УДК 51.330.115

О СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЗАМКНУТОЙ ЭКОНОМИКИ С ПОТРЕБЛЕНИЕМ

Г.Д.Майстровский

В настоящей работе предлагается одна линейная модель замкнутой расширяющейся экономики, учитывающая личное потребление, и изучаются условия равновесия этой модели.*)

I. Назовём моделью E агрегат

$$\{K, \pi, a\},$$

где K - некоторый конечный конус в R_+^{2n+k}; $\pi \in \mathcal{I}nt(R_+^k)^*$; $a \in R_+^n$, $a \neq 0$. Конус K интерпретируется как технологический, каждая точка (x, s, y) $(x, y \in R_+^n, s \in R_+^k)$ этого конуса - технологический процесс, x - соответствующий вектор затрат продуктов, s - вектор различных видов трудовых затрат, y - вектор выпусков продуктов; π - вектор ставок заработной платы за различные виды труда; a - вектор усредненных потребительских предпочтений.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

I. Если $(x, s, y) \in K$ и $y \neq 0$, то $x \neq 0$, $s \neq 0$.

II. Существует такая точка (x, s, y), что $y > 0$.

Состоянием равновесия модели E назовём набор

$$R = \{q, y^{(1)}, y^{(2)}, s^{(1)}, p\}$$

$(q \in R_+^1, (y^{(1)} - a, s^{(1)}, y^{(2)}) \in K, p \in (R_+^n)^*$), удовлетворяющий неравенствам

---

*) Как любезно сообщил автору А.М.Рубинов, близкая модель описана в [I]. Однако теорема о равновесии в [I] существенно отличается от соответствующего результата настоящей заметки.

$$
\begin{aligned}
&y^{(2)} \geqslant q y^{(1)} , \\
&p(y) \leqslant q[p(x) + \pi(s)] \quad \text{для всех } (x,s,y) \in K , \\
&\pi(s^{(1)}) \leqslant p(a) , \\
&y^{(2)} \neq 0 .
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Число $q = q(R)$ называется сбалансированным темпом роста. Отметим, что в состоянии равновесия имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
&\pi(s^{(1)}) = p(a), \\
&p(y^{(2)}) = q[p(x^{(1)}) + \pi(s^{(1)})] = q p(y^{(1)}), \\
&p(a) > 0, \quad p(y^{(2)}) > 0; \; (x^{(1)} = y^{(1)} - a).
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

В интерпретации p - вектор цен продуктов, $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ - соответствующим образом пронормированные суммарные выпуски экономики (совокупные общественные продукты в натуральной форме) в двух последовательных циклах. Смысл требования (1) состоит в отсутствии дефицита продуктов личного потребления,ж) а соотношение (2) показывает, что в действительности, в равновесном состоянии имеет место точное равенство между платежеспособным спросом населения и его товарным обеспечением. Остальные соотношения интерпретируются так же, как и в модели, не учитывающей непроизводственного потребления (классическая неймановская модель).

2. Пусть L - конечный конус в $R^n_+ \times R^n$. Сопоставим каждому $\lambda \geqslant 0$ множество $A_L(\lambda) \subset \{1, 2, \ldots ; n\}$ по правилу: $i \in A_L(\alpha)$ тогда и только тогда, когда существует вектор $(u, v) \in L$ и такой, что

$$
V \geqslant \alpha n \quad , \quad v_i > \alpha u_i .
$$

Легко видеть, что функция $A_L(\lambda)$ монотонно не возрастает по включению и кусочно-постоянна. Множество $\sigma(L)$ её положительных точек разрыва назовёмжж) спектром конуса L (ср. с [2]). Очевидно, неравенства

ж) Для простоты интерпретации мы считаем, что покупательный фонд населения совпадает с денежным фондом, получаемым в качестве оплаты трудовых затрат. На самом деле можно предложить более реалистическую интерпретацию.

жж) Точнее, спектром суперлинейного отображения, порождае[мого] этим конусом.

$$\sigma(\lambda) \neq \phi \qquad \text{и} \qquad A_L(+0) \neq A_L(\infty)$$

эквивалентны.

ЛЕММА. Для того, чтобы при данном $\lambda \in R^1_+$ существовал набор

$$\{\bar{u}, \bar{v}, p\} \quad ((\bar{u},\bar{v}) \in L, \ p \in (R^n_+)^*),$$

удовлетворяющий условиям

$v - \lambda\bar{u} \geq 0$; $p(v - \lambda u) \leq 0$ для всех $(u,v) \in L$; $p(\bar{v}) > 0$, (3)

необходимо и достаточно, чтобы $\lambda \in \sigma(L)$.

Отметим, что из этой леммы вновь вытекает известная теорема о равновесии в модели Неймана. Доказательство леммы проводится с помощью рассуждений, близких к применявшимся при исследовании этой и родственных ей моделей (см., например,[2],[3]). Поэтому мы не будем приводить подробного доказательства, наметим лишь схему доказательства в сторону достаточности.

Пусть $A_L(\lambda+0) \neq A_L(\lambda-0)$. Можно показать, что тогда и $A_L(\lambda) = A_L(\lambda-0)$. Из этого факта вытекает существование вектора $(\bar{u},\bar{v}) \in L$ и номера $j_0 \bar{\in} A_L(\lambda)$ таких, что

$$\bar{v} \geq \lambda\bar{u} \quad , \ \bar{v}_{j_0} > 0 .$$

Рассмотрим конус

$$W = \{w / w = v - \lambda u \ , \ (u,v) \in L\} .$$

Поскольку при $j \bar{\in} A_L(\lambda)$ для любого $w \in W \cap R^n_+$ будет $w_j = 0$, существует гиперплоскость $p(w) = 0$, разделяющая W и R^n_+ , причем $p_j > 0$ при $j \in A_L(\lambda)$. Набор $\{\bar{u}, \bar{v}, p\}$ удовлетворяет неравенствам (3).

3. Рассмотрим неймановскую модель, индуцированную моделью E :

$$\tilde{K} = \{(x,y) / (x,s,y) \in K\}.$$

Положим

$$A = \{i / i \in \{1,2,\dots,n\}, \ a_i > 0\}.$$

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы $q > 0$ было сбалансированным темпом роста модели E , необходимо и достаточно, чтобы $A_{\tilde{K}}(q) \supset A$.

Отметим, что для выполнения этого условия достаточно, чтобы $q < \alpha^*$, и необходимо, чтобы $q \leq \alpha^*$, где α^* – точка спектра конуса $\tilde{K}$, выделенная условием

$$A \subset A_{\tilde{K}}(\alpha^* - 0), \quad A \not\subset A_{\tilde{K}}(\alpha^* + 0).$$

Для доказательства теоремы рассмотрим при фиксированном $q > 0$ конус

$$L^q = \{(u, v) / u = q\mathcal{K}(s)a,\ v = y - qx,\ (x, s, y) \in K\}.$$

Пусть при некотором $\lambda \in R^1_+$ набор

$$\{\bar{u}, \bar{v}, p\} \quad ((\bar{u}, \bar{v}) \in L^q,\ p \in (R^n_+)^*)$$

удовлетворяет условиям (3) с $L = L^q$. Представим вектор $(\bar{u}, \bar{v})$ в виде

$$\bar{u} = q\mathcal{K}(s^{(1)})a, \quad \bar{v} = y^{(2)} - qx^{(1)}.$$

Без ограничения общности можно считать, что вектор $(\bar{u}, \bar{v})$ и функционал p нормированы условием

$$\mathcal{K}(s^{(1)}) = p(a) = \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда, как легко видеть, набор

$$R = \{q,\ x^{(1)} + a,\ y^{(2)},\ s^{(1)},\ p\}$$

является состоянием равновесия модели E. Пусть, обратно, набор R является состоянием равновесия модели E. Тогда при $\lambda = [p(a)]^{-1}$ набор

$$\{q\mathcal{K}(s^{(1)})a,\ y^{(2)} - qx^{(1)},\ p\}$$

удовлетворяет условиям (3) с $L = L^q$.

Таким образом, как следует из леммы, число $q > 0$ является сбалансированным темпом роста модели E тогда и только тогда, когда $\sigma(L^q) \neq \emptyset$ (причем пара (λ, q) совместима в равновесном состоянии в том и только в том случае, когда $\lambda \in \sigma(L^q)$).

Для завершения доказательства теоремы осталось отметить, что $A_{L^q}(+0) = A_{\tilde{K}}(q)$, если $A \subset A_{\tilde{K}}(q)$, и $A_{L^q}(+0) = \emptyset$ в противном случае, и всегда $A_{L^q}(\infty) = \emptyset$.

Литература

1. M.Morishima. Equilibrium, stability and growth, London, Clarendon press, 1964.

2. В.Л.Макаров, А.М.Рубинов, Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики. УМН, 25. 5 (155), 1970.

3. С.М.Мовшович. Теоремы о магистрали в моделях Неймана-Гейла. Эконом. мат. мет., 5 (1969), 6.

Поступила в редакцию
7.V. 1971 г.