1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 2(19)

УДК 513.88

ОБ (О)-СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ МНОЖЕСТВ

В.В. Секачев

Нормальным в смысле некоторого замкнутого выпуклого конуса K называется такое подмножество $A \subset K$, что вместе с каждой своей точкой x оно содержит конусный отрезок $\langle 0, x \rangle$, т.е. множество

$$\langle 0, x \rangle = \{ y \in K / y \leq x, \quad x \in A \},$$

где отношение порядка $\leq$ порождено конусом K евклидова пространства R^n [6]. В 1^0 статьи исследуется связь между (о)-сходимостью и сходимостью по метрике Хаусдорфа последовательностей, состоящих из компактных подмножеств пространства R^n, и показывается, что если, кроме компактности, множества удовлетворяют дополнительным свойствам выпуклости и нормальности относительно конуса R^n_+, то оба типа сходимости совпадают. В 2^0 результаты 1^0 применяются к исследованию непрерывности некоторых точечно-множественных отображений.

1^0. В вещественном евклидовом пространстве R^n с конусом неотрицательных элементов R^n_+ рассмотрим $\mathcal{H}_2$ - совокупность компактных подмножеств R^n, $\mathcal{H}_1$ - совокупность выпуклых компактных подмножеств R^n и $\mathcal{H}_0$ - совокупность выпуклых, компактных и нормальных в смысле конуса R^n_+ подмножеств R^n. Имеют место включения $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$. Нетрудно проверить, что если $\mathcal{H}_2$ упорядочить по включению и это отношение порядка индуцировать в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_0$, то $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ становятся условно полными структурами. Заметим, что $\mathcal{H}_0$ является подструктурой $\mathcal{H}_1$, однако $\mathcal{H}_1$ подструктурой $\mathcal{H}_2$ не яв-

является, так как если $F \subset \mathcal{H}_1$ и F ограничено сверху, то

$\sup_{\mathcal{H}_1} F = \overline{\widetilde{\bigcup_{f\in F}}} f$ не совпадает с $\sup_{\mathcal{H}_2} F = \overline{\bigcup_{f\in F}} f$, где

через '$\backsim$', следуя [4], обозначена операция взятия выпуклой оболочки, а "—" означает замыкание множества.

Напомним, что в соответствии с общим определением (о)-сходимости, последовательность $\{A_n\}$ элементов условно полной структуры $\mathcal{H}_i$ ($i = 0,1,2$) называется (о)-сходящейся, если найдутся убывающая последовательность $\{B_n\}$ и возрастающая последовательность $\{C_n\}$ элементов из $\mathcal{H}_i$ ($i = 0,1,2$), такие, что имеет место

1. $C_n \subset A_n \subset B_n$ для всех n;
2. $\sup_{\mathcal{H}_i} C_n = \inf_{\mathcal{H}_i} B_n$ ($i = 0,1,2$).

Множество $\sup_{\mathcal{H}_i} C_n = \inf_{\mathcal{H}_i} B_n$ называется (о)-пределом последовательности $\{A_n\}$ и обозначается через (о)-$\lim A_n$. Нетрудно проверить, что (о)-сходимость превращает $\mathcal{H}_i$ ($i = 0,1,2$) в L^* пространства. Кроме того, $\mathcal{H}_i$ ($i = 0,1,2$) являются полными метрическими пространствами с метрикой Хаусдорфа. Имеет место доказанная в [7]

ЛЕММА 1.1. Если убывающая последовательность $\{A_n\}$ элементов из $\mathcal{H}_2$ (о)-сходится к некоторому непустому $A \in \mathcal{H}_2$, то она сходится к A и по метрике Хаусдорфа, т.е. $(H)\lim A_n$ существует и $(H)\lim A_n = (o)\lim A_n = A$.

Обозначим через $d_H(\cdot,\cdot)$ метрику Хаусдорфа. Тогда расстояние между двумя множествами A и B из $\mathcal{H}_2$ вычисляется по формуле:

$$d_H(A,B) = \max\left(\sup_{x\in B} \rho(x,A),\ \sup_{y\in A} \rho(B,y)\right),$$

где $\rho(x,A)$ - расстояние от точки x до множества A, вычисленное по евклидовой норме $\|\cdot\|$.

ЛЕММА 2.1. Если возрастающая последовательность $\{A_n\}$ элементов из $\mathcal{H}_2$ (о)-сходится к некоторому $A \in \mathcal{H}_2$, то существует $(H)\lim A_n$ и $(H)\lim A_n = (o)\lim A_n = A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для возрастающей последовательности $\{A_n\}$, имеем $(o)\lim A_n = \sup_{\mathcal{K}_2} A_n = \bigcup_n A_n$.

Рассмотрим числовые последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, определенные следующим образом:

$$\alpha_n = \sup_{x\in A} \rho(A_n, x), \qquad \beta_n = \sup_{x\in A_n} \rho(x, A).$$

Последовательность $\{\alpha_n\}$ - убывающая. Действительно, имеем

$$\inf_{y\in A_n} \|y-x\| \leq \inf_{y\in A_{n-1}} \|y-x\|$$

д. любого $x\in A$, $A_{n-1}\subset A_n$. Следовательно,

$$\alpha_n = \sup_{x\in A} \inf_{y\in A_n} \|y-x\| \leq \sup_{x\in A} \inf_{y\in A_{n-1}} \|y-x\| = \alpha_{n-1}.$$

Из сказанного следует, что существует предел $\alpha = \lim_n \alpha_n$. Допустим, что $\alpha > 0$. В силу компактности A, для каждого n найдется $x_n \in A$ такое, что

$$\alpha_n = \sup_{x\in A} \rho(A_n, x) = \rho(A_n, x_n).$$

Тогда из полученной последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь сходящуюся к некоторому x_0 подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Так как $\{A_n\}$ - возрастающая последовательность, значит, для любой точки $y\in A = \bigcup_n A_n$ найдется последовательность $\{y_n\}$ такая, что $y_n \in A_n$, $y_n \to y$. Построим такую последовательность $\{y_n\}$ для точки $x_0 = \lim_k x_{n_k}$. Тогда

$$\alpha_{n_k} = \rho(A_{n_k}, x_{n_k}) = \inf_{y\in A_{n_k}} \|y - x_{n_k}\| \leq \|y_{n_k} - x_{n_k}\| \leq$$
$$\leq \|y_{n_k} - x_0\| + \|x_0 - x_{n_k}\|,$$

т.е. $\alpha_{n_k} \to 0$ при $k\to\infty$, что противоречит предположению о том, что $\lim \alpha_n = \alpha > 0$. Так как $\alpha_n \geq 0$ для всех n, значит, $\alpha = 0$.

Так как $A_n \subset A$ для любого n, то $\beta_n = 0$ для всех n. Окончательно имеем, $d_H(A_n, A) = \max(\alpha_n, \beta_n) = \alpha_n \to 0$ при $n\to\infty$, что и завершает доказательство леммы.

Из лемм I.I и 2.I вытекает

ТЕОРЕМА I.I. Если последовательность $\{A_n\}$ элементов из $\mathcal{K}_2$ (о)-сходится к некоторому $A\in\mathcal{K}_2$, то $\{A_n\}$ (н)-сходится к A, т.е. существует $(н)\lim A_n$ и $(н)\lim A_n = A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A=(o)\lim\limits_n A_n$. Тогда, согласно определению, найдутся такие две монотонные последовательности $\{B_n\}$ и $\{C_n\}$ элементов из $\mathcal{H}_2$, причем $\{B_n\}$ - убывающая, $\{C_n\}$ - возрастающая последовательности, такие, что

$$C_n \subset A_n \subset B_n, \qquad A=\overline{\bigcup_n} C_n = \bigcap_n B_n.$$

Если $\beta_n = \sup\limits_{y\in A_n} \rho(y,A)$, то последовательность $\{\beta_n\}$ мажорируется последовательностью $\{\delta_n\}$, где $\delta_n = \sup\limits_{y\in B_n} \rho(y,A)$, причем по лемме I.I $\delta_n \to 0$ при $n\to\infty$, откуда $\beta_n \to 0$ при $n\to\infty$. Аналогично последовательность $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n = \sup\limits_{x\in A} \rho(A_n,x)$, по лемме 2.I мажорируется сходящейся к O последовательностью $\{\gamma_n\}$, где $\gamma_n = \sup\limits_{x\in A} \rho(C_n,x)$, откуда $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом, получаем, что $d_H(A_n,A)=\max(\alpha_n,\beta_n)\to 0$ при $n\to\infty$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что доказанные выше леммы I.I, 2.I и теорема I.I остаются справедливыми и для структуры $\mathcal{H}_1\subset\mathcal{H}_2$, хотя, как было отмечено, $\mathcal{H}_1$ не является подструктурой $\mathcal{H}_2$. Дело в том, что если $\{A_n\}$ - возрастающая ограниченная последовательность из $\mathcal{H}_1$, то

$$\sup_n{}_{\mathcal{H}_1} A_n = \overline{\bigcup_n} A_n = \sup_n{}_{\mathcal{H}_2} A_n,$$

т.е. верхняя грань, вычисленная в $\mathcal{H}_2$, совпадает с верхней гранью в $\mathcal{H}_1$. И так как доказательство теоремы I.I опирается только на монотонные последовательности, то из этого следует справедливость её и для структуры $\mathcal{H}_1$ (а значит, и для её подструктуры $\mathcal{H}_0$).

Для ограниченных последовательностей в условно σ-полных структурах (o)-предел можно определить через наибольший и наименьший пределы последовательности [2]. А именно, если $\{A_n\}$ из $\mathcal{H}_1$ ограничена, то положим

$$B_n = \sup_{m\geq n} A_m = \overline{\bigcup_{m\geq n}} A_m, \quad C_n = \inf_{m\geq n} A_m = \bigcap_{m\geq n} A_m.$$

Тогда $\{B_n\}$ -убывающая, $\{C_n\}$ -возрастающая последовательности из $\mathcal{H}_1$ и $C_n\subset A_n\subset B_n$ для всех n. Наибольшим (o)-пределом последовательности $\{A_n\}$ называется нижняя грань

$\{B_n\}$, т.е.

$$(o)\ \overline{\lim_n}\, A_n = \inf_n B_n = \bigcap_n B_n = \bigcap_n \overline{\bigcup_{m\geq n}} B_m .$$

Верхняя грань последовательности $\{C_n\}$ называется наименьшим (о)-пределом последовательности $\{A_n\}$, т.е.

$$(o)\underline{\lim}\, A_n = \sup_n C_n = \overline{\bigcup_n} C_n = \overline{\bigcup_n} \bigcap_{m\geq n} A_m .$$

Множество A является (о)-пределом последовательности $\{A_n\}$ тогда и только тогда, когда $A = (o)\cdot \lim A_n = (o)\cdot \overline{\lim_n}\, A_n$

Теорема, обратная теореме I.I, будет доказана только для структуры $\mathcal{K}_o$, однако имеет место

ТЕОРЕМА 2.I. Если последовательность $\{A_n\}$ из $\mathcal{K}_1$ (н)-сходится к некоторому множеству $A\in\mathcal{K}_1$, то наибольший (о)-предел последовательности $\{A_n\}$ существует и совпадает с A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость последовательности $\{A_n\}$ к A по метрике Хаусдорфа равносильна следующему утверждению: для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое число $n(\varepsilon)$, что при $n>n(\varepsilon)$ выполняется $A\subset A_n+\varepsilon S$, $A_n\subset A+\varepsilon S$, где S есть единичный шар в пространстве R^n, а сложение понимается в смысле Минковского.

Поэтому нетрудно показать, что последовательность $\{A_n\}$ ограничена сверху. Следовательно, можно рассмотреть наибольший (о)-предел последовательности $\{A_n\}$:

$$(o)\ \overline{\lim_n}\, A_n = \bigcap_n \overline{\bigcup_{m\geq n}} A_m = \bigcap_n B_n \qquad , \text{ где } \quad B_n = \overline{\bigcup_{m\geq n}} A_m .$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда при $n>n(\varepsilon)$ имеем:

$$A_n\subset A+\varepsilon S , \qquad A\subset A_n+\varepsilon S .$$

Последовательность $\{A_n\}_{n\geq n(\varepsilon)}$ ограничена сверху элементом $A+\varepsilon S$, значит, $\sup_{m\geq n} A_m = \overline{\bigcup_{m\geq n(\varepsilon)}} A_m \subset A+\varepsilon S$. Следовательно,

$$(o)\ \overline{\lim_n}\, A_n = \bigcap_n B_n = \bigcap_{n\geq n(\varepsilon)} B_n \subset A+\varepsilon S \quad \text{(так как } \{B_n\}\text{-убывающая последовательность).}$$

С другой стороны, так как $A\subset A_n+\varepsilon S$ при $n\geq n(\varepsilon)$, то $A\subset \overline{\bigcup_{m\geq n}} (A_m+\varepsilon S)$ для любого n, и так как $\overline{\bigcup_{m\geq n}} (A_m+\varepsilon S)\subset \overline{\bigcup_{m\geq n}} A_m+\varepsilon S$, то $A\subset B_n+\varepsilon S$ для любого

n. Для убывающей последовательности $\{B_n\}$ из $\mathcal{H}_2$ справедливо равенство

$$\bigcap_n (B_n + \varepsilon S) = \bigcap_n B_n + \varepsilon S.$$

Действительно, пусть $x \in \bigcap_n B_n + \varepsilon S$. Тогда $x = b_n + \varepsilon s_n$, где $b_n \in B_n$, $s_n \in S$. Из последовательности $\{b_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{b_{n_k}\}$, сходящуюся к точке $b_0 \in \bigcap_n B_n$ в силу того, что $\{B_n\}$ убывает. Тогда последовательность $\{s_{n_k}\}$ тоже сходится и $\lim_k s_{n_k} = \frac{1}{\varepsilon}(x - b_0) \in S$. Тогда $x = b_0 + \varepsilon S$, где $b_0 \in \bigcap_n B_n$, $s_0 \in S$, т.е. $x \in \bigcap_n B_n + \varepsilon S$. В обратную сторону включение очевидно.

Таким образом, окончательно имеем: $A \subset (o)\overline{\lim_n} A_n + \varepsilon S$, т.е. для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ имеем:
$d_H(A, (o)\overline{\lim_n} A_n) < \varepsilon$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь те свойства нормальных множеств из $\mathcal{H}_0$, которые будут нам нужны при доказательстве утверждения, аналогичного теореме 2.I, для наименьшего (o)-предела (н)-сходящейся последовательности.

ЛЕММА 4.I. Для любого $A \in \mathcal{H}_0$ найдется такая грань конуса $\Gamma \subset R^n_+$ размерности $k \leq n$, что $\Gamma = L(A) \cap R^n_+$ и A телесно относительно этой грани Γ ($L(A)$ - линейная оболочка множества A).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной точки $x \in A$ обозначим через $J_A(x)$ множество номеров ненулевых координат, т.е.

$$J_A(x) = \{i / x_i > 0, \quad x = (x_1, \dots x_n) \in A\},$$

и пусть $J_A = \bigcup_{x \in A} J_A(x)$. Тогда ясно, что $L(A) \subset L(\ell_{i_1}, \dots \ell_{i_k})$

где $L(\ell_{i_1} \dots \ell_{i_k})$ - линейная оболочка, натянутая на единичные векторы $\ell_{i_1}, \dots \ell_{i_k}$, где $i_j \in J_A$ $(1 \leq j \leq k)$. Если некоторая точка $y = (y_1, \dots y_n) \in A$ такова, что $y_i > 0$, $i \in J_A(y)$, то множество A, в силу нормальности, содержит точки вида $\lambda_i \ell_i, \lambda_i > 0 (i \in J_A(y))$, значит, $L(A)$ содержит единичные векторы ℓ_i $(i \in J_A(y))$. В силу произвольности точки y, линейная оболочка $L(A)$ содержит единичные векторы $\ell_{i_1}, \dots \ell_{i_k}$, множество номеров которых совпадает с J_A. Следовательно, $L(\ell_{i_1} \dots \ell_{i_k}) \subset L(A)$, откуда, на основании уже полученного обратного включения, получаем $L(\ell_{i_1}, \ldots \ell_{i_k}) = L(A)$, где

$$(i_1, \ldots i_k) = \mathcal{J}_A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{J}_A(x).$$

Обозначим $L(\ell_{i_1}, \ldots \ell_{i_k}) \cap R^n_+$ через Γ. Тогда Γ является k-мерной гранью конуса R^n_+. Первая часть леммы доказана.

Если для двух точек x_1, x_2 $\mathcal{J}_A(x_1) = \mathcal{J}_A(x_2)$, то в силу выпуклости множество A содержит такие точки y, что

$$\mathcal{J}_A(y) = \mathcal{J}_A(x_1) \cup \mathcal{J}_A(x_2).$$

Поэтому множество A содержит такие точки z, что

$$\mathcal{J}_A(z) = \mathcal{J}_A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{J}_A(x).$$

Тогда для каждой такой точки $z \in A$ конусный отрезок

$$\langle o, z \rangle = \{ x \in R^n_+ \;/\; x \leq z \}$$

является телесным множеством относительно своей линейной оболочки $L(\langle o, z \rangle)$. Но, учитывая равенство $L(\langle o, z \rangle) = L(A)$ и включение $\langle o, z \rangle \subset R^n_+$, получаем, что множество $\langle o, z \rangle$ содержит точки, внутренние по отношению к множеству

$$L(\langle o, z \rangle) \cap L(A) \cap R^n_+ = \Gamma,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 5.I. Для любой последовательности $\{A_n\}$ из $\mathcal{K}_o$ ($н$)-сходящейся к множеству $A \in \mathcal{K}_o$, существует такой номер n_o, что при $n > n_o$ линейные оболочки множеств $\bigcap_{m \geq n} A_m$ совпадают с линейной оболочкой множества A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно показать существование n_o такого, что при $n > n_o$ будут совпадать множества $\mathcal{J} \bigcap_{m \geq n} A_m$ и $\mathcal{J}_A$. Заметим, что для любого множества $B \in \mathcal{K}_o$ справедливо равенство

$$(B + \varepsilon S) \cap R^n_+ = B + \varepsilon S^+ \quad \text{, где} \quad S^+ = S \cap R^n_+ ,$$

S - единичный шар в пространстве R^n (см. [7] стр. 31).

а) Допустим, что найдется такой номер n_1, что $\mathcal{J} \bigcap_{m \geq n_1} A_m \supset \mathcal{J}_A$. Так как $\{\bigcap_{m \geq n} A_m\}_{n=1}^{\infty}$ есть возрастающая последовательность, то это включение будет справедливым для всех $n \geq n_1$. Тогда при $n \geq n_1$ найдется такая точка $x \in \bigcap_{m \geq n} A_m$, что

$$\mathcal{J} \bigcap_{m \geq n} A_m(x) \supset \mathcal{J}_A,$$

т.е. найдется такой номер i_k, что $i_k \in \mathcal{J} \bigcap A_m(x)$, $i_k \notin \mathcal{J}_A$. Так как $A_n \xrightarrow{(H)} A$, значит, $\bigcap_{m \geq n} A_m \subset (A + \varepsilon S) \bigcap^{n>?} R_+^?$, $n \geq n(\varepsilon)$ или, учитывая сделанное выше замечание, $\bigcap_{m \geq n} A_m \subset A + \varepsilon S^+$ при $n \geq n(\varepsilon)$. Тогда для i_k-ой координаты выбранной точки x будем иметь $x_{i_k} = \varepsilon s_{i_k}$, где s_{i_k} – i_k-ая координата некоторой точки $s \in S^+$ такой, что $x = a + \varepsilon s$, $a \in A$. Выбирая $\varepsilon < x_{i_k}$, получим $s_{i_k} = \frac{x_{i_k}}{\varepsilon} > 1$, что невозможно, так как точка s с i_k-ой координатой, равной s_{i_k}, взята из единичного шара S.

б) Допустим теперь, что $\mathcal{J} \bigcap_{m \geq n} A_m \subset \mathcal{J}_A$ для любого n, т.е. для любого n в множестве $\mathcal{J}_A$ найдется такой номер i_n, что $i_n \notin \mathcal{J} \bigcap_{m \geq n} A_m$. Это означает, что у всех точек из $\bigcap_{m \geq n} A_m$ координата с номером i_n равна 0 для любого n. Так как $A \subset A_n + \varepsilon S^+$ при $n \geq n(\varepsilon)$, то для точки $y \in A$ такой, что $i_{n(\varepsilon)} \in \mathcal{J}_A(y)$, будем иметь:

$$y = a_n + \varepsilon S_n, \text{ где } a_n \in A_n, \quad s_n \in S^+, \quad n \geq n(\varepsilon),$$

$$y_{i_{n(\varepsilon)}} = a^n_{i_{n(\varepsilon)}} + \varepsilon S^n_{i_{n(\varepsilon)}}, \quad n \geq n(\varepsilon), \quad 0 \leq a^n_{i_{n(\varepsilon)}} \leq c^n_{i_{n(\varepsilon)}}.$$

Так как у точек из $\bigcap_{m \geq n(\varepsilon)} A_m$ координаты с номером $i_{n(\varepsilon)}$ равны 0, значит, $\inf c^n_{i_{n(\varepsilon)}} = 0$. Тогда из последовательности $\{a^n_{i_{n(\varepsilon)}}\}$ можно извлечь сходящуюся к нулю подпоследовательность $\{a^{n_k}_{i_{n(\varepsilon)}}\}$. Т.е. для координаты $y_{i_{n(\varepsilon)}}$ имеет место

$$y_{i_{n(\varepsilon)}} = a^{n_k}_{i_{n(\varepsilon)}} + \varepsilon S^{n_k}_{i_{n(\varepsilon)}}, \quad n_k \geq n(\varepsilon).$$

Так как $\{a^{n_k}_{i_{n(\varepsilon)}}\}$ сходится к 0 при $k \to \infty$, значит, последовательность $\{\varepsilon S^{n_k}_{i_{n(\varepsilon)}}\}$ тоже сходится и её предел равен $y_{i_{n(\varepsilon)}}$, т.е. $\lim_{k \to \infty} s^{n_k}_{i_{n(\varepsilon)}} = \frac{y_{i_{n(\varepsilon)}}}{\varepsilon}$, что невозможно при $\varepsilon < y_{i_{n(\varepsilon)}}$, так как $\lim_{k \to \infty} s^{n_k}_{i_{n(\varepsilon)}}$ должен лежать в S^+. Аналогично доказывается случай в) когда для некоторого n_0 множество $\mathcal{J} \bigcap_{m \geq n_0} \mathcal{J}_A$ не пусто и не совпадает ни с одним из множеств, участвующих в пересечении.

Сопоставляя случаи а), б), в) и учитывая, что, начиная с некоторого номера κ_0, пересечения $\mathcal{I} \bigcap\limits_{m>n} A_m \cap \mathcal{I}_1$ не пусты при $n > \kappa_0$, получаем нужное утверждение.

ЛСТВИЕ I.I. Из лемм 4.I и 5.I следует, что, начиная с некоторого номера n_0, множества $\bigcap\limits_{m>n_0} A_m$ лежат в одной грани Γ с множеством $A \neq \{0\}$ и они телесны относительно Γ, т.е., начиная с номера n_0, множества $\bigcap\limits_{n>n_0} A_m$ содержат точки, отличные от 0. То, что это не так в структуре $\mathcal{K}$, подтверждает следующий

ПРИМЕР. Рассмотрим в пространстве R^n произвольную ненулевую точку x_0 и любую последовательность $\{x_n\}$ из R^n такую, что x_n сходится к x_0 и точки этой последовательности не лежат на одном луче с x_0. Отрезок $[0, x_n]$ луча, проходящего через точку x_n, будем рассматривать в качестве множества A_n. Нетрудно проверить, что построенная таким образом последовательность $\{A_n\}$ принадлежит $\mathcal{K}$ и $(н)$-сходится к множеству $A = [0, x_0]$. Однако для любого n множества $\bigcap\limits_{m>n} A_m$ состоят из нулевого элемента. Отсюда сразу следует, что $(o) \underline{\lim} A_n = 0$ и, значит, последовательность $\{A_n\}$ не сходится по упорядочению к множеству A.

ЛЕММА 6.I. Для произвольной совокупности элементов $(A_\beta)_{\beta \in B}$ из $\mathcal{K}_0$ для любой грани Γ из конуса R^n_+ имеет место равенство $P_{\tau_\Gamma}(\bigcap\limits_\beta A_\beta) = \bigcap\limits_\beta P_{\tau_\Gamma}(A_\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону включение очевидно:

$$P_{\tau_\Gamma}(\bigcap_\beta A_\beta) \subset \bigcap_\beta P_{\tau_\Gamma}(A_\beta).$$

Для доказательства обратного включения возьмем произвольно $y \in \bigcap\limits_\beta P_{\tau_\Gamma}(A_\beta)$. Так как все множества A_β обладают свойством нормальности, т.е. с каждой своей точкой содержат все меньшие в смысле конуса R^n_+, значит, каждое множество содержит свою проекцию на грань Γ, т.е. $P_{\tau_\Gamma} A_\beta \subset A_\beta$.

Отсюда следует, что точка $y \in \bigcap_{k} A_k$. Так как $P_{\Gamma_r}(y) = y$, значит, $y \in P_{\Gamma_r}(\bigcap_{k} A_k)$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что в лемме 6.1 попутно мы доказали следующий факт: для любого множества $A \in \mathcal{K}$ его проекция на произвольную грань Γ конуса R^n_+ есть тоже элемент $\mathcal{K}$. Действительно, любой элемент $y \in P_{\Gamma_r} A$ является элементом A, следовательно, конусный отрезок $\langle o, y \rangle$ является подмножеством A, и поскольку он целиком лежит в грани Γ, значит, $\langle o, y \rangle \subset P_{\Gamma_r} A$. Остальные свойства элементов $\mathcal{K}$ легко проверяются.

ТЕОРЕМА 5.1. Если последовательность $\{A_n\}$ из $\mathcal{K}$ (H)-сходится к некоторому непустому множеству $A \in \mathcal{K}$, то наименьший (o)-предел последовательности $\{A_n\}$ существует и совпадает с A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A_n \xrightarrow{(H)} A$, то при $n > n(\varepsilon)$ имеет место включение $A_n \subset A + \varepsilon S^+$, следовательно, $\bigcap_{m \geq n} A_m \subset A + \varepsilon S^+$ для любого n в силу монотонности последовательности $\{\bigcap_{m \geq n} A_m\}$. Последнее включение справедливо и для верхней грани этой последовательности, т.е.

$$\overline{\bigcup_{n}} \bigcap_{m \geq n} A_m \subset A + \varepsilon S^+ \quad \text{или} \quad (o)\lim A_n \subset A + \varepsilon S^+$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > o$.

Доказательство обратного включения распадается на 2 случая.

а) Допустим, что множество A телесно. Тогда в пространстве R^n можно ввести новую норму $|\cdot|_A$, выбирая в качестве единичного шара такое выпуклое, компактное, симметричное и телесное множество S_A, что $S_A \cap R^n_+ = A$. В силу эквивалентности всех норм в R^n, для шаров S и S_A существуют такие два числа $\alpha > o$, $\beta > o$, что $S \subset \alpha S_A$ и $S_A \subset \beta S$. Фиксируя произвольно $\varepsilon_o > o$, рассмотрим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_o}{\alpha\beta}$. Тогда для $n > n(\varepsilon_1)$ будем иметь

$$A \subset A_n + \varepsilon_1 S^+ \subset A_n + \varepsilon_1 \alpha A .$$

Допустим, что $\varepsilon_1 \alpha < 1$. Для этого достаточно выбрать $\varepsilon_o < \beta$. Тогда

$$(1 - \varepsilon_1 \alpha) A + \varepsilon_1 \alpha A \subset A_n + \varepsilon_1 \alpha A .$$

В [4] доказано, что совокупность элементов $\mathcal{K}_r$ образует полумодуль с сокращением с бинарной операцией (сложением по Минковскому). Этот факт остается справедливым, естественно, и для $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_r$. Поэтому из последнего включения вытекает, что $(1-\varepsilon_1\alpha)A \subset A_n$ для $n \geqslant n(\varepsilon_1)$, следовательно, $(1-\varepsilon_1\alpha)A \subset$ $\subset \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m$, $n \geqslant n(\varepsilon_1)$. Тогда

$$A = (1-\varepsilon_1\alpha)A + \varepsilon_1\alpha A \subset \bigcap_{m\geqslant n} A_m + \varepsilon_1\alpha A \subset$$

$$\subset \bigcap_{m\geqslant n} A_m + \varepsilon_1\alpha\beta S^+ = \bigcap_{m\geqslant n} A_m + \varepsilon_0 S^+,$$

$$n \geqslant n(\varepsilon_1).$$

В силу монотонности $\{\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\}$ имеем:

$$A \subset \overline{\bigcup_n}\left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m + \varepsilon_0 S^+\right) \subset \overline{\bigcup_n}\bigcap_{m\geqslant n} A_m + \varepsilon_0 S^+ = (o)\,\underline{\lim}\, A_n + \varepsilon_0 S^+$$

для любого наперед заданного $0 < \varepsilon_0 < \beta$. Если же $\varepsilon_0 \geqslant \beta$, тогда в качестве β можно взять ε_0. Тогда поскольку $0 \in \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m$ для любого n, то

$$A \subset \bigcap_{m\geqslant n} A_m + A \subset \bigcap_{m\geqslant n} A_m + \beta S^+ = \bigcap_{m\geqslant n} A_m + \varepsilon_0 S^+,$$

и мы снова получаем нужное утверждение.

б) Допустим теперь, что множество A не телесно. Из леммы 4.I вытекает, что множество A лежит в некоторой грани Γ и A телесно относительно Γ. Из леммы 5.I следует, что найдется такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$ множества $\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m$ лежат в этой же грани Γ. Учитывая линейность оператора проектирования, нетрудно проверить, что если $A_n \xrightarrow{(н)} A$, то $P_{\tau_\Gamma}(A_n) \xrightarrow{(н)} P_{\tau_\Gamma}(A)$ для любой грани $T \subset R^n_+$. Для подпространства $L(e_{i_1},\dots,e_{i_k}) \subset R^n$ такого, что $L(e_{i_1},\dots e_{i_k}) \cap R^n_+ = \Gamma$ и последовательности $\{P_{\tau_\Gamma}(A_n)\}$ (н)-сходящейся к множеству $P_{\tau_\Gamma}(A) = A$ выполнены все условия теоремы для случая а), поэтому

$$(o)\,\underline{\lim}\, P_{\tau_\Gamma}(A_n) = \overline{\bigcup_n}\bigcap_{m\geqslant n} P_{\tau_\Gamma}(A_m) = A\,. \quad (*)$$

Для $n \geqslant n_0$ лемма 6.I дает нам равенство:

$$\bigcap_{m\geqslant n} A_m = \bigcap_{m\geqslant n} P_{\tau_\Gamma} A_m\,.$$

Подставляя левую часть этого равенства в $(*)$, мы получаем

$$\overline{\bigcup_{n\geq n_0}}\bigcap_{m\geq n} A_m = \overline{\bigcup_{n}}\bigcap_{m\geq n} A_m = A,$$

т.е. $(o)\underline{\lim} A_n = A$. Теорема полностью доказана.

Окончательно, теоремы 2.2 и 3.1 дают нам для $\mathcal{H}_o$ утверждение, обратное теореме I.I, т.е. если $A_n \xrightarrow{(\sim)} A$, то $A_n \xrightarrow{(o)} A$. Приведенный выше пример показывает, что уже в $\mathcal{H}_1$ это, вообще говоря, не верно. Таким образом, в $\mathcal{H}_o$, определенные выше два вида сходимости множеств совпадают, что и требовалось.

п. 2^0. Если через $\mathcal{H}$ обозначить совокупность всех подмножеств пространства R^n, то, согласно [9], для любой последовательности $\{A_n\}$ из $\mathcal{H}$ можно определить нижний предел $Lim\ inf\ A_n$, понимаемый в смысле общей теории множеств, и верхний топологический предел $L_s A_n$, вычисляемые по формулам:

$$Lim\ inf\ A_n = \bigcup_{n}\bigcap_{m\geq n} A_m, \quad L_s A_n = \bigcap_{n}\overline{\bigcup_{m\geq n}} A_m.$$

Для точечно-множественного отображения a, переводящего R^n в $\mathcal{H}$ имеет место

ЛЕММА I.2. Следующие три условия эквивалентны для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \to x$:

(I) $Lim\ inf\ a(x_n) \subset a(x) \subset L_s\, a(x_n)$;

(2) $\bigcap_n a(x_n) \subset a(x) \subset \overline{\bigcup_n}\, a(x_n)$;

(3) $a^{-1}(y) = \{z\in R^n / y\in a(z)\}$ замкнуто в R^n, $y\in a[R^n]$, $a^{+}(\overline{\bigcup_n} a(x_n)) = \{z / a(z)\subset \overline{\bigcup_n} a(x_n)\}$ замкнуто в R^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (3). Если $z_n \in a^{-1}(y)$, $z_n \to z$, значит, $y\in a(z_n)$ для всех n, т.е. $y\in \bigcap_n a(z_n)$, откуда следует, что $y\in a(z)$, т.е. $z\in a^{-1}(y)$, что и означает замкнутость множества $a^{-1}(y)$. Если $z_n \in a^{+}(\overline{\bigcup_n} a(x_n))$ и $z_n \to z$, то из (2) вытекает, что $a(z)\subset \overline{\bigcup_n} a(z_n)$, следовательно, $a(z)\subset \subset \overline{\bigcup_n} a(z_n) \subset \overline{\bigcup_n} a(x_n)$, что и требовалось.

(3) $\Rightarrow$ (I). Если для некоторого n_o множество $\bigcap_{m\geq n_o} a(x_m)$ не пусто, т.е. существует $y\in \bigcap_{m\geq n} a(x_m)$, тогда $x_m \in a^{-1}(y)$, $m\geq n_o$. Так как $x_m \to x$, $m\geq n_o$, то из (3) следует, что $x\in a^{-1}(y)$, $y\in a(x)$, значит, $\bigcap_{m\geq n} a(x_m) \subset a(x)$. Так как $\mathcal{H}$

представляет собой полную структуру, то $\operatorname{Lim\,inf} a(x_n) \subset a(x)$. Из (3) имеем также, что множества $a^+(\overline{\bigcup_{m\geq n}} a(x_m))$ содержат точки x_m, $m \geq n$, $n = 1,2,\ldots$, откуда, вследствие замкнутости этих множеств, вытекает, что $a^+(\overline{\bigcup_{m\geq n}} a(x_m))$ содержит точку x, т.е. $a(x) \subset \overline{\bigcup_{m\geq n}} a(x_n)$, $n = 1,2,\ldots$ Следовательно, $a(x) \subset L_s\, a(x_n)$, и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.2. **Пусть отображение** a **удовлетворяет следующим условиям:**

(1) **если** $A \in \mathcal{H}_2$, **то** $a(A) \in \mathcal{H}_2$; $a(A) = \bigcup_{x\in A} a(x)$.

(2) **отображение** a **удовлетворяет условию (2) леммы 1.2.**

Тогда отображение a **(о)-непрерывно на** $\mathcal{H}_2$, **т.е. если** $A_n \xrightarrow{(o)} A$, **то** $a(A_n) \xrightarrow{(o)} a(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (о)-сходимости имеем

$$A = \overline{\bigcup_n} C_n = \bigcap_n B_n ,$$

где $\{C_n\}$ - возрастающая, $\{B_n\}$ - убывающая последовательности из $\mathcal{H}_2$, причем $C_n \subset A_n \subset B_n$. Применяя отображение a, получим три последовательности из $\mathcal{H}_2$, т.е. $\{a(C_n)\}$, $\{a(A_n)\}$, $\{a(B_n)\}$, причем $a(C_n) \subset a(A_n) \subset a(B_n)$ и $\{a(C_n)\}$ возрастает, $\{a(B_n)\}$ убывает.

а) Покажем, что имеет место равенство

$$a(A) = a(\overline{\bigcup_n} C_n) = \overline{\bigcup_n} a(C_n) = \sup_n a(C_n) .$$

Действительно, так как $C_n \subset \overline{\bigcup_n} C_n$, значит, $a(C_n) \subset a(\overline{\bigcup_n} C_n)$ для всех n. Так как $\mathcal{H}_2$-условно полная структура, значит,

$$\sup_n a(C_n) = \overline{\bigcup_n} a(C_n) \subset a(\overline{\bigcup_n} C_n) = a(A),$$

и включение в одну сторону доказано.

Обратно, пусть $x \in a(\overline{\bigcup_n} C_n) = \bigcup_{y \in \overline{\bigcup}_n C_n} a(y)$, значит, найдется $y \in \overline{\bigcup_n} C_n$, так что $x \in a(y)$. Если $y \in \bigcup_n C_n$, тогда для некоторого номера n_0 найдется точка $y \in C_{n_0}$, такая что

$$x \in a(y) \subset a(C_{n_0}) \subset \overline{\bigcup_n} a(C_n)$$

и нужное включение будет, таким образом, доказано.

Если же $y \in \overline{\bigcup_n} C_n$, причем $y \notin \bigcup_n C_n$, тогда в силу того, что $\{C_n\}$ возрастает, найдется последовательность $\{y_n\}$ такая, что $y_n \in C_n$, $y_n \to y$. По свойству (2) имеем $x \in a(y) \subset \overline{\bigcup_n} a(y_n) \subset \overline{\bigcup_n} a(C_n)$, что и завершает доказательство обратного включения.

б) Покажем теперь, что имеет место

$$a(A) = a\left(\bigcap_n B_n\right) = \bigcap_n a(B_n) = \inf_n a(B_n).$$

Так как $\{B_n\}$ убывает, значит, $\bigcap_n B_n \subset B_m$ для любого m, значит, $a(\bigcap_n B_n) \subset a(B_n)$, откуда $a(\bigcap_n B_n) \subset \bigcap_n a(B_n) = \inf_n a(B_n)$.

Обратно, пусть $x \in \bigcap_n a(B_n)$. Тогда $x \in a(B_n)$ для всех n, значит, для каждого n найдется такая точка $y_n \in B_n$, что $x \in a(y_n)$. Так как последовательность $\{y_n\}$ лежит в компактном множестве B_1, значит, из $\{y_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, $y_{n_k} \to y_0$. Снова, пользуясь теоремой Кантора, легко показать, что $y_0 \in \bigcap_n B_n$. Таким образом, имеем $y_{n_k} \to y_0$, $x \in \bigcap_k a(y_{n_k})$, откуда по свойству в) имеем $x \in a(y_0) \subset a(\bigcap_n B_n)$, что и требовалось доказать.

Окончательно для последовательности $\{a(A_n)\}$ нашлись такие две монотонные последовательности $\{a(C_n)\}$ и $\{a(B_n)\}$, что $a(C_n) \subset a(A_n) \subset a(B_n)$ и $\sup_n a(C_n) = \inf a(B_n) = a(A)$, что и означает (о)-сходимость последовательности $\{a(A_n)\}$ к множеству $a(A)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.2. Отображение a, удовлетворяющее условиям теоремы I.2, (он)-непрерывно на $\mathcal{K}_2$, т.е. если $A_n \xrightarrow{(o)} A$, $A_n, A \in \mathcal{K}_2$, то $a(A_n) \xrightarrow{(н)} a(A)$.

Доказательство сразу следует из теорем I.2 и I.I.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Отображение a, удовлетворяющее условиям теоремы I.2, (н)-непрерывно на $\mathcal{K}_0$, т.е. если $A_n, A \in \mathcal{K}_0$, $A_n \xrightarrow{(н)} A$, то $a(A_n) \xrightarrow{(н)} a(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из теорем 2.I и 3.I следует, что $A_n \xrightarrow{(o)} A$, на основании теоремы I.2 заключаем, что $a(A_n) \xrightarrow{(o)} a(A)$, а теорема I.I дает нам, что $a(A_n) \xrightarrow{(н)} a(A)$, что и требовалось.

Если через $\overline{\mathcal{K}}$ обозначить совокупность всех замкнутых подмножеств пространства R^n, тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть отображение a удовлетворяет следующим условиям

I) a переводит конус R^n_+ в $\mathcal{K}_1$, т.е.

$$a(x)\in\mathcal{K}_1, \quad и \quad 0\in a(x); \quad x\in R^n_+;$$

2) если $A\in\mathcal{K}_2$, то $a(A)\in\overline{\mathcal{K}}$, $a(A)=\bigcup\limits_{x\in A} a(x)$;

3) $a(\lambda x)=\lambda a(x)$, $\lambda\geq 0$ - положительная однородность;

4) если $x_1\geq x_2$, то $a(x_1)\supset a(x_2)$ - монотонность.

Тогда если $A_n \xrightarrow{(c)} A$, $A_n, A\in\mathcal{K}_2$, $A\in \mathcal{J}nt\ (R^n_+)$, то

$$a(A_n)\xrightarrow{(H)} a(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что из условий I), 2) и 4) вытекает, что $a(A)\in\mathcal{K}_2$, $A\in\mathcal{K}_2$, т.е. $a(A)$ компактно. Для этого достаточно доказать ограниченность множества $a(A)$, так как $a(A)$ замкнуто по условию 2). Так как пространство R^n является условно-полной структурой, то для любого $A\in\mathcal{K}_2$ существует $x=\sup A$, т.е. $x\geq y$, $y\in A$ (здесь отношение порядка порождено конусом R^n_+). Тогда в силу монотонности отображения a, $a(x)\supset a(y)$, $y\in A$. Следовательно,

$$\sup_{y\in A}{}_{\mathcal{K}}\, a(y)=\bigcup_{y\in A} a(y)=a(A)\subset a(x),$$

откуда и следует ограниченность множества $a(A)$, так как $a(x)$ компактно. Покажем теперь, что для отображения a выполнено условие(2) леммы I.2, если $\lim x_n = x\in \mathcal{J}nt\ (R^n_+)$.
Действительно, если $x_n\to x$, $x\in\mathcal{J}nt\ (R^n_+)$, тогда для всякого $0<\lambda<1$ найдется такое $\delta>0$, зависящее от λ, что

$$x+\delta S\subset\lambda x+R^n_+ ,$$

где S - единичный шар в пространстве R^n. Так как $x_n\to x$, то существует такое $n(\delta)$, что при $n>n(\delta)$ выполняется

$$x_n\in x+\delta S, \quad т.е. \quad x_n\in\lambda x+R^n_+,$$

следовательно, $x_n\geq\lambda x$ при $n>n(\delta)$. Из монотонности и положительной однородности a вытекает, что $a(x_n)\supset a(\lambda x)\supset$ $\supset\lambda a(x)$. Следовательно, $\lambda a(x)\subset\bigcup_n a(x_n)$ для любого $0\le\lambda<1$ значит,

$$\sup_{0\le\lambda<1}\lambda a(x)=\overline{\bigcup_{0\le\lambda<1}}\lambda a(x)=a(x)\subset\bigcup_n a(x_n)\subset\overline{\bigcup_n}a(x_n).$$

С другой стороны, так как $x\in\mathrm{Int}\,(R^n_+)$, то для всякого $\lambda>1$ существует $\delta>0$, зависящее от λ, и такое, что

$$x+\delta S\subset\langle 0,\lambda x\rangle.$$

Так как $x_n\to x$, то существует $n(\delta)$ такое, что при $n\ge n(\delta)$ $x_n\in x+\delta S\subset\langle 0,\lambda x\rangle$, т.е. $x_n\le\lambda x$. Из монотонности и положительной однородности a вытекает, что

$$a(\lambda x)=\lambda a(x)\supset a(x_n),\quad \text{т.е. } \lambda\, a(x)\supset\bigcap_{n\ge n(\delta)}a(x_n).$$

Таким образом, для каждого $\lambda>1$ имеем

$$\lambda a(x)\supset\bigcap_{n\ge n(\delta)}a(x_n)\supset\bigcap_n a(x_n),$$

Следовательно,

$$\inf_{\lambda>1}\lambda a(x)=\bigcap_{\lambda>1}\lambda a(x)=a(x)\supset\bigcap_n a(x_n),$$

что и завершает доказательство условия(2) леммы I.2, и тогда утверждение теоремы сразу следует из следствия I.2.

Рассмотрим теперь еще один вид сходимости элементов из $\mathcal{H}$. Последовательность $\{A_n\}$ из $\mathcal{H}$ (к)-сходится к $A\in\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда

$$A=\{y/y=\lim y_n,\ y_n\in A_n\}.$$

Нетрудно проверить, что $(\kappa)\lim A_n$ совпадает с нижним топологическим пределом $Li\,A_n$, [9]. Известно, что если $\{A_n\}$ из $\mathcal{H}_2$ (н)-сходится к A, то $\{A_n\}$ (к)-сходится к A, [8]. Точечно-множественное отображение a называется непрерывным в смысле Какутани, если из того, что $x_n\to x$ следует:

(I) если $y_n\in a(x_n)$, $y_n\to y$, то $y\in a(x)$;

(2) если $y\in a(x)$, то существует последовательность такая, что $y_n\in a(x_n)$, $y_n\to y$.

Нетрудно проверить, что a непрерывно в смысле Какутани тогда и только тогда, когда $a(x)=(\kappa)\lim a(x_n)$, $x_n\to x$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть отображение a удовлетворяет следующим условиям:

(I) a переводит R^n в $\mathcal{H}_2$;

(2) если $A \in \mathcal{H}_2$, то $a(A) \in \overline{\mathcal{H}}$, $a(A) = \bigcup_{x \in A} a(x)$;

(3) выполнено условие (2) леммы I.2;

(4) если $x_1 \geqslant x_2$, то $a(x_1) \supset a(x_2)$ – монотонность.

Тогда отображение a непрерывно в смысле Какутани.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично теореме 2.2 можно доказать, что $a(A) \in \mathcal{H}_2$, $A \in \mathcal{H}_2$. Пусть теперь $x_n \to x$. Сходимость по норме в пространстве R^n совпадает с (о)-сходимостью последовательности $\{x_n\}$, где порядок порождён конусом R^n_+. Тогда мы можем написать, что существуют две такие последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, что

(I) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, $\{y_n\}$ возрастает, $\{z_n\}$ убывает;

(2) $x = \sup y_n = \inf z_n$.

Из монотонности a имеем три монотонные последовательности элементов из $\mathcal{H}_2$: $\{a(y_n)\}$, $\{a(x_n)\}$, $\{a(z_n)\}$ такие, что

(I) $a(y_n) \subset a(x_n) \subset a(z_n)$;

(2) $\{a(y_n)\}$ возрастает, $\{a(z_n)\}$ убывает.

Покажем, что $\sup a(y_n) = \inf a(z_n) = a(x)$.

а) Так как $x = \inf z_n$, то $a(x) \subset a(z_n)$ для всех n, следовательно, $a(x) \subset \bigcap_n a(z_n) = \inf a(z_n)$. С другой стороны, так как $z_n \to x$, то $\bigcap_n a(z_n) = \inf a(z_n) \subset a(x)$ по условию 3). Получим, таким образом, равенство $a(x) = \inf a(z_n)$.

б) Так как $x = \sup y_n$, то $x \geqslant y_n$, значит, $a(x) \supset a(y_n)$ для всех n, следовательно, $\sup a(y_n) = \overline{\bigcup_n} a(y_n) \subset a(x)$. С другой стороны, так как $y_n \to x$, то условие 3) дает нам включение в обратную сторону, т.е.

$$a(x) \subset \overline{\bigcup_n} a(y_n) = \sup_n a(y_n).$$

Таким образом, последовательность $\{a(x_n)\}$ (о)-сходится к множеству $a(x)$. Из теоремы I.I вытекает, что $a(x_n) \xrightarrow{(\mathcal{H})} a(x)$, следовательно, $a(x_n) \xrightarrow{(K)} a(x)$, т.е.

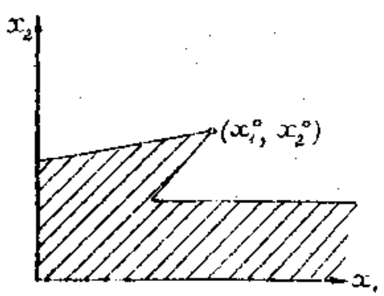
$$a(x) = \{ y / y = \lim y_n,\ y_n \in a(x_n),\ x_n \to x \},$$

что и означает непрерывность a по Какутани. Теорема, таким образом, доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если отображение a удовлетворяет условиям теоремы 3.2, то отображение $a^t(x)=a(a^{t-1}(x))=a(a\dots a(x))$ непрерывно по Какутани для любого целого $t>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.2 следует, что $a(x_n)\xrightarrow{(o)} a(x)$ при $x_n\to x$. Из монотонности a вытекает, что $a(a(x_n))= a^2(x_n)\in \mathcal{H}_2$, следовательно, $a^2(x_n)\xrightarrow{(o)} a^2(x)$ по теореме I.2. Аналогично, $a^t(x_n)\xrightarrow{(o)} a^t(x)$, значит, $a^t(x_n)\xrightarrow{(q)} a^t(x)$, откуда $a^t(x_n)\xrightarrow{(K)} a^t(x)$, что и означает непрерывность по Какутани отображения a^t.

В заключение рассмотрим пример отображения, которое удовлетворяет условиям теоремы I.2, однако непрерывным в смысле Какутани не является. Недостающим условием по теореме 3.2 является условие монотонности. Отображение зададим с помощью графика, расположенного в R^2. Нетрудно проверить выполнение условий теоремы I.2 или первых трёх условий теоремы 3.2. Однако указанное отображение даже не будет полунепрерывным сверху в смысле Какутани, так как график его есть незамкнутое множество в пространстве R^2, ибо точка (x_1°, x_2°) графику не принадлежит.



Автор выражает благодарность А.М.Рубинову за внимание к работе.

Литература

1. П.С.Александров. Введение в общую теорию множеств и функций. М.-Л. Гостехиздат, 1948.
2. Б.З.Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.
3. S.Kakutani. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. T. 7 (1941).

4. А.Г.Пинскер, Пространство выпуклых множеств локально-выпуклого пространства. В сб."Некоторые классы полуупорядоченных пространств," ЛГУ, 1966.

5. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства.- Оптимальное планирование, (1967).

6. А.М.Рубинов. Точечно-множественное отображение, определенное на конусе .- Оптимальное планирование, 14 (1969).

7. Г.Хадвигер. Лекции об объёме, площади поверхности и изопериметрии , "Наука", М., 1966.

8. Ф.Хаусдорф. Теория множеств , ОНТИ, М.-Л. 1937.

9. К.Куратовский, Топология , т.I "Мир", М., 1966.

Поступила в редакцию
20.I. 1971 г.