УДК 517.51

О КВАЗИАФФИННЫХ ФУНКЦИЯХ

В.Ю.Ровенский

1°. Аффинные функции могут быть охарактеризованы как такие, которые определены на выпуклом множестве и являются одновременно выпуклыми и вогнутыми. Сужения таких функций на любые отрезки, очевидно, будут непрерывными строго монотонными либо постоянными.

Указанное свойство аффинных функций принимается нами в качестве определения квазиаффинных функций, образующих более широкий класс. Некоторые особенности таких функций устанавливаются в [2 - 5]. Квазиаффинные функции могут быть охарактеризованы как такие, которые непрерывны вдоль любых отрезков и являются квазивыпуклыми и квазивогнутыми одновременно. Это означает, что если определенная на выпуклом множестве $\mathcal{D}$ квазиаффинная функция f не является постоянной и множество

$$\mathcal{D}_c = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) = c\}$$

непусто, то $\mathcal{D}_c = \mathcal{D} \cap H_c$, где H_c - некоторая гиперплоскость.

Простейшим примером квазиаффинных функций могут служить так называемые дробно-аффинные функции, представимые на выпуклом множестве $\mathcal{D}$ в виде отношения двух аффинных функций.

2°. Функции f и g назовем эквивалентными (см. [1]), если они определены на одном и том же множестве $\mathcal{D}$ и при этом

$$f(x) \leq f(y) \Longleftrightarrow g(x) \leq g(y), \qquad (1)$$

т.е.

$$f(x) = u(g(x)), \quad x \in \mathcal{D}, \qquad (1')$$

где u - некоторая строго возрастающая функция. В цитированной работе устанавливаются характеристические свойства квазивыпуклых функций, обладающих эквивалентными выпуклыми функциями. В этой связи в [1] каждой квазивыпуклой функции f, имеющей связную область значений $Im\, f$, сопоставляется функция

$$\tau_f(t_1,t_2) = \sup\{f(\tfrac{x+y}{2}) \mid f(x) \leq t_1,\ f(y) \leq t_2\},\ t_1,t_2 \in Im\, f. \qquad (2)$$

При этом показывается, в частности, что если функция f эквивалентна некоторой выпуклой функции, то соответствующая функция (2) удовлетворяет условию:

(!) Какова бы ни была внутренняя точка t_0 из $Im\, f$, для любого $\alpha_0 < t_0$ из $Im\, f$ в этом множестве найдется такая точка $\beta_0 > t_0$, что

$$\tau_f(\alpha_i, \beta_i) < t_0, \quad i = 0,1,2,\dots, \qquad (3)$$

где

$$\alpha_i = \tau_f(\alpha_{i-1}, t_0), \quad \beta_i = \tau_f(t_0, \beta_{i-1}), \quad i = 1,2,\dots \qquad (4)$$

Заметим, что для эквивалентных функций f и g из выполнения условия (!) для функции τ_f вытекает выполнение аналогичного условия для функции τ_g.

В настоящей статье, опираясь на приведенный результат, мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Если квазиаффинная функция f эквивалентна некоторой выпуклой (вогнутой) функции, то она эквивалентна также некоторой аффинной функции.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Дробно-аффинная функция, рассматриваемая на произвольном фиксированном выпуклом множестве $\mathcal{D}$, эквивалентна некоторой выпуклой или вогнутой функции только в том случае, когда она постоянна на $\mathcal{D}$ или же на $\mathcal{D}$ постоянна одна из исходных аффинных функций.

Отметим, что соответствующий факт ранее был известен лишь для частного случая, когда замыкание множества $\mathcal{D}$ содержит хотя бы одну точку, в которой обе исходные аффинные функции обращаются в нуль.

3^0. Доказательству теоремы предпошлем одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Если соответствующая квазиаффинной функции f функция (2) удовлетворяет условию (!), то f эквивалентна некоторой аффинной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если квазиаффинная функция f не эквивалентна никакой аффинной функции, то найдутся такие точки x_1, x_2, y_1, y_2, что

$$f(x_1)=f(y_1)<f(x_2)=f(y_2),\quad y_2=y_1+K(x_2-x_1),\quad K>1.$$

Из равенства

$$f(x)=f[y_1+g(x)\cdot(y_2-y_1)],\quad x\in conv\{x_1,y_1,x_2,y_2\},$$

однозначно определяется квазиаффинная функция g, а из равенства

$$t=g[x_1+x_2(t)(y_2-y_1)],\quad t\in[0,1],$$

однозначно определяется строго возрастающая функция x.

Так как функция g возрастает на отрезках y_1, y_2 и $\left[\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right]$, причем для любых $0<t_1<t_2\leq 1$

$$g\left[y_1+\frac{t_1+t_2}{2}(y_2-y_1)\right]\leq \tau_g(t_1,t_2)=g\left[y_1+\tau_g(t_1,t_2)(y_2-y_1)\right],$$

$$g\left[\frac{x_1+y_1}{2}+\frac{x(t_1)+t_2}{2}\cdot(y_2-y_1)\right]\leq\tau_g(t_1,t_2)=g\left[\frac{x_1+y_1}{2}+\frac{x(\tau_g(t_1,t_2))+\tau_g(t_1,t_2)}{2}(y_2-y_1)\right],$$

то для функции τ_g получаем неравенства

$$\tau_g(t_1,t_2)+x(\tau_g(t_1,t_2))\geqslant x(t_1)+t_2, \tag{5}$$

$$\tau_g(t_1,t_2)\geqslant\frac{t_1+t_2}{2}. \tag{6}$$

Так как функция x возрастает на $[0,1]$, то она почти всюду имеет неотрицательную производную, причем

$$\int_0^1 x'(t)\,dt\leqslant x(1)-x(0).$$

Поскольку при этом $x(1)-x(0)=\frac{1}{k}<1$, то найдется такое $t_0\in(0,1)$, что $0\leqslant x'(t_0)<1$. Но тогда, учитывая неравенство (5), можно найти такие $\alpha_0\in[0,t_0)$ и $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$, что

$$\tau_g(t,t_0)\geqslant t_0-\varepsilon(t_0-t),\qquad t\in[\alpha_0,t_0], \tag{7}$$

откуда при любом $1\geqslant\beta_0>t_0$ для соответствующих величин (4) получаем

$$\alpha_i\geqslant t_0-\varepsilon^i(t_0-\alpha_0),\quad \beta_i\geqslant t_0+\frac{1}{2^i}(\beta_0-t_0),\qquad i=0,1,2,\ldots \tag{8}$$

На основании полученных оценок (8) и неравенства (6) можно утверждать, что для функции τ_g нарушено условие (1), так как для любого $\beta_0>t_0$ из $Im\,g$ при достаточно больших i имеем

$$\tau_g(\alpha_i,\beta_i)\geqslant t_0+\frac{t_0-\alpha_0}{2^{i+1}}\cdot\left[\frac{\beta_0-t_0}{t_0-\alpha_0}-(2\varepsilon)^i\right]>t_0.$$

Но тогда указанное условие, очевидно, нарушено также для функции (2), отвечающей исходной квазиаффинной функции f. Таким образом, если для τ_f выполнено условие (1), то квазиаффинная функция f эквивалентна некоторой аффинной функции, что и требовалось показать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО **теоремы.** Пусть квазиаффинная функция f эквивалентна некоторой выпуклой функции. Тогда соответствующая функция τ_f удовлетворяет условию (1) и, в силу доказанной леммы, функция f эквивалентна некоторой аффинной функции. Случай, когда f эквивалентна некоторой вогнутой функции, легко сводится к рассмотренному путем перехода к квазиаффинной функции $-f$.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Г.Ш.Рубинштейну.

Л и т е р а т у р а

1. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Характеристика насыщения класса выпуклых функций. - В кн.: Оптимизация. Вып. 9(26). Новосибирск, 1973, с. 165-180.

2. ХОАНГ ТУЙ. О почти аффинных функциях. - "Мат. заметки", 9, 1971, с. 435-440.

3. Hoang Tuy. Sur les fonctions presgue affines. Collog. Math., 22(1971), p. 301-309.

4. Evans Y.P., Gorr W.L., Kortanek K.O. Characterations of continues functions whose level sets are hyperplanes. Cah. Cent. etud. rech. oper. 1973, 15, № 2.

5. ЗАБОТИН Я.И., ХАБИБУЛЛИН Р.Ф. Некоторые классы квазивогнутых функций. - В кн.: Численные методы в технико-экономических задачах. Казань, 1971.

Поступила в ред.-изд. отд.
29. У. 1975 г.