n_+\cap\{a_1(x_1)-c_2\}$, здесь $x_1\in A_{x_0}(c_1)$. Теперь будет естественно ввести функцию

$$F(c_1,c_2)=\max_{x_2\in A_{x_1}(c_2),\ x_1\in A_{x_0}(c_1)}\rho_x(2)x_2,\quad F:R^n_+\times R^n_+\to R_+\ .$$

$F(c_1,c_2)$ есть вогнутая функция (мы не будем останавливаться на доказательстве вогнутости $F(c_1,c_2)$). Из неравенства $\rho_x(2)\bar x_2+\rho_\gamma(2)\bar\gamma_1\geqslant\rho_x(2)x_2+\rho_\gamma(2)\gamma_2$ видно, что вогнутая функция $F(c_1,c_2)+\rho_\gamma(2)(u_1(c_1)+u_2(c_2))$ достигает максимума в точке $(\bar c_1,\bar c_2)$. Мы предполагаем $\bar c_1=0$ и $\left(\frac{\partial u_1(0)}{\partial c^{i_0}}\right)_{np}=\infty$, но если $\rho_\gamma(2)>0$, то в точке $\bar c_1=0$ не может быть максимума в силу условия на производную, следовательно, $\rho_\gamma(2)=0$. Точно так же доказывается $\rho_\gamma(t)=0$, $t=1,2,\cdots$. Но тогда, очевидно, $\bar\gamma_t=0$, $t=1,\cdots$, т.к. в противном случае $\rho_\gamma(t)>0$. Окончательно, когда найдется i_0, такое, что $\left(\frac{\partial u_1(0)}{\partial c^{i_0}}\right)_{np} = \infty$, на эффективной траектории, отличной от $\{(x_t^*, c)\}$, необходимо $\bar{c}_1 > 0$ и, следовательно, $p_y(1) > 0$. Доказательство неравенств $p_y(t) > 0$, $t = 1,2,\dots$ повторяет вышеизложенное. Итак, для эффективной траектории, отличной от $\{(x_t^*, 0)\}$, всегда имеет место $p_y(t) > 0$, $t = 1,2\dots$. Обозначим $p_t = \frac{1}{p_y(t)} \cdot p_x(t)$. Как следствие леммы I, справедлива

ЛЕММА 2. Траектория $\{\bar{c}_t\}$ оптимальна только когда

$$p_t \bar{x}_t + \sum_{\tau=1}^{t} u_\tau(\bar{c}_\tau) \geq p_t x_t + \sum_{\tau=1}^{t} u_\tau(c_\tau), \ (x_\tau, y_\tau) \in b_\tau(x_0).$$

Для получения содержательных результатов, относящихся, например, к вычислению оптимальных траекторий, обратимся к изучению конкретных отображений a_t.

4^0. Положим $a_t(x) = \{x' : 0 \leq x \leq f_t(x)\}, t = 1,2,\dots$ Здесь $X \in R_+$, непрерывные функции f_t вогнуты на R_+ и $f_t(0) = 0$, выполнение условий (I) – (4) очевидно и верны обе леммы из 3^0. Сейчас перейдем к необходимым условиям оптимальности в виде равенств.

ТЕОРЕМА I. Траектория $\{\bar{c}_t\}$, $\bar{c}_t > 0$, $t = 1,2,\dots$, оптимальна только когда

$$f_t'(\bar{x}_t) = \frac{u_t'(\bar{c}_t)}{u_{t+1}'(\bar{c}_{t+1})}, \quad t = 1,2,\dots$$

Предполагается, что $f_t, u_t \in C'(R_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы установим справедливость теоремы, доказав эквивалентность неравенств леммы 2 и равенств теоремы.

Неравенство леммы 2 в момент $t = 1$ имеет вид

$$p_1 \bar{x}_1 + u_1(\bar{c}_1) \geq p_1 x_1 + u_1(c_1).$$

Обозначим $\Psi_1(c) \equiv p_1[x_1^* - c] + u_1(c)$, где $x_1^* = f_0(x_0)$ ($x_1^* \in ma_1(x_0)$). Тогда $\Psi_1(\bar{c}_1) \geq \Psi(c)$, $c_1 \in \Omega_1 = \{c : 0 \leq c \leq x_1^*\}$, $\bar{c}_1 \in \mathring{\Omega}_1$ (внутренность отрезка), т.к. $\bar{c}_1 > 0$ и $\bar{c}_1 < x_1^*$ (иначе, $\bar{c}_2 = 0$, что противоречит предположению теоремы). Итак, $\bar{c}_1 \in \mathring{\Omega}_0$, $\Psi_1'(\bar{c}_1) = 0$, $p_1 = u_1'(\bar{c}_1)$. Т. к. функция $\Psi_1(c)$ вогнута на Ω_1, то условие $p_1 = u_1'(\bar{c}_1)$ не только необходимо, но и достаточно для выполнения $\Psi_1(\bar{c}_1) \geq \Psi_1(c_1)$, $c_1 \in \Omega$. Перейдем к моменту $t = 2$.

Имеем

$$\rho_2 \bar{x}_2 + u_1(\bar{c}_1) + u_2(\bar{c}_2) \geq \rho_2 x_2 + u_1(c_1) + u_2(c_2).$$

Снова введем $\Psi_2(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \geq \Psi_2(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$. Здесь

$$\Psi_2(c_1, c_2) \equiv \rho_2 [f_1(x_1^* - c_1) - c_2] + u_1(c_1) + u_2(c_2) ;$$

$$(c_1, c_2) \in \Omega_2 = [(c_1, c_2) ; \quad 0 \leq c_1 \leq x_1^* \quad 0 \leq c_2 \in f_1(x_1^* - c_1)] ,$$

$$(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \in \overset{\circ}{\Omega}_2 \quad ; \quad x_1^* > \bar{c}_1 > 0, \qquad 0 < \bar{c}_2 < f_1(x_1^* - \bar{c}_1) .$$

Очевидно, $\Psi_2 \in C^1(\Omega_2)$ и Ψ_2 вогнута, значит, неравенство $\rho_2 \bar{x}_2 + \bar{\gamma}_2 \geq \rho_2 x_2 + \gamma_2$ эквивалентно условиям $\frac{\partial \Psi_2(\bar{c}_1, \bar{c}_2)}{\partial c_1} = 0$ $\frac{\partial \Psi_2(\bar{c}_1, \bar{c}_2)}{\partial c_2} = 0$ или, подробнее,

$$-\rho_2 \cdot f_1'(x_1^* - \bar{c}_1) + u_1'(\bar{c}_1) = 0, \qquad -\rho_2 + u_2'(\bar{c}_2) = 0 .$$

Таким образом, неравенство леммы 2 в момент $t = 2$ эквивалентно равенству $f_1'(x_1) = \frac{u'(\bar{c}_1)}{u'(\bar{c}_2)}$. Введем, по аналогии с моментами $t = 1$ и $t = 2$, функцию

$$\Psi_t(c_1, \dots c_t) = \rho_t [f_t \dots (f_{t-2}(\dots(f_1(x_1^* - c_1)\dots) - c_t] + \sum u_\tau(c_\tau) ,$$

$(c_1, \dots, c_t) \in \Omega_t$ (см. пункт 2[0]). Как и раньше, неравенство $\rho_t \bar{x}_t + \bar{\gamma}_t \geq \rho_t x_t + \gamma_t$ принимает вид $\Psi_t(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_t) \geq \Psi_t(c_1, \dots, c_t)$. По индукции предположим что неравенства леммы 2 имеют место тогда и только тогда, когда выполняются равенства теоремы I при $\tau = 1, \dots, t-2$. Очевидно, $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_t) \in \Omega_t$, и функция Ψ_t вогнута на Ω_t (как сумма вогнутых, функция $f_{t-1}(f_{t-2}(\dots(f(x_1^* - c_1)\dots)$ вогнута потому, что её образ - поверхность $m\, \Omega_t$ выпуклая). Окончательно, $\rho_t \bar{x}_t + \bar{\gamma}_t \geq \rho_t x_t + \gamma_t$ эквивалентно (в предположении $\bar{c}_t > 0$) равенствам

$$\frac{\partial \Psi_t(\bar{c}_1, \dots \bar{c}_t)}{\partial c_\tau} = 0 , \qquad \tau = 1, \dots, t .$$

Отсюда

$$-\rho_\tau f_{t-1}'(\bar{x}_{t-1}) \cdots f_\tau'(\bar{x}_\tau) + u_\tau'(\bar{c}_\tau) = 0 , \quad \tau = 1, \dots, t .$$

Применяя индукционное предположение, заключаем

$$f_{t-1}'(\bar{x}_{t-1}) = \frac{u_{t-1}'(\bar{c}_{t-1})}{u_t'(\bar{c}_t)} ,$$

что и требовалось.

Для построения алгоритма вычисления U - оптимальной траектории полученный результат имеет большое значение, т.к. первоначальный критерий эффективности (лемма 2) был гораздо менее удобен полученного. Но мы требовали в условии теоремы выполнения $\bar{c}_t > 0,\ t=1,\dots$ (Знак $\bar{c}_t$ зарезервирован за эффективными траекториями, отличными от $\{(x_t^*, 0)\}$). С другой стороны, как показано в доказательстве леммы 2, выполнение условий $u_t'(0)=\infty$, $t=1,\dots$, достаточно, чтобы было $\bar{c}_t > 0,\ t=1,\dots$. Если же найдется t_0 такое, что $u'_{t_0-1}(0) < \infty$ и $u'_{t_0}(0) < \infty$, то возможно $\bar{c}_{t_0} = 0$. Точнее, можно указать числа α_{t_0} и β_{t_0} со следующими свойствами:

I. Когда $\bar{x}_{t_0-1} \leqslant \alpha_{t_0}$, заведомо $\bar{c}_{t_0} = 0$.

II. Когда $\bar{x}_{t_0-1} > \beta_{t_0}$, заведомо $\bar{c}_{t_0} > 0$.

III. Если $\bar{x}_{t_0-1} \in (\alpha_{t_0}, \beta_{t_0})$, то возможно как $\bar{c}_{t_0} = 0$, так и $\bar{c}_{t_0} > 0$ (полуинтервал неопределенности).

Из доказательства теоремы нетрудно заметить уравнение для

$$f'_{t_0}\left(f_{t_0-1}(\alpha_{t_0})\right) = \frac{u'_{t_0-1}(0)}{u'_{t_0}\left(f_{t_0}\left(f_{t_0-1}(\alpha_{t_0})\right)\right)}$$

и для β_{t_0}

$$f'_{t_0}\left(f_{t_0-1}(\beta_{t_0})\right) = \frac{u'_{t_0-1}(0)}{u'_{t_0}(0)} .$$

Это замечание потребуется в следующем разделе.

Алгоритм приближенного вычисления будем строить в предположении, что для всех t $u_t'(0)=\infty$ и $f_t\ u_t \in C^1(R_+)$, поэтому на оптимальной траектории заведомо $\bar{c}_t > 0$ и $f'(\bar{x}_t) = \frac{u_t'(\bar{c}_t)}{u'_{t+1}(\bar{c}_{t+1})}$, $t=1,\dots$. То есть если известно $\bar{c}_1$, то, учитывая $c_t + x_t = f_{t-1}(x_{t-1})$, вся траектория $\{\bar{c}_t\}$ однозначно определяется величиной $\bar{c}_1$. Рассмотрим $c \in (0, x_1^*)$

$$\begin{array}{llll}
 & & & \cdots \\
 & & & c_4(c) \xrightarrow{f} \bar{x}_4(c) \\
 & & c_3(c) \xrightarrow{f} \bar{x}_3(c) & \\
 & c_2(c) \xrightarrow{f} \bar{x}_2(c) & & \\
c \xrightarrow{f} \bar{x}_1(c) & & &
\end{array}$$

Рис. I

Применяя равенства $x_t + c_t = f_{t-1}(x_{t-1})$ и $f'(\bar{x}_t) = \frac{u_t'(\bar{c}_t)}{u'_{t+1}(\bar{c}_{t+1})}$ в последовательности рис. I, получим набор чисел $\bar{x}_t(c)$. Однако не при всяком $c\in(0, x_1^*)$ процесс, изображенный на рис. I, продолжается сколь угодно долго. Может случиться, что $\bar{c}_t(c)$, найденное на шаге t, удовлетворяет неравенству $f_{t-1}(\bar{x}_{t-1})\le \bar{c}_t(c)$, т.е. невозможно найти $\bar{x}_t(c)>0$. Мы утверждаем, что в предположениях этого раздела всегда существует $\bar{\bar{c}}_1\in[0,x_1^*]$. Если $c\le\bar{\bar{c}}_1$, то процесс рис. I будет продолжаться сколь угодно долго (выводится эффективная траектория), а для чисел $c>\bar{\bar{c}}_1$ процесс рис. I оборвётся через конечное число шагов.

Рассмотрим функции $\bar{c}_t(c)$ и $\bar{x}_t(c)$. Область их определения есть интервал, содержащий все c, из которых процесс рис. I не обрывается до шага t, а сами $\bar{c}_t(c)$ и $\bar{x}_t(c)$ – соответствующие значения, полученные исходя из c. Функции $\bar{x}_t(c)$ и $\bar{c}_t(c)$ монотонны по c, в самом деле, когда $t=1$, $\bar{x}_1(c)=x_1^*-c$, $\bar{c}_1(c)=c$. Сделаем индукционный переход, пусть $\bar{c}_{t-1}(c)$ и $\bar{x}_{t-1}(c)$ возрастают и убывают, соответственно. Дифференцируя по c соотношение $f'_{t-1}(\bar{x}_{t-1}(c))=\frac{u'_{t-1}(\bar{c}_{t-1}(c))}{u'_t(\bar{c}_t(c))}$ и учитывая вогнутость f_{t-1}, u_{t-1}, придем к неравенству $\bar{c}'_t(c)>0$, а так как $\bar{x}_t(c)=f_{t-1}(\bar{x}_{t-1}(c)-\bar{c}_t(c))$, то немедленно $\bar{x}'_t(c)>0$, что и требовалось. Рассмотрим уравнение $\bar{c}_t(c)=f_{t-1}(\bar{x}_{t-1}(c))$.

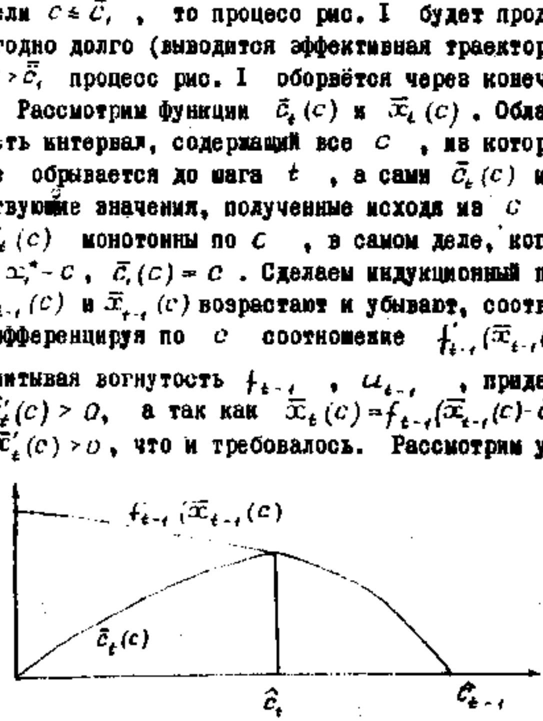

Рис. 2

Как видно из рис. 2, в силу возрастания $\bar{c}_t(c)$ и убывания $\bar{x}_t(c)$, это уравнение имеет единственное решение, обозначим его $\hat{c}_t$. Для чисел $c'>\hat{c}_t$ процесс рис. I на шаге t заведомо оборвется, далее, $\hat{c}_t<\hat{c}_{t-1}$, и область определения функции $\bar{c}_t(c)$ оказывается полуинтервалом $[0,\hat{c}_t)$.

Мы построили последовательность монотонно убывающих чисел $\hat{c}_t>0$. Обозначим $\bar{\bar{c}}_1=\lim_{t\to\infty}\hat{c}_t$ – предел существует для любой модели, удовлетворяющей предположениям раздела 4. Когда $\bar{\bar{c}}_1>0$, все эффективные траектории, отличные от $\{(x_t^*,0)\}$, порождаются

$\{\bar{c}_t(c)\}$, $0<c\leq\bar{\bar{c}}_1$, если же $\bar{\bar{c}}_1=0$, то при любом $c>0$ процесс, начатый из c, оборвется и поэтому единственной эффективной траекторией будет $\{(x_t^*, 0)\}$. Следовательно, в модели с $\bar{\bar{c}}_1=0$ нет оптимальных траекторий. Пусть теперь $\bar{\bar{c}}_1>0$. Когда заранее известно существование оптимальной траектории, в силу леммы 2 такой траекторией необходимо будет $\{\bar{c}_t(\bar{\bar{c}}_1)\}$. В.Л. Макаров предоставил нам простой пример невозможности обращения леммы I, т.е. может оказаться так, что оптимальная траектория не существует, но есть эффективная, отличная от $\{(x_t^*, 0)\}$. Итак, в алгоритме необходимо оговаривать существование оптимальной траектории. На этом мы кончим построение алгоритма в предположении $u_t'(0)=\infty$, $t=1,\cdots$ и займемся возможностью $\exists t: u_{t-1}'(0)<\infty$, $u_t'(0)<\infty$. Как только $\bar{c}_t(c)\in(\alpha_t, \beta_t]$ (см. замечание после доказательства теоремы I), равенства теоремы оказываются справедливыми лишь в сторону достаточности. В такой ситуации нам удалось модифицировать алгоритм только в частном случае $u_t=\lambda_t u$, $\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}\leq\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_{t+2}}$, $t=1,\cdots$. Нам неизвестно, можно ли построить алгоритм для произвольных u_t.

Окончательно в любой модели, где $u_t'(0)=\infty$, $t=1,\cdots$ и, при некоторых предположениях в модели, где $\exists t: u_t'(0)<\infty$, можно указать метод приближенного вычисления $\bar{c}_t(\bar{c}_1)$. Если потребовать еще более жесткие ограничения, то можно дать метод точного вычисления оптимальной траектории. Именно если для всех t $f_t=f$, $u_t=\frac{1}{\mu^t}u$, $u'(0)=0$, $\mu\geq 1$, то оптимальная траектория определяется функцией $y(x)$, т.е. $\bar{\bar{x}}_{t+1}=y(\bar{\bar{x}}_t)$, $\bar{\bar{x}}_0=x_0$. Функция $y(x)$ есть решение функционального уравнения

$$f'(y(x))=\frac{\mu u'(f(x)-y(x))}{u'(f(y(x))-y(y(x)))}.$$

Действительно, для U-оптимальных траекторий справедлив принцип Беллмана - начиная с любого состояния оптимальной траектории как из начального, мы получим оптимальную траекторию, совпадающую с соответствующим остатком исходной. В предположении строгой выпуклости функций u_t и f_t очевидна единственность оптимальной траектории, тогда введем отображение $y: R_+\to R_+$, $y(\bar{\bar{x}}_t)=\bar{\bar{x}}_{t+1}$, $t=0,1,\cdots$. Необходимые условия оптимальности принимают вид

$$f'(\bar{\bar{x}}_t) = -\frac{\mu u'(f(\bar{\bar{x}}_{t-1}) - y(\bar{\bar{x}}_{t-1}))}{u'(f(y(\bar{\bar{x}}_{t-1}) - y(y(\bar{\bar{x}}_{t-1}))}$$,

т.к. $\bar{\bar{c}}_{t+1} = f(\bar{\bar{x}}_t) - \bar{\bar{x}}_{t+1}$.

Очевидно, $\bar{\bar{x}}_{t-1}$ принимает любые значения из R_+ при изменении x_0 , т.е. можно перейти к непрерывному аргументу, что составляет выписанное выше функциональное уравнение. Такое уравнение - частный случай известной задачи об инвариантной кривой (см.[5]). Кратко напомним эту задачу. Имеется преобразование плоскости

$$T = \left\{ \begin{array}{l} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{array} \right\} .$$

Преобразование переводит кривую $y = \varphi(x)$ в $y = \Psi(x)$, где $\Psi = T\varphi$. Когда $T\varphi = \varphi$, кривая называется инвариантной по преобразованию T , т.е. из $y = \varphi(x)$ следует $y' = \varphi(x')$, иначе, $\varphi(f(x, \varphi(x)) = g(x, \varphi(x))$ - это функциональное уравнение называется уравнением инвариантной кривой. Такая задача рассматривалась ещё Пуанкаре и Бергоффом, в настоящее время изучалась в работах Кузьмы [Kuzma] Левиса, Хартмана и др. По-видимому, за исключением простейших случаев, невозможно найти аналитическое выражение решения задачи через f и g . Предлагаемые в указанных работах итеративные методы менее удобны, чем алгоритм отыскания $\bar{\bar{c}}_t$, т. к. они были построены в более общей ситуации, а алгоритм учитывает специфику модели.

Мы не будем останавливаться на вопросах асимптотики U - оптимальных траекторий и т. н. магистралей. В случае, когда для всех t $f_t = f$, $u_t = \frac{\lambda}{\mu} u$, $\mu \geq 0$, это подробно изучено в [2], а возможные обобщения выпадают из "основного направления" данной статьи.

5^0. Рассмотрим следующее обобщение модели из 4^0 - отображения a_t при любом t зависят от набора параметров, точнее, модель определяется неравенствами

$$\begin{aligned} & x_{t+1} + c_{t+1} + \sum_{j=1}^{n} s^j_{t+1} \leq f_t(x_t ; \varphi_t^1, \dots \varphi_t^n) , \\ & \varphi^j_{t+1} = q^j_t \varphi^j_t + \Psi_j (s^j_{t+1}) . \end{aligned}$$

Здесь $q^j_t \leq q^j_{t+1} \leq 1$, $j = 1, \dots n$; $x_t, c_t, s^j_t \in R_+$, $f_t : R_+^{n+1} \to R_+$,

-это вогнутая на R_+^{n+1} функция. $\psi_j : R_+ \to R_+$-тоже вогнутая функция при любом j. Возможная интерпретация параметров S_t^j – ассигнования на науку, технику и т.п., а равенство $\varphi_{t+1}^j = q_t^j \varphi_t^j + \psi_j(S_{t+1}^j)$ определяет переход от уровня φ_t^j к следующему, φ_{t+1}^j. Такая модель может показаться весьма далекой от ситуации, рассмотренной в $I^0 - 2^0$, однако она полностью вкладывается в схему редукции и эффективным траекториям, именно :

$$\widetilde{X}_t = (x_t, S_t^1, \dots S_t^n), \quad \widetilde{c}_t = (\widetilde{c}_t^1, \dots, \widetilde{c}_t^{n+1}), \quad \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{c}_t^j = c_t \;;$$

$$\widetilde{u}_t(\widetilde{c}_t) = u_t(c_t), \qquad \widetilde{u}_t : R_+^{n+1} \to R_+, \quad u_t : R_+ \to R_+;$$

$$a_t(\widetilde{x}_t) = \{\widetilde{x} : \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{x}^j \leq f_t(\widetilde{x}_t)\}.$$

Таким образом, вместо $\{x_t, S_t^1, \dots S_t^n\}$ достаточно рассмотреть $\{\widetilde{x}_t\}$, тогда имеют место обе леммы из 2^0, а также соответствующая теорема – критерий эффективности в виде равенств.

ТЕОРЕМА 2. Траектория $\{\bar{c}_t, \bar{s}_t^1, \dots, \bar{s}_t^n\}$, $\bar{c}_t > 0$, $\bar{s}_t^j > 0$, $t = 1, \dots$, порождает эффективную траекторию $\{\bar{X}_t, \bar{S}_t^1, \dots, \bar{S}_t^n, \bar{\gamma}_t\}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f_t(\bar{x}_t, \bar{\varphi}_t^1, \dots, \bar{\varphi}_t^n)}{\partial x} = \frac{u_t'(\bar{c}_t)}{u_{t+1}'(\bar{c}_{t+1})} \qquad (t = 1, 2, \dots),$$

$$q_t^j \frac{\psi_j'(\bar{s}_t^j)}{\psi_j'(\bar{s}_{t+1}^j)} + \psi_j'(\bar{s}_t^j) \frac{\partial f_t(\bar{x}_t, \bar{\varphi}_t^1, \dots, \bar{\varphi}_t^n)}{\partial \varphi^j} = \frac{u_t'(\bar{c}_t)}{u_{t+1}'(\bar{c}_{t+1})}, \quad (j = 1, \dots n).$$

Как легко заметить, доказательство первого равенства ничем не отличается от соответствующего доказательства в теореме I, а в доказательстве второго трудности только вычислительного характера и нет необходимости в его детализации. Таким образом, вся U -оптимальная траектория однозначно определяется первоначальным $(\bar{c}_1, \bar{s}_1^1, \dots, \bar{s}_1^n)$, как и в 4^0. Далее, для выполнения $\bar{c}_t > 0$, $\bar{s}_t^j > 0$, $\forall t, \forall j$ достаточно потребовать $u_t'(0) = \psi_j'(0) = \infty \quad \forall t, \quad \forall j$, однако на этом аналогия кончается, т.к. нам неизвестно, как модифицировать алгоритм предыдущего пункта применительно к настоящей модели.

6^0. В заключение – кратко о возможных обобщениях 4^0. Используя множества $A_{x_t}(c_{t+1})$, определенные в доказательстве леммы 2, можно свести задачу об U-оптимальных траекториях модели со строго выпуклыми поверхностями $m a_t(x_\circ)$ к простой модели, определяемой отображениями $\bar{a}_t(x) = \{x' : 0 \leqslant x' \leqslant F_t(x, \bar{\alpha}_t)\}$. Здесь α_t – параметр, определяемый в процессе построения, $F_t : R_+^n \times R_+^n \to R_+^n$, по x функция F_t вогнута. В 4^0 мы рассмотрели случай $n = 1$, F_t постоянна по α_t. В произвольной модели со строго выпуклыми поверхностями $m a_t(x_\circ)$ также будут иметь место необходимые условия в виде равенств, также начальное $\bar{c}_1$ будет однозначно определять всю оптимальную траекторию. Если же для всех t множества $a_t(x_\circ)$ – симплексы, то результаты аналогичны 5^0.

Автор глубоко признателен В.Л.Макарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. В.Л.Макаров. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей.-Сиб. мат. журнал, 7:6 (1966), 832-853.
2. R.Beals, T.C.Koopmans. Maximizing Stationary utility, S.I.A.M. J.Apll. Math. 17:5 (1969), 1001-1015.
3. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства.– Оптимальное планирование, 9 (1967), 87-111.
4. В.Л.Макаров. Оптимальные и локально-равновесные траектории в моделях экономической динамики.–Оптимальное планирование, 10 (1968), 3-6.

Поступила в редакцию
7.VI. 1971 г.