УДК 519.3:330.115

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА В ЦЕЛЯХ ОРОШЕНИЯ

В.А.Кардаш, Э.О.Рапопорт

В большинстве работ по проблемам многолетнего регулирования стока в целях орошения (см.,например,[1-9]) основное внимание уделяется инженерно-технической стороне дела. Изучаются вопросы согласования системы параметров плотины, водохранилища, каналов, сбросных сооружений и т.п. в условиях случайных колебаний стока реки.

В данной работе в основу построения и исследования модели зарегулирования положен экономический критерий оптимальности для выбора параметров системы "оросительный комплекс - орошаемое земледелие" с учетом важнейших технических требований по их согласованию. При этом функционирование системы рассматривается как случайный процесс, связанный с динамикой случайного стока реки. Подобный подход используется, например, в [10].

1. Описание модели

Рассматривается схема орошения из реки, предполагающая регулирование стока водохранилищем, создание водопроводящей и распределительной сетей и подготовку площадей к орошению. Годовой сток реки случаен и состоит из двух частей: стока за оросительный сезон (который может быть использован как непосредственно на орошение, так и на пополнение водохранилища) и стока за межоросительный сезон (который может быть использован только на пополнение водохранилища).

Требуется найти оптимальные значения объёма водохранилища, мощности оросительной сети (так называемые стратегические параметры) и тактику орошения, то есть оптимальную политику накопления воды в водохранилище и использования ресурсов воды в каждый год. При этом параметры, определяющие тактику орошения, рассматриваются как случайные величины, а стратегические параметры считаются детерминированными.

Такой подход оправдывается следующими соображениями. В реальных ситуациях стратегические параметры системы должны быть определены до реализации проекта и существенно не меняются при функционировании системы. Тактические же параметры определяются лишь в процессе функционирования системы в зависимости от сложившейся ситуации (например, от величины стока реки в данный год и запаса воды в водохранилище к началу сезона).

Будет рассматриваться дискретная модель функционирования оросительной системы с периодом в год. Год разбивается на два сезона: оросительный и межоросительный.

Введем следующие обозначения:

V - объём водохранилища;

V_t - количество воды в водохранилище к началу оросительного сезона в год t ;

S - площадь земли, пригодная для орошения;

x - площадь, подготовленная к орошению;

q - постоянная оросительная норма на I гектар.

Заметим, что сезонная мощность оросительной сети при фиксированном режиме орошения I гектара, определяется площадью x , подготовленной к орошению;

x_t - площадь, орошаемая в год t (фактически используемая в год t мощность сети);

$Q_t^{(1)}$ - сток за оросительный сезон в год t ;

$Q_t^{(2)}$ - сток за межоросительный сезон в год t ;

$\varphi_1(Z)$ - чистый доход, получаемый от орошения площади Z , подготовленной к орошению;

$\varphi_2(Z)$ - чистый доход с площади Z , подготовленной к орошению (произведены соответствующие текущие производственные и эксплуатационные затраты), но неорошаемой;

$\varphi_3(Z)$ - чистый доход с богарных земель площади Z.

Естественные технико-экономические соображения позволяют установить простую связь между функциями φ_2 и φ_3, а именно:

$$\varphi_2(Z) = \varphi_3(\gamma Z) - \mathcal{Z}(Z) \quad ,$$

где γ - коэффициент земельного использования (отношение площади нетто к площади брутто, подготовленной к орошению); $\mathcal{Z}(Z)$ - ежегодные производственные и эксплуатационные затраты, связанные с готовностью площади Z к поливу. Однако для дальнейших рассмотрений удобнее выразить эти части дохода разными функциями, так как доход φ_2 будет функцией случайной величины, а φ_3 - функцией детерминированной переменной [II].

$f_1(x)$ - капитальные затраты на подготовку к орошению площади x, строительство соответствующей водопроводящей, распределительной сети и прочих водохозяйственных сооружений;

$f_2(V)$ - затраты на строительство водохранилища ёмкостью V.

$\rho = 1-\rho'$, ρ - коэффициент эффективности капитальных вложений, $0<\rho'<1$.

S, q, ρ' - известные детерминированные величины; φ_1, φ_2, φ_3, f_1, f_2 - известные функции; $Q_t^{(1)}$, $Q_t^{(2)}$ (t=0,I,2....) - случайные величины с известными функциями распределения.

Требуется определить детерминированные стратегические параметры x и V и случайные величины x_t и V_t, максимизирующие функционал

$$\Phi = E\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \left[\varphi_1(x_t) + \varphi_2(x - x_t) + \varphi_3(S-x)\right] - f_1(x) - f_2(V)$$

и удовлетворяющие ограничениям:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а)}\ 0 \le x \le S & ; \\ \text{б)}\ 0 \le x_t \le x & ; \\ \text{в)}\ 0 \le V_t \le V & ; \\ \text{г)}\ q\,x_t + V_{t+1} - V_t \le Q_t^{(1)} + Q_t^{(2)} & ; \\ \text{д)}\ q\,x_t \le V_t + Q_t^{(1)} & . \end{array}\right\}\ t = 0,1,2,\ldots \qquad \text{(I)}$$

В функционале выражение $E\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t[\cdots]$ есть математическое ожидание суммарного чистого дохода с площади S за сколь угодно большой период времени с учётом приведения разновременных величин его к году начала функционирования системы. Тогда функционал Φ характеризует экономическую эффективность системы величиной превышения указанного чистого дохода над суммой капиталовложений в орошение. Его максимизация влечёт за собой максимизацию степени окупаемости капиталовложений дополнительным чистым доходом (ДЧД) от орошения, выражаемой разностью приведённой величины ДЧД и суммы капиталовложений. При этом вопрос об очерёдности ввода системы в эксплуатацию не рассматривается. Предполагается также, что величина капитальных затрат определена на момент полного ввода в эксплуатацию системы и что этот момент для всех допустимых вариантов системы один и тот же.

Смысл первых трёх ограничений очевиден. Ограничение г) отражает условие годового баланса воды в системе с учётом зарегулирования и сброса (предполагается, что технически осуществим любой сброс, а стоимость сбросных сооружений учтена в затратах на строительство водохранилища, исходя, например, из максимально возможного значения стока Q_{max}). Ограничение д) выражает возможность использовать на орошение только запасы воды в водохранилище к началу года t и сток за оросительный период этого года.

2. Экономико-математический анализ модели

Для исследования решения описанной задачи нам потребуется следующее предположение:

ГИПОТЕЗА А. При каждом x функция

$$h_x(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(x - z)$$

дифференцируема,*) и существуют такие положительные постоянные $\underline{\alpha}$ и $\bar{\alpha}$, что

1) $\bar{\alpha} \geq \underline{\alpha} > \rho\bar{\alpha}$;

2) $\bar{\alpha} \geq \frac{d}{dz} h_x(z) \geq \underline{\alpha}$ при всех $z \leq x$.

Экономическое содержание этой гипотезы заключается в том, что предельный чистый доход на единицу поливаемой площади мало

*) Условие дифференцируемости несущественно. Оно только позволяет упростить формулировки.

изменяется.[ж)]

Пусть x и V фиксированы. Тогда гипотеза А позволяет найти тактические решения x_t и V_t как функции от $Q_t^{(1)}$, $Q_t^{(2)}$, $(t=1,2,\ \ )$, x, V.

Заметим сначала, что тактику x_t лимитируют, во-первых, количество воды в водохранилище и сток в данный сезон и, во-вторых, мощность сети x. Покажем, что оптимальная политика орошения $\tilde{x}_t = (t=1,2,\ldots)$ определяется по следующей формуле:

$$\tilde{x}_t = min\left\{x, \frac{Q_t^{(1)}+V_t}{q}\right\}. \qquad (2)$$

Действительно, любое допустимое решение x_t (т.е. решение, удовлетворяющее ограничениям (I)) не превосходит $\tilde{x}_t$. Если в год t принимается решение $\bar{x}_t < \tilde{x}_t$, то количество воды $q\cdot(\tilde{x}_t - \bar{x}_t) = q\Delta$ либо идет на пополнение водохранилища, либо сбрасывается. Математическое ожидание чистого дохода от этого количества воды (получаемого не ранее, чем в следующий год) не превосходит

$$J_\Delta^{t+1} = E\rho^{t+1}\left(h(x_{t+1}+\Delta) - h(x_{t+1})\right).$$

ж) В реальной экономической ситуации нетрудно получить грубую оценку пределов возможной вариации $\frac{d}{dz}h_x(z)$.

Действительно, представим функцию $h_x(z)$ в виде:

$$h_x(z) = C_2(x)x + \int_0^z [C_1(z) - C_2(x-z)]\,dz,$$

где z - поливаемая часть площади x, а $C_1(z)$ и $C_2(x-z)$ - погектарные нормы чистого дохода соответственно на поливаемой и не поливаемой частях массива x, зависящие от структуры посевов и технологии, меняющихся с изменением площадей z и $x-z$.

Тогда $\frac{d}{dz}h_x(z) = C_1(z) - C_2(x-z)$. Отсюда можно положить $\underline{\alpha} = \min\limits_{z\in[0,x]} C_1(z) - \max\limits_{z\in[0,x]} C_2(z)$ и $\bar{\alpha} = \max\limits_{z\in[0,x]} C_1(z) - \min\limits_{z\in[0,x]} C_2(z)$.

Пределы изменения экономических показателей, определяющих нормативы C_1 и C_2, в конкретных условиях хорошо известны.

Условие

$$\min_z C_1 - \max_z C_2 > \rho\,(\max_z C_1 - \min_z C_2) \qquad (*)$$

при этом означает, что минимально возможное приращение дохода на I га полива в фиксированный год должно быть больше, чем максимально возможное приращение дохода на I га в следующем году с учётом его уценки.

Заметим, однако, что условие (*) может и нарушаться, хотя гипотеза А и выполняется, т.е. условие (*) является лишь достаточным.

Но в год t мы "недополучили"

$$J_\Delta^t = E\rho^t(h(\tilde{x}_t) - h(\tilde{x}_t - \Delta)).$$

По гипотезе А и теореме о среднем имеем

$$\rho(h(Z+\Delta)-h(Z)) = \rho \cdot h'(Z_0)\Delta \leq \rho\bar{\alpha}\Delta < \underline{\alpha}\Delta \leq h(y) - h(y-\Delta).$$

Поэтому $J_\Delta^t > J_\Delta^{t+1}$, что и доказывает справедливость формулы (2).

Оптимальные значения параметров V_t определяются из рекуррентных соотношений

$$\tilde{V}_t = min(max(0, Q_{t-1}^{(1)} + \tilde{V}_{t-1} - x) + Q_{t-1}^{(2)}, V), \qquad (3)$$

так как сброс воды целесообразен лишь при переполнении водохранилища (как следует из гипотезы А, $h' > 0$, поэтому орошать всегда выгодно).

Рекуррентное соотношение (3) позволяет выразить все $\tilde{V}_t$ (и тем самым $\tilde{x}_t$), $t = 1,2,\ldots$, через V_0 – начальное наполнение водохранилища (которое в дальнейшем будем считать фиксированным), x и V. Подставив известные $\tilde{x}_t$ в целевую функцию задачи (I), получим, что исходная задача сводится к нахождению экстремума функции Φ двух переменных x и V при единственном ограничении

$$0 \leq x \leq S.$$

Остальные ограничения учтены формулами (2) и (3).

Однако выписывание в явном виде функции $\Phi(x,V)$ осложняется необходимостью усреднения по случайным реализациям величин $Q_t^{(1)}$ и $Q_t^{(2)}$, $t = 0,1,2,\ldots$

Поэтому дальнейшее изучение модели связано со стохастической природой стока.

ГИПОТЕЗА Б. Случайные величины $Q_t^{(1)} (Q_t^{(2)})$, $t = 0,1,2,\ldots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие лишь конечное множество значений.

При этом предположении $\{\tilde{V}_t\}$, $t = 1,2,\ldots$, есть марковский процесс с конечным числом состояний.

Ясно, что $\{Q_t^{(1)} + \tilde{V}_t\}$ – тоже марковский процесс.

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ – множество состояний этого процесса, а $G = \| q_{ij} \|, i,j = 1,2,\ldots,n,$ – его матрица вероятностей перехода из состояния α_i в состояние α_j.

При фиксированных x и V найдём распределение случайных величин $\widetilde{x}_t$. Через $[x]$ обозначим номер такого состояния α_j, что $\alpha_{[x]} \geq xq > \alpha_{[x]-1}$ (так как состояния естественно упорядочены). Тогда

$$P(\widetilde{x}_t = x) = P(Q_t^{(1)} + \widetilde{V}_t \geq xq) = \sum_{s=[x]}^{n} P(Q_t^{(1)} + \widetilde{V}_t = \alpha_s) =$$
$$= \sum_{s=[x]}^{n} \sum_{z=1}^{n} P(Q_{t-1}^{(1)} + \widetilde{V}_{t-1} = \alpha_z) \cdot q_{zs} = (K_{[x]}, g_0 G^t),$$

где $K_{[x]}$ – n-мерный вектор, причем первые $[x]-1$ компонент его равны нулю, а остальные – единице, g_0 – вектор начального распределения случайной величины $V^0 + Q_0^{(1)}$.
Аналогично, для $s < [x]$:

$$P(\widetilde{x}_t = \tfrac{1}{q} \alpha_s) = P(Q_t^{(1)} + \widetilde{V}_t = \alpha_s) = (g_0 G^t)_s,$$

где $(a)_i$ обозначает i-ю компоненту вектора a.

Рассмотрим вектор $b(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))$, где

$$b_i(x) = \min(h(\alpha_i / q), h(x)).$$

Тогда

$$E h_x(x_t) = (b(x), g_0 G^t). \tag{4}$$

Отсюда:

$$\Phi(x,V) = E \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t [\varphi_1(x_t) + \varphi_2(x - x_t) + \varphi_3(s - x)] -$$
$$- f_1(x) - f_2(V) = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t E h_x(x_t) + H(x, V),$$

где $H(x,V) = \varphi_3(s-x) \frac{1}{1-\rho} - f_1(x) - f_2(V)$.

Учитывая (4), получим:

$$\Phi(x,V) = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t (b(x), g_0 G^t) + H(x,V).$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\Phi(x,V) = (b(x), g_0 (I - \rho G)^{-1}) + H(x,V). \tag{5}$$

Формула (5) позволяет рассчитывать численные значения функции $\Phi\ (x, V)$ при каждом x , V и V_0 и находить её экстремумы.

Заметим, что элементы матрицы G зависят от x и V .

Заключение

При построении и исследовании модели (I) мы ввели ряд предположений, упростивших выкладки и рассуждения, но не существенных с принципиальной точки зрения. Так, полученные результаты легко обобщаются на случаи, когда оросительная норма q является переменной величиной: известной функцией от x_t , искомым тактическим параметром или же случайной величиной, зависящей от осадков. Принципиальных трудностей не представят и случаи, когда Q_t есть непрерывная (по времени) случайная функция или непрерывный по состояниям случайный процесс.

Использованный в работе приём выражения тактических случайных параметров через фиксированные детерминированные стратегические параметры можно использовать и для исследования различных технико-экономических модификаций модели зарегулирования стока. Так, в показателе экономической эффективности модели (I) нетрудно отразить влияние вариантов разновременности капитальных затрат, а также очередности ввода системы в эксплуатацию.

Литература

I. А.Н.Костяков. Основы мелиорации. Сельхозгиз, М., 1960.
2. С.Н.Крицкий, М.Ф.Менкель. Водохозяйственные расчёты. Гидрометеоиздат, Л., 1952.
3. С.Н.Крицкий, М.Ф.Менкель. Расчёт многолетнего регулирования стока с учётом коррелятивной связи между стоками смежных лет.-"Труды Всесоюзного гидрологического съезда", т.УI, Гидрометеоиздат, Л., 1959.
4. Н.А.Картвелишвили. О математическом описании и методике расчётов регулирования речного стока.- "Известия АН Казахской ССР", ОТН, № I, 1956.
5. Н.А.Картвелишвили. К теории многолетнего регулирования речного стока.- "Известия ВНИИГиМ", № 58, 1958.

6. Н.А.Картвелишвили. Уравнения оптимального сезонного режима энергетических систем как вероятностного процесса с непрерывным временем. -"Журнал прикладной механики и технической физики", № I, I965.

7. Н.А.Картвелишвили. Формула полной вероятности в теории регулирования речного стока. Сб. "Проблемы гидротехники и водного хозяйства", вып.4, изд. "Наука", Алма-Ата, I966.

8. Н.А.Картвелишвили. Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании речного стока. Гидрометеоиздат, Л., I967.

9. А.Д.Саваренский. Водохозяйственные расчёты при регулировании стока, Куйбышев, I935.

10. Э.О.Рапопорт, В.Н.Дятлов. Об одной простейшей модели построения оросительного комплекса. Тезисы докладов совещания по применению математических методов и ЭВМ в мелиорации и водном хозяйстве. (г.Ереван, 9-I3 декабря I969 г.), Москва, I969.

11. В.А.Кардаш. Экономико-математические модели для выбора оптимальных параметров оросительных систем. Сб. "Вопросы моделирования размещения сельского хозяйства", Новосибирск, "Наука", I968.

Поступила в редакцию
I4.I. I97I г.