УДК 51.330.115

СУЩЕСТВОВАНИЕ МАГИСТРАЛИ В МОДЕЛИ С ДИСКОНТОМ

В.Л. Макаров

В заметке рассматривается модель экономической динамики, заданная выпуклым замкнутым множеством $\Omega \subset R^n_+ \times R^n_+$ и непрерывной вогнутой функцией (полезности) $u : R^n_+ \to R_+$. Здесь R^n_+ – неотрицательный ортант n-мерного евклидова пространства R^n. Данную модель будем обозначать через (Ω, u). **Траектория** в модели (Ω, u) представляет собой последовательность $(x_t, c_t)^\infty_{t=0}$ такую, что x_t и $c_t \in R^n_+$, $(x_t, x_{t+1} + c_t) \in \Omega$ для всех t. Экономически x_t вектор продуктов, имеющихся в производстве в начале временного интервала t, c_t – вектор объемов продуктов, идущих на конечное потребление в течение временного интервала t.

Оптимальная траектория определяется в зависимости от функции u и числа $\mu > 1$, которое называется коэффициентом приведения, или дисконтирования, полезности во времени. Траектория $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)^\infty_{t=0}$ – **оптимальна**, если $\sum_{t=0}^{\infty} u(\bar{c}_t)\mu^{-t} \geqslant \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t)\mu^{-t}$ для всех траекторий, выходящих из состояния x_0. Оптимальная траектория $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)^\infty_{t=0}$ называется **магистралью**, если $(\bar{x}_t, \bar{c}_t) = (\bar{x}, \bar{c})$ для всех t.

Вопрос о существовании магистрали для модели (Ω, u, μ) рассматривался ранее в работах [1 – 3] при несколько других предположениях относительно множества Ω и функции u.

Пусть $C = \{c \in R^n_+ \mid c = y - x,\ (x, y) \in \Omega\}$. Пусть, далее $\lambda_0 = \max \lambda$, где $\max$ берется по множеству $\{\lambda \mid \lambda x \leqslant y,$

$(x,y)\in\Omega\}$.

ТЕОРЕМА существования магистрали. Пусть модель (Ω, u, μ) обладает следующими свойствами:

1^0. Множество C ограничено.

2^0. $\mu < \lambda_0$.

3^0. $u(c)=0$, если $c^{(i)}=0$ хотя бы для одного i.

Тогда магистраль существует.

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько предварительных рассуждений и лемму.

Сформулируем задачу выпуклого программирования:

ЗАДАЧА I. Найти $\max\gamma$ при условии $(b,\gamma)\in Z$, где Z есть замыкание множества

$$\{z\in R^{n+2} \mid z=\lambda\left(-1, \frac{y-c}{\mu}-x, \gamma\right),\ (x,y)\in\Omega,\ 0\leq\gamma\leq u(c),$$
$$0\leq c\leq y,\quad \lambda\geq 0\};$$
$$b=\left(-1, \left(\frac{1}{\mu}-1\right)x_0\right).$$

В дальнейшем будем предполагать, что x_0 принадлежит множеству

$$X=\{x\in R^n_+ \mid (x,y)\in\Omega,\quad y-x\geq 0\}.$$

В силу условий теоремы 1^0 и 2^0 множество C компактно и непусто. Отсюда непосредственно следует, что решение сформулированной задачи выпуклого программирования существует при условии $x_0\in X$. Это решение определяется векторами x, y, c. Обозначим множество всех векторов x, входящих в решение задачи, через $x(x_0)$.

Поскольку имеет место неравенство $\mu<\lambda_0$, то существует такой вектор $(\tilde{x},\tilde{y})\in\Omega$, что $\frac{\tilde{y}-\tilde{c}}{\mu}-\tilde{x}\geq 0$, причем $\tilde{c}>0$. Данный факт позволяет утверждать следующее.

Пусть $(x(s))_{s=0}^{\infty}$ – последовательность векторов из множества X, сходящаяся к нулевому вектору. Если в качестве вектора ограничений задачи I брать $\left(-1, \left(\frac{1}{\mu}-1\right)x(s)\right)$, $s=0,1,\ldots$, то векторы ($\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$, $\bar{c}(s)$), определяющие решение задачи I, все расположены на некотором расстоянии от нулевого вектора, так как векторы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{c}$ удовлетворяют ограничениям при любом $x(s)$. Следовательно, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что если $\sum\limits_i x_0^{(i)} \geqslant \varepsilon$, то для вектора $x \in x(x_0)$ также будет выполнено неравенство $\sum\limits_i x^{(i)} \geqslant \varepsilon$.

Обозначим через $X(\varepsilon)$ множество $\{x \in R_+^n \mid x \in X, \sum\limits_i x^{(i)} \geqslant \varepsilon\}$. Определим на множестве $X(\varepsilon)$ точечно-множественное отображение $\Gamma : x \to \Gamma(x)$ следующим образом :

Сформулируем задачу II, отличающуюся от задачи I только тем, что в ней конус $\tilde{Z}$ определен с помощью конуса Z и дополнительного условия $x \leqslant y$ для $(x,y) \in \Omega$. Более точно, $\tilde{Z}$ есть замыкание множества $\{z \in R^{n+2} / z = \lambda\left(-1, \frac{y-c}{\mu} - x, \gamma\right),$

$(x,y) \in \Omega, \ x \leqslant y, \ 0 \leqslant c \leqslant y, \ 0 \leqslant \gamma \leqslant u(c), \ \lambda > 0\}$.

Решение задачи II существует по тем же соображениям, что и решение задачи I, и определяется векторами x , y , c . Обозначим множество векторов x , входящих в решение задачи II при векторе ограничений $b = (-1, (\frac{1}{\mu} - 1)\ x_0)$, через $\Gamma(x_0)$. Поскольку решение x, y, c по определению удовлетворяет неравенству $x \leqslant y$, то $\Gamma(x) \subset X$ для любого x . Более того, в силу только что приведенного рассуждения с ε , $\Gamma(x) \subset X(\varepsilon)$, если $x \in X(\varepsilon)$, то есть отображение Γ переводит множество $X(\varepsilon)$ в себя.

ЛЕММА. О т о б р а ж е н и е Γ о б л а д а е т с л е д у ю щ и м и с в о й с т в а м и :

а) $\Gamma(x)$ н е п у с т о и в ы п у к л о д л я л ю б о г о $x \in X(\varepsilon)$.

б) Γ п о л у н е п р е р ы в н о с в е р х у п о К а к у т а н и .

Справедливость этой леммы устанавливается стандартным образом, поэтому доказательство здесь не приводится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. (а) Согласно лемме, точечно-множественное отображение $\Gamma : x \to \Gamma(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Какутани о неподвижной точке. Обозначим неподвижную точку через $\bar{x}$, то есть $\bar{x} \in \Gamma(\bar{x})$. Решение задачи II при векторе ограничений $b = (-1, (\frac{1}{\mu} - 1)\ \bar{x}\ )$ обозначим через $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$. Для $\bar{c}$ выполнено неравенство $\bar{c} > 0$. Действительно, в противном случае согласно условиям теоремы относительно функции u $u(\bar{c}) = 0$. С другой стороны, поскольку существует вектор $(\tilde{x},\tilde{y})\in\Omega$ такой, что $\lambda_0\tilde{x}\leq\tilde{y}$ и $\lambda_0>\mu$, то $\frac{\tilde{y}-\bar{c}}{\mu}-\tilde{x}\geq\left(\frac{1}{\mu}-1\right)\bar{x}$ и $u(\tilde{c})>0$, что противоречит оптимальности значения функции u в точке $\bar{c}$.

Покажем, что решение $(\bar{x},\bar{y},\bar{c})$ задачи II при ограничениях $\left(-1,\left(\frac{1}{\mu}-1\right)\bar{x}\right)$ является решением также и задачи I при тех же самых ограничениях. Обозначим двойственные переменные, соответствующие, согласно теореме о характеристике задачи выпуклого программирования, решению ($\bar{x},\bar{y},\bar{c}$), через $\bar{p}=(\nu,p,1)\in(R_+^{n+2})^*$. Имеем $pz\leq 0$ для всех $z\in\tilde{Z}$ и $\bar{p}(-1,(\frac{1}{\mu}-1)\bar{x},u(\bar{c}))=0$. Следует установить, что $\bar{p}z\leq 0$ для всех $z\in Z$, а не только для $z\in\tilde{Z}$. Для этого достаточно показать, что

$$p\left(\frac{\bar{y}-\bar{c}}{\mu}-\bar{x}\right)+u(\bar{c})\geq p\left(\frac{y-c}{\mu}-x\right)+u(c) \qquad (1)$$

для всех $(x,y)\in\Omega$. Из соотношения $\bar{p}z\leq 0$ при $z\in\tilde{Z}$ следует выполнение неравенства (1) только при дополнительном условии, что $x\leq y$. Если бы соотношение (1) не выполнялось для всех $(x,y)\in\Omega$, это означало бы, что для любого $\varepsilon>0$ нашелся бы вектор $(\hat{x},\hat{y})\in\Omega$, для которого $\|(\hat{x},\hat{y})-(\bar{x},\bar{y})\|\leq\varepsilon$ и

$$p\left(\frac{\bar{y}-\bar{c}}{\mu}-\bar{x}\right)+u(\bar{c})<p\left(\frac{\hat{y}-\hat{c}}{\mu}-\hat{x}\right)+u(\hat{c}). \qquad (2)$$

Но поскольку при достаточно малом ε неравенство $\hat{x}\leq\hat{y}$ не нарушается, так как $\bar{x}<\bar{y}$ ($\bar{c}>0$), то неравенство (2) не может иметь место. Таким образом, мы получили, что $\bar{p}z\leq 0$ для всех $z\in Z$. Последнее означает по теореме о характеристике задачи выпуклого программирования, что ($\bar{x},\bar{y},c$) является решением задачи I.

(б) Построим с помощью этого решения ($\bar{x},\bar{y},\bar{c}$) траекторию $(\bar{x}_t,\bar{c}_t)_{t=0}^{\infty}$ модели (Ω,u), положив $\bar{x}_t=\bar{x}$, $\bar{c}_t=c$ для всех t. Последовательность $(\bar{x}_t,\bar{c}_t)$ действительно является траекторией, так как из включения $\bar{x}\in\Gamma(\bar{x})$ вытекает $\frac{\bar{y}-\bar{c}}{\mu}-\bar{x}=\left(\frac{1}{\mu}-1\right)\bar{x}$ и, следовательно, $\bar{y}-\bar{c}=\bar{x}$.

Покажем теперь, что стационарная траектория ($\bar{x}_t,\bar{c}_t$) оптимальна. С помощью двойственных переменных $\bar{p}$ построим последовательность $(p_t)_{t=0}^{\infty}$ характеристических цен для траектории $(\bar{x}_t,\bar{c}_t)$. А именно, положим $p_t\,\frac{p}{\mu}$ для всех t.

Для последовательности (p_t) имеет место неравенство

$$p_t(\bar{y}-\bar{c})+u(\bar{c})\mu^{-t}-p_{t-1}\bar{x} \geq p_t(y-c)+u(c)\mu^{-t}-p_{t-1}x \quad (3)$$

для всех t и всех $(x,y)\in\Omega$, $0\leq c\leq y$. Это неравенство непосредственно следует из соотношения $pz\leq 0$ для всех $z\in Z$. Так как $\mu>1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} p_t\bar{x}=0$. Поэтому, переходя к пределу в неравенстве (3), получаем $\sum\limits_{t=0}^{\infty} u(\bar{c})\mu^{-t}\geq\sum\limits_{t=0}^{\infty} u(c_t)\mu^{-t}$ для любой траектории $(x_t, c_t)_{t=0}^{\infty}$, выходящей из состояния $\bar{x}$. Следовательно, траектория $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)$ оптимальна, что и требовалось доказать.

Литература

1. Sutherland W; R. "On Optimal Development Programs when Future Utility is discounted". Doctoral Dissertation, Brown University, Providence, 1967.
2. В.Л.Макаров. Состояние равновесного сбалансированного роста в модели Неймана с функцией полезности. Сб."Оптимальное планирование," 8, 1967.
3. T.C.Koopmans. "A model of a continuing state with scarce capital". Proceedings of the Symposiam on Nathional Economy modelling. Novosibirsk, 1970.

Поступила в редакцию
14.VI. 1971 г.