УДК 51.330:115

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ НИКАЙДО О МАГИСТРАЛИ В СИЛЬНОЙ ФОРМЕ

А.Ж. Жафяров

В работе [5] теорема о магистрали в сильной форме доказана в случае, когда технологический конус Z является строго выпуклым. Однако с экономической точки зрения строгая выпуклость Z является неправдоподобным свойством. В работе [3] теорема о магистрали в сильной форме доказана для моделей с переменной технологией и со строго равновесной системой[ж)]. Во всех этих работах неймановская грань состоит из одного луча. В настоящей работе доказывается теорема о магистрали в сильной форме для некоторых моделей с постоянной технологией, у которых неймановская грань натянута на конечное число образующих. (Эту теорему можно доказать и для моделей с переменной технологией, удовлетворяющих условиям, аналогичным тем, при которых она будет доказана для моделей с постоянной технологией).

1^0. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство R^n. Пусть R^n_+ – положительный ортант пространства R^n. Рассмотрим модель Неймана-Гейла Z с постоянной технологией, которая задается с помощью выпуклого замкнутого конуса $Z \subset R^n_+ \times R^n_+$ такого, что

а) $(0, y) \bar{\in} Z$ при $y \neq 0$;

б) если $(x, y) \in Z$, $x' \geq x \geq 0$, $y \geq y' \geq 0$, то $(x', y') \in Z$.

ж) В этой работе принята терминология [1].

Условимся в дальнейшем обозначать символом:

1) $\{x\}^i$ – i-ю координату вектора x;

2) $[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение как в пространстве R^n, так и в пространстве $R^n \times R^n$. Из контекста будет ясно, в каком из этих пространств рассматривается скалярное произведение.

2^0. Для доказательства теоремы о магистрали в сильной форме на модель Z наложим следующие дополнительные ограничения:

в) нейманoвская грань N_α, соответствующая темпу роста α, натянута на конечное число образующих (a^k, b^k), $1 \le k \le K$, K – конечное число;

г) справедливо хотя бы одно из следующих двух соотношений:

$$a^i = a \gg 0, \quad 1 \le i \le K, \tag{1}$$

$$b^i = b \gg 0, \quad 1 \le i \le K, \tag{2}$$

т.е. образующие (a^k, b^k) неймановской грани должны быть такими, что либо все столбцы a^k одинаковы, либо все столбцы b^k одинаковы;

е) в модели Z существует равновесная тройка $(x,(\bar{x},\bar{y}),p)$, такая, что $p \gg 0$.

Заметим, что в этом случае неймановская грань N_α совпадает с множеством $Z \cap H_p$, где H_p – гиперплоскость функционала ($\alpha p, -p$).

Сделаем несколько замечаний по поводу введенных нами ограничений а) – е) на модель Z.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С экономической точки зрения условие (1) означает:

1) для неймановских процессов при одинаковых затратах возможны разные выпуски товаров;

2) суммарный выпуск товаров при ценах p один и тот же на всех базисных процессах N_α, т.к. для любого k, $1 \le k \le K$,

$$[p,b^k] = \alpha[p,a^k] = \alpha[p,a] = const.$$

Аналогичную экономическую интерпретацию можно дать, если модель удовлетворяет условию (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Одинаковость столбцов a^k или b^k (см. условия в) и г)) в достаточной степени жесткое требование. Однако это требование по существу. Существуют различные модели, у которых столбцы a^k и b^k, входящие в образующие (a^k, b^k)

неймановской грани, "почти удовлетворяют" условию г), а теорема о магистрали в сильной форме не имеет места при любых начальных условиях.

ПРИМЕР I. Пусть технологический конус Z задается следующими матрицами затрат A и выпуска B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1+\delta & 1 & 0 \\ 1+\delta & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1+\delta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+\delta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta>-1 .$$

Эта модель обладает состоянием равновесия $(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),p)$, где $\alpha=1$; $\bar{x}=\bar{y}=(1,1)$; $p=(1,1)$. Неймановская грань является конической оболочкой процессов $((1,1+\delta),(1+\delta,1))$ и $((1+\delta,1),(1,1+\delta))$. Ясно, что образующие N_α этой модели при $\delta\to 0$ "почти удовлетворяют" условию г). Однако при любом фиксированном $\delta>0$ для следующей оптимальной траектории $(x_t)_{t=0}^T$, где $x_{2k-2}=(1,1+\delta)$, $x_{2k-1}=(1+\delta,1)$, $x_{2k}=(1,1)$; $1\le k\le\left[\frac{T}{2}\right]$ ($\left[\frac{T}{2}\right]$ - целая часть числа $\frac{T}{2}$), существует $\varepsilon_0>0$, при котором справедливо неравенство

$$\rho\left(\frac{(x_{2k-1},\ x_{2k})}{\|x_{2k-1}\|},\ N_\alpha\right)\geqslant\varepsilon_0 .$$

Действительно, из того, что $\alpha=1$, $p=(1,1)$ следует:

1) $\|x_{2k-1}\|=\sqrt{1^2+(1+\delta)^2}<1+1+\delta=[p,\ x_{2k-1}]$,

2) $$\rho\left(\frac{(x_{2k-1},\ x_{2k})}{\|x_{2k-1}\|},\ H_p\right)=\frac{\alpha[p,x_{2k-1}]-[p,x_{2k}]}{\|x_{2k-1}\|}\geqslant 1-\frac{2}{2+\delta}. \quad (3)$$

Так как расстояние до неймановской грани $N_\alpha=Z\cap H_p$ не меньше расстояния от той же точки до гиперплоскости H_p, то из (3) следует, что в качестве ε_0 можно брать число $1-2/_{2+\delta}$, где $\delta>0$. Из неравенства (3) ясно также, что существуют модели Неймана, обладающие свойством: для любого ε, $0<\varepsilon<1$, существуют оптимальные траектории сколько угодно большой длины, "середины" которых лежат вне ε-окрестности грани N_α.

ПРИМЕР 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 0 \\ a & c & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где}$$

a, b, c - положительные числа и либо $b \neq 1$, либо $a \neq c$.

Рассуждая так же, как и выше, можно показать, что в этой модели теорема о магистрали в сильной форме не имеет места ни при каком начальном состоянии. Исходя из этих примеров, можно предположить, что теорема о магистрали в сильной форме в полном объеме (т.е. для всех оптимальных траекторий) имеет место достаточно редко.

Кроме того, эти же примеры показывают несправедливость гипотезы, утверждающей, что за счет только одного выбора начального состояния x_0 можно добиться справедливости теоремы о магистрали в сильной форме.

3^0. Приводимая ниже теорема указывает те достаточные условия, при которых справедлива теорема о магистрали в сильной форме[ж)] для моделей, определяемых не обязательно строго выпуклыми конусами. При доказательстве теоремы частично используется подход, предложенный Никайдо [5]. Заметим, что в этой работе теорема о магистрали устанавливается в более общей, чем в работе [5], ситуации. Кроме того, здесь доказывается более сильное утверждение - "близость" пар точек оптимальной траектории к неймановской грани, из которой автоматически следует (в рассматриваемой модели) "близость" оптимальной траектории к равновесному лучу ($\lambda \bar{x}$), $\lambda > 0$ (см. замечание I).

Для доказательства теоремы о магистрали нужна следующая

ЛЕММА. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что $[p, y] < \alpha(1-\delta)[p, x]$ для любого процесса $(x, y) \in Z$, удовлетворяющего неравенству $\rho\left(\frac{(x,y)}{|x|}, N_\alpha\right) > \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [I].

Прежде чем сформулировать теорему, заметим, что из условия $p \gg 0$ следует существование положительных чисел $k' > k''$ и $f \in (R^n_+)^*$ таких, что справедливо $k'' p \leq f \leq k' p$.

ТЕОРЕМА (о магистрали в сильной форме). Пусть для модели Z выполнены ограничения а) - е); точка x_0 такова, что из неё

ж) Формулировка теоремы о магистрали в сильной форме приведена ниже.

исходит траектория $\tilde{\chi} = (\tilde{x}_t)$, растущая средним темпом α и $f \gg 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число τ, обладающее свойством: каковы бы ни были номер $T > 2\tau$ и (x_0, f, T) - оптимальная траектория $(x_t)_{t=0}^{T}$, неравенство

$$\rho\left(\frac{(x_t,\ x_{t+1})}{\|x_t\|},\ N_\alpha\right) < \varepsilon \qquad (4)$$

справедливо для всех натуральных t, таких, что $\tau \leq t \leq T - \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проведем для случая, когда выполнено (I). Аналогично доказывается теорема и в случае (2). Выберем число $\eta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\eta \leq \frac{\kappa''}{\kappa'} \cdot \frac{c}{2(1+c)} \cdot \frac{m\tilde{c}}{[p, x_0]}\ \delta, \qquad (5)$$

где 1) δ - число, определенное в лемме;

2) $m = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{p\}^i > 0$;

3) $c = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{\bar{x}\}^i / \|\bar{x}\| > 0$;

4) $\tilde{c} = \lim\limits_{t \to \infty} \alpha^{-t} [p, \tilde{x}_t]$ (по условию $\tilde{c} > 0$).

Так как в условиях теоремы справедлива теорема о магистрали в слабой форме (см. [I]), то по данному η найдется натуральное число τ, такое, что неравенство $\rho((x_t, x_{t+1})/\|x_t\|, N_\alpha) > \eta$ выполняется не более чем при τ значениях t.

Пусть τ и ν - соответственно первый и последний моменты t, для которых справедливо неравенство

$$\rho\left(\frac{x_t'}{\|x_t\|},\ N_\alpha\right) < \eta$$

(здесь и в дальнейшем $x_t' = (x_t, x_{t+1})$).

Пусть, далее, точки $z(\tau)$ и $z(\nu)$, принадлежащие N_α, таковы, что

$$\rho\left(\frac{x_t'}{\|x_t\|},\ N_\alpha\right) = \rho\left(\frac{x_t'}{\|x_t\|},\ z(t)\right), \quad t = \tau;\ \nu.$$

Очевидно, что

$$\rho\left(\frac{x_t'}{\|x_t\|},\ z(t)\right) = \left| e_{z(t)}\left(\frac{x_t'}{\|x_t\|}\right)\right|, \quad t = \tau;\ \nu,$$

где $e_{z(t)}\left(\frac{x'_t}{\|x_t\|}\right)$ – проекция точки $\frac{x'_t}{\|x_t\|}$ на ортогональное дополнение к прямой, порожденной вектором $z(t)$, определяемая по формуле

$$e_{z(t)}\left(\frac{x'_t}{\|x_t\|}\right)=\frac{x'_t}{\|x_t\|}-\frac{[x'_t,\ z(t)]}{\|x_t\|\cdot\|z(t)\|^2}\cdot z(t).$$

Ясно, что при любом положительном числе q_t справедливы следующие равенства:

$$\left\|e_{z(t)}\left(\frac{x'_t}{\|x_t\|}\right)\right\|=\left\|e_{q_t\cdot z(t)}\left(\frac{x'_t}{\|x_t\|}\right)\right\|=\frac{\|e_{q_t z(t)}(x'_t)\|}{\|x_t\|}.$$

Выберем q_t ж) так, чтобы

$$q_t\cdot z(t)\equiv z_t=\left(a,\ \sum_{\kappa=1}^{K}\lambda^t_\kappa b^\kappa\right),\ \lambda^t_\kappa\geqslant 0,\ \sum_{\kappa=1}^{K}\lambda^t_\kappa=1,\ t=\tau;\ \vartheta.\ (6$$

Заметим, что из (6) следует справедливость равенств

$$[\rho',z_\tau]=[\rho',z_t]=(1+\alpha)\,[\rho,a],$$

где $\rho'=(\rho,\rho)$. Положим $e(x'_t)=e_{z_t}(x'_t)$. Тогда, используя введенные обозначения, получим:

$$x'_t=\frac{[x'_t,\ z_t]}{\|z_t\|^2}\,z_t+e(x'_t),\qquad t=\tau;\ \vartheta,$$

$$\frac{\|e(x'_t)\|}{\|x_t\|}<\eta,\qquad t=\tau;\ \vartheta.$$

Из последнего неравенства имеем

$$\frac{\|e(x'_t)\|}{\alpha^t}<\frac{\eta\cdot\|x_t\|}{\alpha^t}=\frac{\eta}{m}\cdot\frac{m\|x_t\|}{\alpha^t}\leqslant\frac{\eta}{m}\,\frac{(\rho,x_t)}{\alpha^t}\leqslant\frac{\eta}{m}\,[\rho,x_0],$$

т.е. $\frac{\|e(x'_t)\|}{\alpha^t}<\frac{\eta}{m}[\rho,x_0]$, $\qquad t=\tau;\ \vartheta.$

Тогда, используя метод Никайдо, можно показать, что для всех

ж) Чтобы найти искомое значение q_t, достаточно обе части равенства

$$z(t)=\left(\sum_{\kappa=1}^{K}\mu^t_\kappa(a^\kappa,b^\kappa)\right)=\left(R_t a,\ \sum_{\kappa=1}^{K}\mu^t_\kappa b^\kappa\right),\mu^t_\kappa\geqslant 0,\ R_t=\sum_{\kappa=1}^{K}\mu^t_\kappa>0.$$

разделить на R_t и положить $q_t=\frac{1}{R_t}$.

t, $\tau \leq t \leq \vartheta - 1$, справедливо неравенство[ж)]

$$0 \leq \frac{[p, x_t]}{\alpha^t} - \frac{[p, x_{t+1}]}{\alpha^{t+1}} < 2\eta \frac{1+c}{c} \frac{[p, x_0]}{m} \quad . \qquad (7)$$

Теперь покажем, что для всех целых t, удовлетворяющих неравенствам $\tau \leq t \leq \vartheta - 1$, выполняется (4). Действительно, предлагая противное, получим, что существует номер t_0, $\tau \leq t_0 \leq \vartheta - 1$, ой, что $(x_{t_0}, x_{t_0+1}) \in Z$ и

$$\rho\left(\frac{x_{t_0}}{\|x_{t_0}\|}, N_\alpha\right) \geq \varepsilon.$$

..а по лемме имеем: $[p, x_{t_0+1}] < \alpha(1-\delta)[p, x_{t_0}]$. Откуда

$$\frac{[p, x_{t_0}]}{\alpha^{t_0}} - \frac{[p, x_{t_0+1}]}{\alpha^{t_0+1}} \geq \delta \frac{[p, x_{t_0}]}{\alpha^{t_0}} \geq \delta \frac{[p, x_\tau]}{\alpha^\tau} \geq$$
$$\geq \delta \frac{1}{\kappa'} \frac{[f, x_\tau]}{\alpha^\tau} \geq \delta \frac{1}{\kappa'} \frac{[f, \bar{x}_\tau]}{\alpha^\tau} \geq \delta \frac{\kappa''}{\kappa'} \frac{[p, \bar{x}_\tau]}{\alpha^\tau} \geq \delta \frac{\kappa'}{\kappa'} \cdot \tilde{c},$$

т.е. $\frac{[p, x_{t_0}]}{\alpha^{t_0}} - \frac{[p, x_{t_0+1}]}{\alpha^{t_0+1}} \geq \delta \frac{\kappa'}{\kappa'} \tilde{c}$, что противоречит (7) и (5). Следовательно, при всех номерах t, $\tau \leq t \leq \vartheta - 1$, выполняется неравенство (4). Из определения числа τ следует, что $\tau \leq \tau$, $\vartheta \geq T - \tau$, что и завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Любая траектория $\chi = (x_t)$ рассматриваемой модели удовлетворяет по крайней мере одному из следующих двух условий:

1) $\alpha^{-t} x_t \to 0$;
2) $\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| \to 0$.

(Справедливость этого утверждения легко получить, используя теорему 4.3 (см. [I])).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Учитывая специфичность неймановской грани, получим, что для всех оптимальных траекторий $(x_t)_{t=0}^T$, удовлетворяющих условиям теоремы, справедливо неравенство

$$\left| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right| < \varepsilon \quad , \qquad \tau \leq t \leq T - \tau \,. \qquad (8)$$

ж) Заметим, что в рассматриваемом случае при доказательстве этой оценки возникают определенные трудности из-за того, что
1) неймановская грань состоит не из одного луча и
2) не для любой точки (x, y) неймановской грани справедливо равенство $y = \alpha x$ (что существенно используется в доказательстве Никайдо).

Если модель имеет строгое состояние равновесия, то неймановская грань состоит из одного луча. В этом случае всегда справедливо условие г). Поэтому, учитывая неравенство (8), теорему Никайдо о магистрали в сильной форме можно рассматривать, как частный случай нашей теоремы. Из неравенства (8) также следует, что в рассматриваемой модели все бесконечно оптимальные траектории, исходящие из точки x_*, удовлетворяющей условию теоремы, равномерно сходятся к равновесному лучу.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из ограничений г) и е) следует, что α – единственный темп роста модели (см.[4]). Очевидно, эта теорема справедлива и в случае, если в модели имеется несколько темпов роста. В этом случае достаточно требовать, чтобы соответствующие проекции конуса Z обладали нужными свойствами.

Заметим, что теорема о магистрали в сильной форме верна и тогда, когда равновесный вектор цен p не строго положителен, а $\tilde{Z}_\alpha$ – замыкание проекции конуса Z_α на грань $\tilde{\Gamma}_\alpha \times \tilde{\Gamma}_\alpha$ конуса $R^n_+ \times R^n_+$ ($\tilde{\Gamma}_\alpha$ – грань конуса R^n_+, натянутая на орты с номерами i, такими, что $(p)^i > 0$), удовлетворяет выше указанным свойствам.

Автор благодарит своего руководителя А.М.Рубинова за внимание и помощь в работе.

Литература

1. В.Л.Макаров, А.М.Рубинов. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики.- УМН, т.25, выпуск 5 (155), М., 1970, 125-169.
2. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства.-Оптимальное планирование, 9 (1967), 87-111.
3. А.М.Рубинов, К.Ш.Шапиев. Об одном обобщении теоремы о магистрали в сильной форме.-Оптимальное планирование, 10 (1968), 15-27.
4. А.Ж.Жафяров. О единственности равновесных цен в одной модели Неймана. - Настоящий сборник.

Поступила в редакцию