УДК 519.95

ТЕМПЫ РОСТА ТРАЕКТОРИЙ В МОДЕЛЯХ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕХНОЛОГИЕЙ

А.М.Рубинов

Понятие темпа роста модели является важнейшим инструментом исследования траекторий модели Неймана-Гейла расширяющейся экономики. Отправляясь от него, В.Л.Макаров [1] ввел понятие темпа роста траектории, которое оказалось весьма полезным при изучении магистральных свойств траекторий (см. [2 , 3]). Представляет интерес ввести и изучить темпы роста траекторий и для нестационарных моделей (т.е. моделей с переменной технологией). Этому и посвящена настоящая статья.

I. Прежде всего введем понятие темпа роста для положительных числовых последовательностей. Пусть S_+ – множество всех числовых последовательностей $u=(u_t)$ таких, что $u_t>0$ при всех t. Это множество можно рассматривать как абелеву группу относительно операции покоординатного умножения. Через S_1 обозначим подгруппу группы S_+, состоящую из всех последовательностей $u=(u_t)$ таких, что $0<\inf_t u_t \leq \sup_t u_t < +\infty$, а через A обозначим фактор-группу S_+/S_1. Элементы группы A назовем темпами роста. Таким образом, последовательности $u=(u_t)$ и $v=(v_t)$ имеют одинаковый темп роста в том и только том случае, когда

$$0<\inf_t \frac{u_t}{v_t} \leq \sup_t \frac{u_t}{v_t} < +\infty$$

(иными словами, u и v одного порядка, т.е. $u=O(v)$, $v=O(u)$).

Если $\alpha \in A$, $u \in \alpha$, то будем говорить, что последовательность u имеет темп роста α. Условимся также темп роста последовательности u обозначать через $\alpha(u)$. Единицу группы A, т.е. группу S_1 обозначим через 1.

Введем теперь в группе темпов роста A отношение порядка $\succ$, положив $\alpha \succ \beta$ ($\alpha, \beta \in A$), если для некоторых $u = (u_t) \in \alpha$ и $v = (v_t) \in \beta$ выполняется $\lim v_t \cdot u_t^{-1} = 0$. Легко видеть, что это определение корректно. Кроме того, как нетрудно проверить, отношение $\succ$ действительно является отношением порядка. Указанное отношение превращает A в упорядоченную группу. Отметим, что не всякие два темпа роста сравнимы между собой.

2. Модель $\mathfrak{M}$, рассматриваемая ниже, задается последовательностью конусов $(K_t)_{t=0}^{\infty}$, лежащих в некотором конечномерном нормированном пространстве X, и последовательностью суперлинейных точечно-множественных отображений $a_t : K \to \Pi(K_{t+1})$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ (здесь $\Pi(K)$ - совокупность всех непустых подмножеств конуса K). Предполагается, что конус K_t ($t = 0, 1, 2, \ldots$) является замкнутым, выпуклым, воспроизводящим и выступающим, поэтому сопряженный к нему конус K_t^* обладает теми же свойствами и, в частности, содержит внутренние точки. (Определения всех упомянутых выше понятий имеются, например, в [2].)

Наряду с моделью $\mathfrak{M}$ будем рассматривать двойственную ей модель $\mathfrak{M}'$ (см. [2]), которая определяется конусами K_t^* и двойственными отображениями a_t'. Под траекторией модели $\mathfrak{M}$ понимается последовательность $\chi = (x_t)$ такая, что $x_{t+1} \in a_t(x_t)$; $x_0 \in K_0$; траектория $\varphi = (f_t)$ модели $\mathfrak{M}'$ определяется подобным же образом. Заметим, что последовательность $\varphi = (f_t)$ является траекторией модели $\mathfrak{M}'$ в том и только том случае, когда последовательность $(f_t(x_t))$ убывает для любой траектории $\chi = (x_t)$ модели $\mathfrak{M}$.

Темпом роста траектории $\chi = (x_t)$ модели $\mathfrak{M}$ (обозначается $\alpha(\chi)$) назовем темп роста числовой последовательности $(\|x_t\|)$. (Здесь и ниже предполагается, что рассматриваемые траектории моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ не содержат нулей.) Заметим, что темп роста не зависит от того, каким образом введена в пространстве X норма.

Данное определение является новым и для случая стационарной экономики, т.е. модели Неймана-Гейла. В последнем случае известны определения темпа роста продукта на траектории (см.[1,3]) и траектории, имеющей средний темп α [1,2], где число α – темп роста модели. Если модель Неймана-Гейла имеет состояние равновесия (α, $(\bar{x},\bar{y})$, p), где p – строго положительный функционал на конусе R^n_+, то траектория x имеет средний темп роста α в том и только том случае, когда темп роста x в смысле данного выше определения совпадает с темпом роста числовой последовательности $(1,\alpha,\alpha^2,\dots,\alpha^t,\dots)$.

Естественный вопрос, возникающий в связи с приведенным выше определением, заключается в следующем: в каких моделях существуют траектории, имеющие наибольший темп роста, и каковы свойства этих траекторий? Из примера, приведенного в [3, с. 176], легко усмотреть, что траекторий, имеющих наибольший темп, может не быть даже в моделях Неймана-Гейла.

Ниже приводятся некоторые достаточные условия, гарантирующие существование наибольшего темпа.

Напомним (см. [2]), что пара траекторий $x=(x_t)$ и $\varphi=(f_t)$ моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ соответственно называется согласованной, если $\lim f_t(x_t)>0$. При этом говорят, что φ допускает согласование, если найдется x, образующая с φ согласованную пару. Траекторию $\varphi=(f_t)$ модели $\mathfrak{M}'$ назовем равномерно положительной, если существует $\varepsilon>0$, при котором для всех t выполняется

$$\frac{f_t}{\|f_t\|}+\varepsilon S^*\subset K_t^*. \qquad (2)$$

Здесь S^* – единичный шар пространства X^*, сопряженного к X. Хорошо известно, что соотношение (2) эквивалентно следующему:

$$f_t(x)\geq\varepsilon\|f_t\|\|x\| \qquad (x\in K_t). \qquad (3)$$

ЛЕММА 1. Пусть модель $\mathfrak{M}$ такова, что двойственная к ней модель $\mathfrak{M}'$ имеет равномерно положительную траекторию $\varphi=(f_t)$. Тогда для любой траектории x модели $\mathfrak{M}$ выполняется $\alpha(x)\leq[\alpha(\varphi)]^{-1}$. Равенство

$\alpha(x)=[\alpha(\varphi)]^{-1}$ имеет место в том и только том случае, когда пара (x,φ) согласована.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x,φ) - согласованная пара (здесь $x=(x_t)$). В силу (3) при некотором $\varepsilon>0$ для всех t выполняется

$$\|f_t\|\cdot\|x_t\|\geq f_t(x_t)\geq\varepsilon\|f_t\|\cdot\|x_t\|,$$

т.е. справедливы оценки

$$1\geq\frac{f_t(x_t)}{\|f_t\|\cdot\|x_t\|}\geq\varepsilon .$$

Это означает, что темпы роста последовательностей ($f_t(x_t)$) и ($\|f_t\|\cdot\|x_t\|$) совпадают. Но темп роста α ($\|f_t\|\cdot\|x_t\|$) последовательности ($\|f_t\|\cdot\|x_t\|$) равен $\alpha(\varphi)\cdot\alpha(x)$. Таким образом, $\alpha((f_t(x_t)))=\alpha(\varphi)\cdot\alpha(x)$. С другой стороны, поскольку пара (x,φ) согласована, то α ($(f_t(x_t))$) $=1$. Таким образом, $\alpha(\varphi)\cdot\alpha(x)=1$, т.е. $\alpha(x)=[\alpha(\varphi)]^{-1}$.

Пусть теперь пара (x,φ) не согласована. Тогда $\lim f_t(x_t)=0$ и, в силу (3), $\lim\|f_t\|\cdot\|x_t\|=0$. Последнее означает, что $\alpha(\varphi)\cdot\alpha(x)<1$, т.е. $\alpha(x)<[\alpha(\varphi)]^{-1}$. Лемма доказана. Непосредственным следствием леммы является

ТЕОРЕМА I. Пусть модель $\mathfrak{M}'$ имеет равномерно положительную траекторию φ, допускающую согласование. Тогда существует наибольший темп роста траекторий модели $\mathfrak{M}$, равный $[\alpha(\varphi)]^{-1}$.

Как показано в [2 , с.177], траектория $\varphi=(f_t)$ допускает согласование в том и только том случае, когда замыкание множества $\bigcup_t(a_t')^{-1}(f_t)$ не совпадает с конусом K_0^* , иными словами, существует внутренняя точка конуса K_0^* , из которой нельзя попасть на траекторию φ . Заметим, что равномерно положительная оптимальная траектория заведомо допускает согласование.

Обозначим наибольший темп роста траекторий модели $\mathfrak{M}$ через $\alpha(\mathfrak{M})$. Приведем ряд следствий.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой допускающей согласование и равномерно положительной траектории φ модели $\mathfrak{M}'$ выполняется $\alpha(\varphi)=[\alpha(\mathfrak{M})]^{-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть x – траектория модели $\mathfrak{M}$. Следующие условия эквивалентны:

(а) $\alpha(x)=\alpha(\mathfrak{M})$;

(б) x согласована с какой-либо равномерно положительной допускающей согласование траекторией модели $\mathfrak{M}$;

(в) x согласована с каждой траекторией такого типа.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть модель Неймана-Гейла имеет состояние равновесия $(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),\bar{p})$, где $\bar{p}$ – строго положительный на конусе R^n_+ функционал. Тогда существует наибольший темп роста траекторий этой модели, совпадающий с темпом роста последовательности $(1,\alpha,\alpha^2,\dots,\alpha^t,\dots)$.

Следующее ниже предложение показывает, насколько условия теоремы 1 отличаются от необходимых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\varphi=(f_t)$ – допускающая согласование траектория модели $\mathfrak{M}'$. Следующие условия эквивалентны:

(а) для любой траектории $x=(x_t)$, согласованной с φ , при некотором $\varepsilon>0$ и всех t выполняется $f_t(x_t)\geq\varepsilon\|f_t\|\cdot\|x_t\|$ для любой траектории $x=(x_t)$, не согласованной с φ , выполняется $\|f_t\|\cdot\|x_t\|\longrightarrow 0$;

(б) существует наибольший темп роста $\alpha(\mathfrak{M})$ траекторий модели $\mathfrak{M}$; при этом $\alpha(\varphi)=[\alpha(\mathfrak{M})]^{-1}$ и для несогласованных с φ траекторий x выполняется $\alpha(x)<\alpha(\mathfrak{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (а) $\Longrightarrow$ (б) содержится по сути дела в доказательстве леммы I. Докажем импликацию (б) $\Longrightarrow$ (а). Пусть траектория x согласована с φ. Покажем, что $\alpha(x)=\alpha(\mathfrak{M})$. В самом деле, если $\alpha(x)<\alpha(\mathfrak{M})=[\alpha(\varphi)]^{-1}$, то $\lim \|f_t\|\cdot\|x_t\| = 0$, а следовательно, и $\lim f_t(x_t)=0$, что невозможно. Таким образом, $\alpha(\varphi)\cdot\alpha(x)=\alpha((\|f_t\|\cdot\|x_t\|))=1$. Так как $\alpha((f_t(x_t)))=1$, то и $\alpha\left(\left(\frac{f_t(x_t)}{\|f_t\|\cdot\|x_t\|}\right)\right)=1$. Отсюда и следует, что при некотором $\varepsilon>0$ выполняется $f_t(x_t)\geqslant\varepsilon\|f_t\|\cdot\|x_t\|$ ($t=0,1,2,\ldots$). Если траектория x не согласована с φ, то $\alpha(x)<[\alpha(\varphi)]^{-1}$, т.е. $\alpha(x)\cdot\alpha(\varphi)<1$, откуда следует, что $\|f_t\|\cdot\|x_t\|\longrightarrow 0$. Предложение доказано.

Предположим теперь, что помимо равномерно положительной траектории $\varphi=(f_t)$ модели $\mathfrak{M}'$ существует равномерно положительная траектория $x=(x_t)$ модели $\mathfrak{M}$ (т.е. $x_t+\varepsilon\|x_t\|S\subset K_t$; здесь $S=\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$, $t=0,1,\ldots$). Предположим, далее, что пара траекторий x и φ согласована. Тогда, как нетрудно видеть, модель $\mathfrak{M}'$ имеет наибольший темп роста траекторий, при этом $\alpha(\mathfrak{M}')=[\alpha(\mathfrak{M})]^{-1}$. (Рассматриваемая ситуация служит обобщением модели Неймана-Гейла, имеющей состояние равновесия $(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),p)$, где $\bar{x}$ и p строго положительны.) В этой ситуации все равномерно положительные допускающие согласование траектории модели $\mathfrak{M}$ растут наибольшим возможным темпом (это вытекает из следствия I).

3. Здесь мы используем понятие наибольшего темпа роста для описания асимптотических свойств траекторий. Известно (см. [2, с. 237]), что если модель Неймана-Гейла $\mathcal{Z}$ имеет строгое состояние равновесия $(\alpha,(\bar{x},\alpha\bar{x}),p)$, то для каждой траектории $X=(x_t)$ этой модели существует предел $\lim \alpha^{-t}x_t = \lambda\bar{x}$ (где $\lambda\geqslant 0$). Приведем обобщение этой теоремы на случай переменной технологии.

Предположим, что модель $\mathfrak{M}$ имеет траекторию $\bar{x}=(\bar{x}_t)$, допускающую строгую характеристику $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$. Последнее означает, что $\bar{f}_t(\bar{x}_t)=1$ и $f_{t+1}(y)<f_t(x)$, если $(x,y)\neq$ $\neq\lambda(\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$, $y\in a_t(x)$; $t=0,1,\dots$. Заметим, что $\bar{\varphi}$ – траектория модели $\mathfrak{M}'$. Из строгости характеристики $\bar{\varphi}$ вытекает, в силу известной леммы Раднера, что при любом $\varepsilon>0$ выполняется

$$\delta_t(\varepsilon)=\inf_{\rho(x_t,\bar{x}_t)>\varepsilon}\ \inf_{y\in a_t(x)}\left(1-\frac{\bar{f}_{t+1}(y)}{\bar{f}_t(x)}\right)>0$$

(через $\rho(x_t,\bar{x}_t)$ обозначено угловое расстояние:

$$\rho(x_t,\bar{x}_t)=\left\|\frac{x_t}{\|x_t\|}-\frac{\bar{x}_t}{\|\bar{x}_t\|}\right\|).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть модель $\mathfrak{M}$ имеет траекторию $\bar{X}=(\bar{x}_t)$, допускающую строгую характеристику $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$, которая является равномерно положительной траекторией модели $\mathfrak{M}'$. Пусть, далее, $\inf\limits_t \delta_t(\varepsilon)>0$ при всех $\varepsilon>0$. Тогда для любой траектории $X=(x_t)$ модели $\mathfrak{M}$ выполняется одно и только одно из следующих двух условий:

(а) $\alpha(X)<\alpha(\mathfrak{M})$;

(б) существует числовая последовательность $\gamma=(\gamma_t)$ такая, что $\alpha(\gamma)=1$ (*) и $\alpha(X-\gamma\bar{X})<\alpha(\mathfrak{M})$ (здесь $X-\gamma\bar{X}=(x_t-\gamma_t\bar{x}_t)$). (*) (символы в оригинале не читаются)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что условие (а) эквивалентно тому, что траектория X не согласована с φ.

Покажем, что условие (б) эквивалентно тому, что X согласована с φ. Предположим вначале, что это условие выполнено. Так как $\alpha(\bar{X})=\alpha(\mathfrak{M})$, то его можно переписать в следующем виде:

$$\frac{|x_t-\gamma_t x_t|}{\|x_t\|}\longrightarrow 0 .$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\left| \|x_t\| - \gamma_t \|x_t\| \right|}{\|\bar{x}_t\|} - \left| \frac{\|x_t\|}{\|\bar{x}_t\|} - \gamma_t \right| \longrightarrow 0 .$$

Из полученного соотношения и условия $\alpha(\gamma)=1$ вытекает, что $\alpha(x)[\alpha(\bar{x})]^{-1}=1$, т.е. $\alpha(x)=\alpha(\bar{x})=\alpha(\mathfrak{M})$. Из леммы I теперь следует, что пара траекторий (x,φ) согласована.

Пусть теперь траектория x согласована с φ. Используя это обстоятельство, а также неравенство $\inf\limits_t \delta_t(\varepsilon)>0$, можно с помощью стандартных соображений, применяемых при доказательстве магистральных теорем, проверить, что

$$\rho(x_t,\bar{x}_t) - \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}_t}{\|\bar{x}_t\|} \right\| \longrightarrow 0. \quad (4)$$

Имеем

$$\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}_t}{\|\bar{x}_t\|} \right\| = \frac{1}{\|\bar{x}_t\|} \left\| x_t - \frac{\|x_t\|}{\|\bar{x}_t\|} x_t \right\| \frac{\|\bar{x}_t\|}{\|x_t\|} . \quad (5)$$

Положим $\gamma=(\gamma_t)$, где $\gamma_t = \dfrac{x_t}{\bar{x}_t}$. Из леммы I следует, что $\alpha(x)=\alpha(\bar{x})=\alpha(\mathfrak{M})$. Поэтому $\alpha(\gamma)=1$. Применяя (4) и (5), получим

$$[\alpha(\mathfrak{M})]^{-1}\cdot\alpha(x-\gamma\bar{x})\cdot[\alpha(\gamma)]^{-1} < 1.$$

Учитывая, что $\alpha(\gamma)=1$, имеем отсюда

$$\alpha(x-\gamma\bar{x}) < \alpha(\mathfrak{M}),$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. МАКАРОВ В.Л. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики.-"Сиб. мат. журн.", 1966, №4, с.832-853.
2. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., "Наука", 1973.
3. КРАСС И.А. Математические модели экономической динамики, М., "Сов.радио", 1976.

Поступила в ред.-изд.отд.
6. VI. 1976