Численные методы

УДК 512.25/26

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ШТРАФОВ

А.А.Каплан

В настоящей статье применительно к задачам выпуклого программирования исследуется класс функций штрафа, обладающих хорошими дифференциальными свойствами и в то же время относительно малым порядком стремления к бесконечности вне допустимой области. В предположении сильной выпуклости целевой функции получена оценка скорости сходимости вида

$$|x^k - x^*| \leq \mu\,(A_k), \tag{1}$$

где x^* - искомая точка, x^k- решение k-й вспомогательной задачи, A_k - параметр функции штрафа $(A_k \to \infty)$, а порядок стремления $\mu(A_k)$ к 0 определяется некоторыми параметрами, характеризующими близость рассматриваемых функций к функциям "типа срезки". Для введенных ниже конкретных систем штрафных функций (10) оценка (1) приобретает вид

$$|x^k - x^*|^2 < c\,A_k^{-\theta/2}, \tag{2}$$

где $c > 0$, $\theta > 0$ - $const$.

Рассматривается задача минимизации выпуклой функции f на компакте $\Omega \subset R^n$, задаваемом системой неравенств

$$g^j(x) \leq 0, \quad j \in J = \{1, 2, \ldots, m\},$$

с выпуклыми функциями g^j. Предполагается существование такой точки x^0, что $g^j(x^0) < 0$ для всех $j \in J$.

Настоящее исследование базируется на установленных в [1], [2] достаточных условиях сходимости метода штрафов, которые сформулированы ниже в виде теорем I^* - 3^*.

ТЕОРЕМА 1^*. Пусть $\Phi_k : R^n \to R$ - выпуклые функции;

1. $\lim_{k \to \infty} \Phi_k(x) = 0,$ если $x \in int\, Q$;

2. $\lim_{k \to \infty} \Phi_k(x) = +\infty$, если $x \notin Q$.

Тогда, начиная с некоторого K, функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$ достигают своего безусловного минимума, последовательность $\{x^k\}$ точек минимума функций F_k $(k \geq K)$ ограничена, любая ее предельная точка принадлежит множеству Q и доставляет минимум f на Q.

ТЕОРЕМА 2^*. Пусть выполнены условия теоремы I^* и, кроме того, для граничных точек множества Q

$$\Phi_k(x) \geq C > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда, начиная с некоторого K, точки x^k лежат внутри Q.

ТЕОРЕМА 3^*. Пусть функции f, g^j $(j \in J)$ дифференцируемы, Φ_k дифференцируемы и удовлетворяют условиям теоремы I^*. Пусть также

$$\nabla \Phi_k(x) = \sum_{j \in J} \tau_k^j(x) \nabla g^j(x), \tag{2}$$

где τ_k^j - неотрицательные и непрерывные на R^n функции и при любом j последовательность $\{\tau_k^j(x^k)\}$ сходится к 0, если $\lim_{k \to \infty} g^j(x^k) < 0$.

Тогда последовательность $\{u^k\}$, где $u^k = (u_1^k, \ldots, u_m^k)$, $u_j^k = \tau_k^j(x^k)$, ограничена; точки (x^κ, u^κ) являются допустимыми в двойственной задаче[ж]; любая предельная точка последовательности $\{(x^\kappa, u^\kappa)\}$ доставляет решение двойственной задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для дальнейшего нам потребуется также следующий результат, установленный в процессе доказательства теоремы 3[ж].

Пусть $\{x^{\kappa_\ell}\}$ - некоторая подпоследовательность последовательности $\{x^\kappa\}$, сходящаяся к $\tilde{x}$. Тогда

$$0 \leq \tau^j_{\kappa_\ell}(x^{\kappa_\ell}) \leq d \quad (d < +\infty) \tag{3}$$

при всех ℓ и всех $j \in J^1(\tilde{x})$, где, по определению,

$$J^1(x) = \{j \in J : g^j(x) = 0\}. \tag{4}$$

Используя для решения исходной задачи метод штрафов, будем строить систему функций штрафа следующим образом.

Пусть $\{A_\kappa\}$ - числовая последовательность, $A_\kappa > 0$ при всех κ, $A_\kappa \to +\infty$. Обозначим $\psi^+_\kappa(t) = A_\kappa(t + |t|)$ и рассмотрим систему функций $\{\psi_\kappa\}$, заданных на числовой оси R^1 и обладающих при всех κ следующими свойствами:

а) ψ_κ - выпуклая функция, $\psi_\kappa \in C^1(R^1)$;

в) $\psi_\kappa(t) \geq \psi^+_\kappa(t)$ для всех $t \in R^1$;

с) известна функция $\lambda_1 : R^1 \to R^1$ такая, что $\psi_\kappa(t) - \psi^+_\kappa(t) \leq \lambda_1(A_\kappa)$ для всех $t \in R^1$, причем $\lambda_1(A_\kappa) \to 0$;

д) $\psi'_\kappa(0) \geq C_1 A_\kappa$ ($C_1 > 0$ - $const$);

е) известна функция $\lambda_2 : R^2 \to R^1$ такая, что при любом $\delta > 0$ для $t < -\delta$ имеет место неравенство $\psi'_\kappa(t) \leq \lambda_2(A_\kappa, \delta)$, причем $\lambda_2(A_\kappa, \delta) \underset{\kappa\to\infty}{\Longrightarrow} 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие е), вообще говоря, является следствием условий а), в) и с). Действительно, при $t^0 < -\delta$ имеем

ж) Имеется в виду постановка двойственной задачи, принадлежащая Вулфу [3].

$$\psi_\kappa(0)-\psi^+_\kappa(0)=\psi_\kappa(0)-\psi^+_\kappa(t^\circ)\geq\psi_\kappa(0)-\psi_\kappa(t^\circ)\geq-\psi'_\kappa(t^\circ)t^\circ,$$

откуда с учетом с))

$$\psi'_\kappa(t^\circ)t^\circ\leq\lambda_1(A_\kappa),\quad \psi'_\kappa(t^\circ)\leq\frac{1}{\delta}\lambda_1(A_\kappa),$$

и остается положить $\lambda_2(A_\kappa,\delta)=\delta^{-1}\lambda_1(A_\kappa)$.

Однако для конкретных классов функций ψ_κ часто удается найти такую функцию $\lambda_2(A_\kappa,\delta)$, что $\frac{\lambda_2(A_\kappa,\delta)}{\lambda_1(A_\kappa)}\xrightarrow[\kappa\to\infty]{}0$ при $\delta>0$, а это существенно влияет на характер полученных оценок. Указанное обстоятельство и объясняет независимое введение условия е)).

Рассмотрим теперь систему функций $\{\varphi_\kappa\}$, $\varphi_\kappa: R^n\to R^1$, задаваемых соотношением

$$\varphi_\kappa(x)=\sum_{j\in J}\psi_\kappa(g^j(x)),\tag{5}$$

где функции ψ_κ удовлетворяют условиям а) – е) (будем при этом говорить, что система $\{\varphi_\kappa\}$ обладает ψ -свойством).

ТЕОРЕМА I^0. Система функций ([5]) удовлетворяет условиям теоремы I*, а в предположении, что $f\in C^1(R^n)$, $g^j\in C^1(R^n)$ $(j\in J)$, и условиям теоремы 3*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпуклость функций φ_κ следует из выпуклости g^j и свойств а), в), с). Условия I) и 2) выполнены в силу свойств в) и с)).

Обозначая $F_\kappa=f+\varphi_\kappa$, имеем

$$\nabla F_\kappa(x)=\nabla f(x)+\sum_{j\in J}\psi'_\kappa(g^j(x))\nabla g^j(x),$$

где $\psi'_\kappa(g^j(x))$ – непрерывная неотрицательная функция вектора x. Если при $j=j_0$ для некоторой последовательности имеет место $\varliminf_{\kappa\to\infty} g^{j_0}(x^\kappa)<0$, то при достаточно малом $\delta>0$, начиная с некоторого K, можно считать справедливым неравенство $g^{j_0}(x^k) < -\delta$, откуда ввиду условия e) получаем $\lim\limits_{k\to\infty} \psi'_k(g^{j_0}(x^k)) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На основании теоремы 3^* теперь можно заключить, что при условии $x^k \in Q$ (как будет показано в теореме 2^0, это условие выполняется при всех k, начиная с некоторого номера) для $f(x^*)$ мы имеем двухсторонние оценки

$$f(x^k) \geq f(x^*) \geq \sum_{j\in J} \psi'_k(g^j(x^k))\, g^j(x^k) + f(x^k),$$

причем $\sum\limits_{j\in J} \psi'_k(g^j(x^k))\, g^j(x^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

ТЕОРЕМА 2^0. Пусть $f \in C^1(R^n)$, $g^j \in C^1(R^n)$ $(j\in J)$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) - \gamma \|x-y\|^2$$

$(\gamma > 0)$ при любых x и y. Тогда существуют такие K', K, что

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq \frac{m}{2\gamma} \lambda_1(A_k) \quad \text{при } k > K'; \tag{6}$$

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq \frac{|J^1(x^*)|}{2\gamma} \lambda_1(A_k) +$$

$$+ \frac{|J^2(x^*)|}{2\gamma} \max_{j\in J^2(x^*)} \max_{x\in Q} |g^j(x)|\, \lambda_2(A_k,\delta) \text{ при } k \geq K, \tag{7}$$

где $J^2(x^*) = J \setminus J^1(x^*)$, а $|J^1(x^*)|$, $|J^2(x^*)|$ – число элементов в множествах $J^1(x^*)$ и $J^2(x^*)$ соответственно; $\delta > 0$ – некоторое фиксированное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим вначале, что, начиная с некоторого K', имеет место $x^k \in int\, Q$.

Действительно, если это не так, то можно указать последовательность $\{x^{k_l}\}$, $x^{k_l} \notin int\, Q$, $\lim\limits_{l\to\infty} x^{k_l} = x^*$. Так как для $j \in J^2(x^*)$, начиная с некоторого L, должны выполняться неравенства $g^j(x^{k_l}) < 0$, то при $l \geq L$ имеем $\max\limits_{j\in J^1(x^*)} g^j(x^{k_l}) \geq 0$, а значит (условия г) и д)), имеет место

$$\max_{j\in J^1(x^*)} \psi'_{\kappa_l}(g^j(x^{\kappa_l})) \geq C_1 A_{\kappa_l} \quad (l \geq L),$$

что невозможно ввиду (3).

Далее, так как x^* – решение исходной задачи, при $\kappa \geq K'$ имеем

$$f\left(\frac{x^\kappa + x^*}{2}\right) - f(x^*) \geq 0$$

и

$$\frac{f(x^\kappa) - f(x^*)}{2} = \frac{f(x^\kappa) + f(x^*)}{2} - f(x^*) \geq$$

$$\geq f\left(\frac{x^\kappa + x^*}{2}\right) - f(x^*) + \gamma \|x^\kappa - x^*\|^2 \geq \gamma \|x^\kappa - x^*\|^2 .$$

Следовательно,

$$f(x^*) + \Phi_\kappa(x^*) - f(x^*) \geq f(x^\kappa) + \Phi_\kappa(x^\kappa) - f(x^*) \geq$$

$$\geq \Phi_\kappa(x^\kappa) + 2\gamma \|x^\kappa - x^*\|^2,$$

откуда

$$\Phi_\kappa(x^*) \geq \Phi_\kappa(x^*) - \Phi_\kappa(x^\kappa) \geq 2\gamma \|x^\kappa - x^*\|^2 . \qquad (8)$$

С другой стороны, из условия c) следует, что $\Phi_\kappa(x^*) < m\lambda_1(A_\kappa)$, и вместе с (8) это дает оценку (6).

Представляя $\Phi_\kappa(x^*)$ в виде

$$\Phi_\kappa(x^*) = \sum_{j\in J^1(x^*)} \psi_\kappa(g^j(x^*)) + \sum_{j\in J^2(x^*)} \psi_\kappa(g^j(x^*)),$$

можно утверждать существование такого $\delta > 0$ и K^2 таких, что при $\kappa > K^2$

$$g^j(x^*) < -\delta, \; g^j(x^\kappa) < -\delta \;\; \text{для} \;\; j \in J^2(x^*). \qquad (9)$$

Отсюда, пользуясь теоремой о среднем, для $j \in J^2(x^*)$ получаем

$$\psi_\kappa(g^j(x^*)) - \psi_\kappa(g^j(x^\kappa)) = \psi'_\kappa(\tilde g^j)(g^j(x^*) - g^j(x^\kappa)),$$

причем $\tilde{g}^j < -\delta$, так что из условия е) при $k > K = \max(K^1, K^2)$, $j \in J^2(x^*)$ следует

$$\psi_k(g^j(x^*)) - \psi_k(g^j(x^k)) \le \lambda_2(A_k, \delta) \cdot \max_{x \in Q} |g^j(x)|.$$

Тем самым

$$\Phi_k(x^*) - \Phi_k(x^k) \le \sum_{j \in J^1(x^*)} \psi_k(g^j(x^*)) +$$

$$+ \sum_{j \in J^2(x^*)} \{\psi_k(g^j(x^*)) - \psi_k(g^j(x^k))\} \le |J^1(x^*)|\lambda_1(A_k) +$$

$$+ |J^2(x^*)| \max_{j \in J^2(x^*)} \max_{x \in Q} |g^j(x)| \; \lambda_2(A_k, \delta),$$

что вместе с (8) дает оценку (7).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для практического использования установленных выше оценок полезно иметь в виду, что, как следует из доказательства теоремы, оценка (6) справедлива всегда, когда $x^k \in Q$, а оценка (7) - когда $x^k \in Q$ и выполнены неравенства (9). Естественно, пользоваться оценкой (7) имеет смысл лишь в том случае, если $\lambda_2(A_k, \delta) \ll \lambda_1(A_k)$ и мы можем достаточно точно оценить сверху величину $|J^1(x^*)|$.

Примером системы, обладающей ψ - свойством, как будет показано, является рассматриваемый ниже класс функций $\{\Phi_k^\theta\}$:

$$\Phi_k^\theta(x) = A_k \sum_{j \in J} (g^j(x) + \sqrt{g^{j2}(x) + A_k^{-2-\theta}}), \qquad (10)$$

$$\theta > 0 - const.$$

Функции (10), очевидно, представимы следующим образом:

$$\Phi_k^\theta(x) = \sum_{j \in J} \psi_k(g^j(x)),$$

где

$$\psi_k(t) = A_k(t + \sqrt{t^2 + A_k^{-2-\theta}}). \qquad (11)$$

ТЕОРЕМА 3°. *Функции (10) обладают ψ-свойством. При этом в качест-*

ве $\lambda_1(A_k)$ можно взять $A_k^{-\theta/2}$, в качестве $\lambda_2(A_k,\delta)$ – функцию $\frac{1}{2}\delta^{-2}A_k^{-1-\theta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условий а) и д) очевидно, причем $\psi_k \in C^{\infty}(R^1)$. Далее,

$$\psi_k(t) - \psi_k^+(t) = A_k\left(\sqrt{t^2 + A_k^{-2-\theta}} - |t|\right) =$$

$$= A_k^{-1-\theta}\left(\sqrt{t^2 + A_k^{-2-\theta}} + |t|\right)^{-1} \le A_k^{-\theta/2}.$$

При $t < -\delta$ ($\delta > 0$ фиксировано) имеем

$$\psi_k'(t) = A_k\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + A_k^{-2-\theta}}}\right) = \frac{A_k^{-1-\theta}}{\sqrt{t^2 + A_k^{-2-\theta}}\left(\sqrt{t^2 + A_k^{-2-\theta}} + |t|\right)} <$$

$$< \frac{A_k^{-1-\theta}}{\sqrt{\delta^2 + A_k^{-2-\theta}}\left(\sqrt{\delta^2 + A_k^{-2-\theta}} + \delta\right)} < \frac{A_k^{-1-\theta}}{2\delta^2}.$$

Насколько известно автору, рассматриваемые в литературе системы функций штрафа не обладают ψ -свойством. Интересно отметить, что функции (10) при $\theta = 0$ также не обладают указанным свойством, в частности нарушено условие с), так как при $\psi_k(t) = A_k(t + \sqrt{t^2 + A_k^{-2}})$ имеем $\psi_k(0) - \psi_k^+(0) = 1$.

Система $\{\Phi_k^0\}$, однако, удовлетворяет условиям теорем 1^*, 3^*, а также (в отличие от $\{\Phi_k^\theta\}$ при $\theta > 0$) условиям теоремы 2^* и представляет класс функций штрафа с весьма интересными свойствами.

В частности, $\Phi_k^0(x) - \Phi_k^+(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ (где $\Phi_k^+(x) = A_k\sum_{j\in J}(g^j(x) + |g^j(x)|)$) равномерно по x в области $X_\varepsilon = \{x \in R^n : |g^j(x)| \ge \varepsilon,\ j \in J\}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. Действительно, на множестве X_ε

$$0 < \Phi^o_\kappa(x) - \Phi^+_\kappa(x) = A_\kappa \sum_{j\in J} (\sqrt{g^{j2}(x) + A_\kappa^{-2}} - |g^j(x)|) =$$

$$= A_\kappa^{-1} \sum_{j\in J} \frac{1}{\sqrt{g^{j2}(x) + A_\kappa^{-2}} + |g^j(x)|} \leqslant \frac{m}{2} A_\kappa^{-1} \varepsilon^{-1} \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 0.$$

Допустим далее, что нам известна точка $x^o \in Q$, в которой

$$\min_{j\in J} |g^j(x^o)| = \sigma > 0. \tag{12}$$

Обозначим $Q_\varepsilon = \{x : g^j(x) \leqslant -\varepsilon,\ j \in J\}$.

ТЕОРЕМА 4°. Пусть[*] $f(x^o) - f(x^*) < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Тогда при использовании функций штрафа Φ^o_κ для $A_\kappa > \frac{m}{2\sigma(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - f(x^o) + f(x^*))}$

имеем $x^* \in Q_{1/2A_\kappa}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно показать, что при $x \in Q \setminus Q_{1/2A_\kappa}$

$$f(x^o) + \Phi^o_\kappa(x^o) < f(x) + \Phi^o_\kappa(x). \tag{13}$$

Но, как нетрудно видеть,

$$\Phi^o_\kappa(x^o) \leqslant A_\kappa\, m\,(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + A_\kappa^{-2}}) < \frac{m}{2A_\kappa\sigma}.$$

Если $x \in Q \setminus Q_{1/2A_\kappa}$, то при некотором $j_0 \in J$ имеем $g^{j_0}(x) > -1/2A_\kappa$, и, следовательно,

$$\Phi^o_\kappa(x) > A_\kappa(g^{j_0}(x) + \sqrt{[g^{j_0}(x)]^2 + A_\kappa^{-2}}) > A_\kappa(-\frac{1}{2A_\kappa} + \sqrt{\frac{5}{4A_\kappa^2}}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Тем самым для выполнения условия (13) в свою очередь достаточно, чтобы

---

[*]) Этого всегда можно добиться предварительным умножением целевой функции исходной задачи на подходящее положительное число.

$$f(x^0) + \frac{m}{2A_k\sigma} < f(x^*) + \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

последнее же неравенство справедливо, если

$$A_k > \frac{m}{2\sigma}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - f(x^0) + f(x^*)\right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 5⁰. Пусть $f \in C^1(R^n)$, $g^j \in C^1(R^n)$ $(j \in \bar{J})$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x)+f(y)] - \gamma\|x-y\|^2$ $(\gamma > 0)$ при любых x и y.

Тогда при реализации метода штрафа с использованием системы функций $\{\Phi_k^\theta\}$ $(\theta > 0 - const)$, начиная с некоторого K, имеем

$$\|x^k - x^*\|^2 < \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma}(f(x^0) - f(x^*)) + \frac{m}{2}A_k^{-\tau-\theta}\right], \qquad (14)$$

где τ - фиксированное число, $-\theta < \tau < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначая $\lambda_k = \frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma}$, будем считать, что при $k \geq K$ имеет место $\lambda_k < 1$ и $x^k \in Q$ (существование такого K можно гарантировать в случае $\theta > 0$ из доказательства теоремы 2⁰, а при $\theta = 0$ - на основании теоремы 2*).

На основании выпуклости функций $g^j(j \in J)$ из (12) имеем

$$g^j(x(\lambda_k)) \leq \lambda_k g^j(x) + (1-\lambda_k) g^j(x^*) \leq -A_k^{\tau-1}, \qquad (15)$$

где $x(\lambda_k) = x^* + \lambda_k(x^0 - x^*) \in Q$. Отсюда, ввиду монотонности функций (11), получим, что

$$\Phi_k^\theta(x(\lambda_k)) = A_k \sum_{j \in J}\left(\sqrt{g^{j2}(x(\lambda_k)) + A_k^{-2-\theta}} - |g^j(x(\lambda_k))|\right) =$$

$$= A_k^{-1-\theta} \sum_{j \in J} \frac{1}{\sqrt{g^{j2}(x(\lambda_k)) + A_k^{-2-\theta}} + |g^j(x(\lambda_k))|} \leq$$

$$\leq A_k^{-1-\theta}\, m\, \frac{1}{\sqrt{A_k^{-2+2\tau} + A_k^{-2-\theta}} + A_k^{-1+\tau}} \leq \frac{m}{2} A_k^{-\tau-\theta}.$$

Следовательно,

$$f(x(\lambda_\kappa)) + \Phi_\kappa^\theta(x(\lambda_\kappa)) < \frac{A_\kappa^{\tau-1}}{\sigma} f(x^0) + \left(1 - \frac{A_\kappa^{\tau-1}}{\sigma}\right) f(x^*) + \frac{m}{2} A_\kappa^{-\tau-\theta},$$

тем самым

$$f(x^\kappa) + \Phi_\kappa^\theta(x^\kappa) < \frac{A_\kappa^{\tau-1}}{\sigma} f(x^0) + \left(1 - \frac{A_\kappa^{\tau-1}}{\sigma}\right) f(x^*) + \frac{m}{2} A_\kappa^{-\tau-\theta},$$

откуда, так как $\Phi_\kappa^\theta(x^\kappa) > 0$, имеем

$$f(x^\kappa) - f(x^*) < \frac{A_\kappa^{\tau-1}}{\sigma}(f(x^0) - f(x^*)) + \frac{m}{2} A_\kappa^{-\tau-\theta}. \tag{16}$$

Далее, при $x^\kappa \in Q$, как уже отмечалось,

$$f(x^\kappa) - f(x^*) \geqslant 2\gamma \| x^\kappa - x^* \|^2. \tag{17}$$

Из неравенств (16) - (17) при $\kappa \geqslant K$ и получается требуемая оценка.

Отметим, что, подобно тому, как в случае теоремы 2, оценкой (14) можно пользоваться всегда, когда $x^\kappa \in Q$ и $\lambda_\kappa < 1$, не оценивая предварительно число K.

Аналогичным образом может быть получена оценка быстроты сходимости метода штрафов при некоторых других функциях штрафа.

Именно, при использовании функций $\Phi_\kappa(x) = \sum\limits_{j \in J} e^{A_\kappa g^j(x)}$

в тех же условиях справедлива оценка

$$\| x^\kappa - x^* \|^2 < \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{A_\kappa^{\tau-1}}{\sigma}(f(x^0) - f(x^*)) + m\, e^{-A_\kappa^\tau}\right],$$

а при $\Phi_\kappa(x) = -A_\kappa^{-1} \sum\limits_{j \in J} \frac{1}{g^j(x)}$ - оценка *)

$$\| x^\kappa - x^* \|^2 < \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{A_\kappa^{\tau-1}}{\sigma}(f(x^0) - f(x^*)) + m\, A_\kappa^{-\tau}\right].$$

При конечномерной аппроксимации некоторых вариационных задач на основе применения прямых методов (Ритца, Куранта) при-

---

*) Для последней функции в более жестких условиях получены и более точные оценки ([4, 5]).

ходится иметь дело с ограничениями вида

$$g^j(x,y) \le 0 \qquad \text{для всех } y \in Q \subset R^l,\ j \in J$$

(Q – замыкание области интегрирования в исходной задаче), где g^j – выпуклые по x непрерывные функции, причем

$$\Omega = \{x \in R^n : g^j(x,y) \le 0,\ \ y \in Q,\ j \in J\}$$

– компакт и существует точка $\bar{x}$, в которой $\sup\limits_{y \in Q} \max\limits_{j \in J} g^j(\bar{x},y) < 0$.

Для решения полученной конечномерной задачи оказывается весьма удобным применить интегральные функции штрафа, порожденные функциями (10).

Именно, справедливо следующее утверждение, допускающее естественное обобщение для любых функций

$$\Phi_k(x,y) = \sum_{j \in J} \psi_k(g^j(x,y)),$$

обладающих ψ -свойством при каждом $y \in Q$.

ТЕОРЕМА 6^0. Если Q – компакт и $\overline{\mathrm{int}\, Q} = Q$, то

1. Функция

$$\tilde{\varphi}^\theta_k(x) = A_k \sum_{j \in J} \int_Q (g^j(x,y) + \sqrt{g^{j2}(x,y) + A_k^{-2-\theta}})\, dy \qquad (18)$$

удовлетворяют условиям теоремы 1*;

2. Соотношение

$$\tilde{\varphi}^\theta_k(x) - A_k \sum_{j \in J} \int_Q (g^j(x,y) + |g^j(x,y)|)\, dy \underset{k \to \infty}{\Longrightarrow} 0 \qquad (19)$$

при $\theta > 0$ имеет место на всем R^n, а при $\theta = 0$ на любом таком компакте S, что $\mathrm{mes}\{y \in Q : g^j(x,y) = 0\} = 0$ для всех $x \in S$, $j \in J$ (символ „$\Longrightarrow$" означает равномерную сходимость).

Доказательство теоремы существенно опирается на следующий результат.

ЛЕММА. Пусть $g \in C(R^n \times P)$; $P \subset R^l$, $T \subset R^n$ – (*) [illegible]; $\mathrm{mes}\{y \in P : g(x,y) = 0\} = 0$ при [illegible]

(*) (символы в оригинале не читаются)

$x \in T$.

Тогда $\tau(x,\varepsilon) = \{y \in P : |g(x,y)| < \varepsilon\} \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} 0$ равномерно по $x \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $M(x,\varepsilon) = \{y \in P : |g(x,y)| < \varepsilon\}$. Очевидно, если $|g(x,y) - g(x',y)| < \varepsilon$ для всех $y \in P$, то $M(x,\varepsilon) \subset M(x', 2\varepsilon)$. Тем самым найдется $\delta > 0$ такое, что при $(x',y) \in T \times P$, $\|x - x'\| < \delta$

$$M(x,\varepsilon) \subset M(x', 2\varepsilon). \tag{20}$$

Далее, при любом x имеем $M(x,\varepsilon') \subset M(x,\varepsilon)$, если $\varepsilon > \varepsilon'$, причем $M(x,\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} \tilde{M}(x)$, где $\tilde{M}(x) = \{y \in P : g(x,y) = 0\}$.

Отсюда при $x \in T$ по свойству меры $\tau(x,\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} mes\, \tilde{M}(x) = 0$.

Следовательно, для любого $\Delta > 0$ и любого $x' \in T$ найдется $\varepsilon_{x'} > 0$ такое, что $\tau(x', 2\varepsilon_{x'}) < \Delta$. В силу соотношения (20), $\tau(x, \varepsilon_{x'}) < \Delta$ в некоторой открытой окрестности $V_{x'}$ точки x'.

На основании компактности T существует конечное число точек x^1, $x^2, \dots,$ x^k из T таких, что $\bigcup_{l=1}^{k} V_{x^l} \supset T$. Полагая $\varepsilon_0 = \min\limits_{1 \le l \le k} \varepsilon_{x^l}$, получаем, что $\tau(x, \varepsilon_0) < \Delta$ для всех $x \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. Легко видеть, что $\tilde{\Phi}_k^\theta$ – выпуклые функции. Если $x \in int\, Q$, то при некотором $\lambda > 0$ имеем $\tilde{x} = x + \lambda(x - \bar{x}) \in Q$ и, следовательно, $g^j(\tilde{x},y) \le 0$ для всех $y \in Q$, $j \in J$. С учетом выпуклости $g^j(x,y)$ по x это дает

$$g^j(x,y) \le \frac{1}{1+\lambda}\, g^j(\tilde{x},y) + \frac{\lambda}{1+\lambda}\, g^j(\bar{x},y) < 0$$

и, так как Q – компакт, то $\max\limits_{y \in Q} g^j(x,y) \le q < 0\ (j \in J)$. Тем самым при любом j

$$A_k\left(g^j(x,y) + \sqrt{g^{j2}(x,y) + A_k^{-2-\theta}}\right) \le A_k\left(q + \sqrt{q^2 + A_k^{-2-\theta}}\right),$$

откуда и следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} \tilde{\Phi}_k^\theta(x) = 0.$

Пусть теперь $x \notin Q$, т.е. при некоторых $j = j_0$ и $y^0 \in Q$ имеет место $g^{j_0}(x, y^0) > \tau > 0$. Тогда существует $r > 0$ такое, что $g^{j_0}(x,y) > \tau$ при $y \in U(y^0) = \{ y \in Q : \|y - y^0\| < r \}$, причем, так как $\operatorname{int} Q = Q$ (Q, естественно, предполагается непустым), то $\operatorname{mes} U(y^0) > 0$. Следовательно,

$$A_\kappa (g^{j_0}(x,y)) + \sqrt{[g^{j_0}(x,y)]^2 + A_\kappa^{-2-\theta}}) >$$

$$> A_\kappa (\tau + \sqrt{\tau^2 + A_\kappa^{-2-\theta}}) \geq 2 A_\kappa \tau,$$

откуда имеем $\tilde{\Phi}_\kappa^\theta(x) > A_\kappa \tau \cdot \operatorname{mes} U(y^0)$, т.е. $\tilde{\Phi}_\kappa^\theta(x) \xrightarrow[\kappa \to \infty]{} \infty$.

Далее,

$$0 \leq \tilde{\Phi}_\kappa^\theta(x) - A_\kappa \sum_{j \in J} \int_Q (g^j(x,y) + |g^j(x,y)|)\, dy =$$

$$= A_\kappa \sum_{j \in J} \int_Q (\sqrt{g^{j2}(x,y) + A_\kappa^{-2-\theta}} - |g^j(x,y)|)\, dy =$$

$$= A_\kappa^{-1-\theta} \sum_{j \in J} \int_Q \frac{1}{\sqrt{g^{j2}(x,y) + A_\kappa^{-2-\theta}} + |g^j(x,y)|}\, dy \leq m A_\kappa^{-\theta/2} \operatorname{mes} Q,$$

что при $\theta > 0$ сразу дает (I9).

Если $\theta = 0$, то обозначая $Q_\varepsilon(x) = \{ y \in Q : |g^j(x,y)| \geq \varepsilon,\ j \in J \}$, при $\varepsilon > 0$ имеем

$$0 \leq A_\kappa \sum_{j \in J} \int_{Q_\varepsilon(x)} (g^j(x,y) + \sqrt{g^{j2}(x,y) + A_\kappa^{-2}})\, dy -$$

$$- A_\kappa \sum_{j \in J} \int_{Q_\varepsilon(x)} (g^j(x,y) + |g^j(x,y)|)\, dy \leq$$

$$\leq \frac{m}{2} A_\kappa^{-1} \varepsilon^{-1} \operatorname{mes} Q_\varepsilon(x) \leq \frac{m}{2} A_\kappa^{-1} \varepsilon^{-1} \operatorname{mes} Q; \tag{21}$$

$$0 \leq A_\kappa \sum_{j \in J} \int_{Q \setminus Q_\varepsilon(x)} (g^j(x,y) + \sqrt{g^{j2}(x,y) + A_\kappa^{-2}})\, dy -$$

$$- A_\kappa \sum_{j \in J} \int_{Q \setminus Q_\varepsilon(x)} (g^j(x,y) + |g^j(x,y)|)\, dy =$$

$$A_\kappa \sum_{j\in J} \int_{Q \setminus Q_\varepsilon(x)} \frac{A_\kappa^{-2}}{\sqrt{g^{j2}(x,y)+A_\kappa^{-2}} + |g^j(x,y)|}\, dy < m \cdot mes\,(Q \setminus Q_\varepsilon(x)). \quad (22)$$

Но $Q \setminus Q_\varepsilon(x) = \{y \in Q : \min_{j\in J} |g^j(x,y)| < \varepsilon\}$ и для функции $\min_{j\in J} |g^j(x,y)|$, как нетрудно видеть, на S выполнены условия леммы. Следовательно, $mes\,(Q \setminus Q_\varepsilon(x)) \xrightarrow[\varepsilon]{} 0$ равномерно по $x \in S$, и, на основании (21), (22), на S имеем

$$\tilde{\Phi}_\kappa^0(x) \rightrightarrows A_\kappa \sum_{j\in J} \int_Q (g^j(x,y) + |g^j(x,y)|)\, dy. \quad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если при некотором $\alpha > 0$ множество $S = \bigcup_{y\in Q} \{x : \min_{j\in J} |g^j(x,y)| \le \alpha\}$ является компактом и $mes\,\{y \in Q : \min_{j\in J} |g^j(x,y)| = 0\} = 0$ при всех $x \in S$, то соотношение (23) справедливо на всем R^n.

Весьма важным аргументом в пользу применения интегральных функций штрафа (18) является высокая степень гладкости порождающих их функций (11). Это позволяет (если, конечно, достаточно гладкими являются сами g^j) применять для вычисления интегралов кубатурные формулы высокой точности и, следовательно, обойтись значительно меньшим числом узлов, чем если бы мы пользовались сеткой по y для перехода к конечному числу ограничений. Отметим, что степень гладкости функций g^j в свою очередь определяется выбором системы координатных функций и, следовательно, в какой-то мере поддается регулированию.

Литература

1. КАПЛАН А.А. Характеристические свойства функций штрафа.- "Докл. АН СССР", 1973, т.210, № 5, с. 1018-1021.
2. КАПЛАН А.А. К характеристике штрафных функций. - В кн.: Оптимизация. Вып. 8(25), Новосибирск, 1972, с. 13-22.

3. WOLFE Ph. A duality theorem for nonlinear programming. -"Quart. appl. Math.", 1961, v.19, №3

4. LOOTSMA F.A. Boundary properties of penalty functions for constrained minimization.-"Philips Res. Rept.", 1970, Suppl. №3

5. MIFFLIN R. Convergence bounds for nonlinear programming algorithms. -"Math. Programming", 1975, v.8, №3, p.251 - 271.