УДК 519.8

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА МИНИМАКС

Л.В.Васильев, В.Н.Тарасов

В настоящей статье предлагается метод для минимизации функции максимума при наличии ограничений. Метод целесообразно применять, когда число функций, из которых выбирается максимум, и число ограничений значительно превышает размерность пространства, в котором производится минимизация.

Пусть $f_i(x)$, $i \in I = 1:N$, $h_j(x)$, $j \in J = 1:N_1$, - непрерывно дифференцируемые на E_n функции. Образуем множество

$$\Omega = \{x \in E_n \mid h_j(x) \le 0, \quad j \in J\}$$

и функцию $\varphi(x) = \max\limits_{i \in I} f_i(x)$. Предположим, что функции $h_j(x)$ выпуклы и выполнено условие Слейтера.

Введем обозначения: $R(x) = \{i \in I \mid f_i(x) = \varphi(x)\}$,

$$Q(x) = \{j \in J \mid h_j(x) = 0\}, \quad H(x) = \left\{\frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \,\Big|\, i \in R(x)\right\},$$

$$H'(x) = \left\{\frac{\partial h_j(x)}{\partial x} \,\Big|\, j \in Q(x)\right\}, \quad L(x) = co\{H(x) \cup H'(x)\}.$$

Рассмотрим задачу минимизации функции φ на множестве Ω.

Пусть $z(x) = \min\limits_{z \in L(x)} \|z\|$. Для того чтобы точка x^* была точкой минимума φ на Ω, необходимо, а в случае выпуклости функции φ и достаточно, чтобы $z(x^*) = 0$. Точка $x^* \in \Omega$, в которой $z(x^*) = 0$, называется стационарной.

Ниже предлагается метод для нахождения стационарных точек.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in \Omega$ и зафиксируем целое число $n_0 \geq 1$. Пусть уже найдена точка $x_k \in \Omega$. Положим $x_{k0} = x_k$,

$R_{k0} = R(x_{k0})$, $Q_{k0} = Q(x_{k0})$, $H_{k0} = H(x_{k0})$, $H'_{k0} = H'(x_{k0})$,

$L_{k0} = L(x_{k0})$, $m_{k0} = |R_{k0}|$, $m'_{k0} = |Q_{k0}|$ (здесь $|S|$ - число элементов множества S). Найдем вектор $z_{k0} \in L_{k0}$ такой, что $z_{k0} = \|z_{k0}\| = \min\limits_{z \in L_{k0}} \|z\|$.

Если $z_{k0} = 0$, то точка x_k стационарная и процесс прекращается. В противном случае на луче $x_{k0}(\alpha) = x_{k0} - \alpha z_{k0}$, $\alpha \geq 0$, находим точку $x_{k1} = x_{k0}(\alpha_{k0})$, в которой

$$\varphi(x_{k1}) = \min_{\substack{\alpha \geq 0,\, x_{k0}(\alpha) \in \Omega \\ R(x_{k0}(\alpha)) \subset R_{k0}}} \varphi(x_{k0}(\alpha)).$$

Если

$$R(x_{k1}) \subset R_{k0}, \quad Q(x_{k1}) \subset Q_{k0}, \tag{I}$$

то полагаем $m_{k1} = m_{k0}$, $m'_{k1} = m'_{k0}$, если же хотя бы одно из включений не выполнено, то полагаем

$$m_{k1} = m_{k0} + |R(x_{k1}) \setminus R_{k0}|, \quad m'_{k1} = m'_{k0} + |Q(x_{k1}) \setminus Q_{k0}|.$$

Пусть

$$f_{i_1}(x_{k1}) \geq f_{i_2}(x_{k1}) \geq \dots \geq f_{i_N}(x_{k1}),$$

$$h_{j_1}(x_{k1}) \geq h_{j_2}(x_{k1}) \geq \dots \geq h_{j_{N_1}}(x_{k1}).$$

Образуем множества

$$R_{k1} = \{ i_q \in I \mid q \leq m_{k1} \}, \quad Q_{k1} = \{ j_q \in J \mid q \leq m'_{k1} \},$$

$$H_{k1} = \left\{ \frac{\partial f_i(x_{k1})}{\partial x} \;\middle|\; i \in R_{k1} \right\}, \quad H'_{k1} = \left\{ \frac{\partial h_j(x_{k1})}{\partial x} \;\middle|\; j \in Q_{k1} \right\},$$

$$L_{k1} = co\{ H_{k1} \cup H'_{k1} \}$$

и найдем вектор $z_{k1} \in L_{k1}$ такой, что $z_{k1} = \|z_{k1}\| = \min\limits_{z \in L_{k1}} \|z\|$. Если $z_{k1} = 0$, то полагаем $x_{k+1} = x_{k1}$, если же $z_{k1} > 0$, то на луче $x_{k1}(\alpha) = x_{k1} - \alpha z_{k1}$, $\alpha > 0$,

находим точку $x_{k2} = x_{k1}(\alpha_{k1})$, в которой $\varphi(x_{k2}) =$
$= \min\limits_{\substack{\alpha > 0,\, x_{k1}(\alpha) \in Q \\ x_{k1}(\alpha) \subset R_{k1}}} \varphi(x_{k1}(\alpha))$. В точке x_{k2} производим те же операции, что и в точке x_{k1} и т.д. до тех пор, пока не будет найдена точка x_{kt_k} такая, что либо $z_{kt_k} = 0$, либо включения

$$R(x_{ki}) \subset R_{k,i-1}, \quad Q(x_{ki}) \subset Q_{k,i-1} \tag{2}$$

выполняются n_0 раз подряд, т.е. (2) справедливо для каждого $i \in t_k - n_0 : t_k$.

После этого полагаем $x_{k+1} = x_{kt_k}$.

Заметим, что для любого k число t_k конечно, ибо по крайней мере включения (2) выполнятся n_0 раз подряд через конечное число шагов, так как количество индексов в I и J конечно.

Если последовательность $\{x_k\}$ конечна, то последняя полученная точка является стационарной по построению. В противном случае справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть $D(x_0) = \{x \in Q \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ ограничено. Любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ является стационарной точкой функции φ на множестве Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование предельных точек следует из компактности множества $D(x_0)$. Пусть $x_{k_s} \longrightarrow x^* \in Q$. Утверждается, что $z(x^*) = 0$. Допустим противное, т.е. что $z^* = z(x^*) > 0$. Пусть $S_\delta(x^*) = \{x \in Q \mid \|x - x^*\| = \delta\}$.

Существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in S_\delta(x^*)$ будет

$$\left.\begin{aligned} &R(x) \subset R(x^*), \quad Q(x) \subset Q(x^*), \\ &\min_{z \in L^*(x)} \|z\| \geq \frac{z^*}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $L^*(x) = \left\{ \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x}, \dfrac{\partial h_j(x)}{\partial x} \;\middle|\; i \in R(x^*),\ j \in Q(x^*) \right\}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\{x_{k_s}\} \subset S_{\delta/2}(x^*)$ и для $x_{k_s,q} \in S_\delta(x^*)$ будет $R_{k_s,q} \subset R(x^*)$, $Q_{k_s,q} \subset Q(x^*)$.

Тогда из (3) следует, что для $x_{k_s,q} \in S_\delta(x^*)$

$$z_{k_s,q} \geq z^*/2 . \qquad (4)$$

При каждом k_s либо а) $x_{k_s,q} \in S_\delta(x^*)$ для всех $q \in 0:t_{k_s}$; либо б) существует такое число $q_{k_s} \in 0:t_{k_s}$, что $x_{k_s,q_{k_s}} \in S_\delta(x^*)$.

В случае а) имеем

$$\varphi(x_{k_s,t_{k_s}-1}(\alpha)) \leq \varphi(x_{k_s,t_{k_s}-1}) - \frac{\alpha z^*}{2} + 0_{k_s}(\alpha).$$

Поскольку при переходе от x_{k_s}, t_{k_s-1} к x_{k_s}, t_{k_s} выполнено (2) и для $i \in R_{k_s,t_{k_s}-1}$ и $j \in Q_{k_s,t_{k_s}-1}$ будут справедливы неравенства

$$f_i(x_{k_s,t_{k_s}-1}(\alpha)) \leq f_i(x_{k_s,t_{k_s}-1}) - \frac{\alpha z^*}{2} + 0_{k_s}^{(i)}(\alpha),$$

$$h_j(x_{k_s,t_{k_s}-1}(\alpha)) \leq h_j(x_{k_s,t_{k_s}-1}) - \frac{\alpha z^*}{2} + 0_{k_s}^{(j)}(\alpha),$$

то, как можно показать, в силу соотношений (3), $\inf \alpha_{k_s-1} > 0$ и существует $\beta > 0$ (одно и то же для всех k_s) такое, что

$$\varphi(x_{k_s+1}) \leq \varphi(x_{k_s}) - \beta . \qquad (5)$$

Обратимся к случаю б). Выберем число $\tau_{k_s} \in 0:t_{k_s}$ такое, что $x_{k_s,q} \in S_\delta(x^*)$ для всех $q \in 0:\tau_{k_s}$, но $x_{k_s,\tau_{k_s}+1} \notin S_\delta(x^*)$ Так как $x_{k_s} \in S_{\delta/2}(x^*)$, то

$$\sum_{q=0}^{\tau_{k_s}} \| x_{k_s,q} - x_{k_s,q+1} \| \geq \frac{\delta}{2} .$$

Поэтому в силу (4), снова найдется такое $\beta > 0$, что

$$\varphi(x_{k_s}, \tau_{k_s+1}) \leq \varphi(x_{k_s}) - \beta .$$

Отсюда и из (5) вытекает, что $\varphi(x_{k_s}) \longrightarrow -\infty$, что невозможно, ибо $\mathcal{D}(x_0)$ ограничено.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что в данной работе предлагается новый метод борьбы с заедзанием в схеме возможных направлений.

Литература

1. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., МАЛОЗЕМОВ В.Н. Введение в минимакс. М., "Наука", 1972, 368 с.

Поступила в ред.-изд. отд.
12. V. 1976 г.