УДК 517.51

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СТРОГО ВОЗРАСТАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Ю.Н.Владимиров

Устанавливаемая характеристика непрерывных строго возрастающих функций непосредственно связана с проблемой Фенхеля [1] об условиях преобразуемости квазивыпуклых функций в выпуклые.

В работе Г.Ш.Рубинштейна [2], посвященной решению проблемы Фенхеля, каждой квазивыпуклой функции f со связной областью значений $T_f \subset R$ сопоставляется следующая функция:

$$\tau_f(t,t') = \sup\{f(\tfrac{x+y}{2}) : f(x)=t, f(y)=t'\}, \qquad (1)$$

определенная на $T_f \times T_f$.

Рассмотрим произвольную непрерывную строго возрастающую вещественнозначную функцию f, определенную на связном множестве $\mathcal{D} \subset R$. Нетрудно проверить, что тогда отвечающая ей функция $\tau = \tau_f$, определенная на $T \times T = T_f \times T_f$, удовлетворяет следующим условиям:

1°. При любых $t < t'$ из T справедливы соотношения

$$\tau(t,t)=t, \quad t < \tau(t,t') = \tau(t',t) < t';$$

2°. Каковы бы ни были t_1, t_2, t_3, t_4 из T, имеет место равенство

$$\tau(\tau(t_1,t_2), \tau(t_3,t_4)) = \tau(\tau(t_1,t_3), \tau(t_2,t_4));$$

3^0. При любых $\alpha < \beta$ из T множество

$$M_{[\alpha,\beta]} = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n ,$$

где

$$M_0 = \{\alpha,\beta\}, \quad M_n = \{\tau(t,t')\}_{t\in M_{n-1},\, t'\in M_{n-1}}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

является плотным в отрезке $[\alpha,\beta]$.

ТЕОРЕМА. Пусть $T \subset R$ – связанное множество и функция $\tau : T\times T \longrightarrow R$ удовлетворяет условиям 1^0, 2^0, 3^0. Тогда найдется непрерывная строго возрастающая функция f, для которой $\tau_f = \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что заданное множество T совпадает с некоторым невырожденным отрезком $[\alpha,\beta]\subset R$, и построим интересующую нас непрерывную строго возрастающую функцию f на $\mathcal{D} = [0,1]$. Для этого рассмотрим множество двоично-рациональных точек отрезка $\mathcal{D}$, которое может быть представлено в виде

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n ,$$

где

$$X_n = \left\{\frac{m}{2^n}\right\}, m = 1,2,\ldots,2^n; \quad Y_0 = X_0 = \{0,1\}, \; Y_n = X_n \setminus X_{n-1}, n=1,2,\ldots$$

При этом, очевидно, точкам $x = \frac{m}{2^n}$ из Y_n отвечают нечетные m. Полагая $f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$, для каждого $\frac{m}{2^n} \in Y_n$, при $n > 0$ принимаем

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \tau\left(f\left(\frac{m-1}{2^n}\right),\ f\left(\frac{m+1}{2^n}\right)\right),$$

где точки $\frac{m-1}{2^n}$, $\frac{m+1}{2^n}$, очевидно, содержатся в X_{n-1}.

Покажем, что построенная функция $f : X \longrightarrow [\alpha,\beta]$ является строго возрастающей и при любых x и y из X удовлетворяет условию

$$\tau(f(x), f(y)) = f\left(\frac{x+y}{2}\right). \qquad (2)$$

Справедливость неравенства $f(x) < f(y)$ для любых $x<y$ из X непосредственно следует из 1^0. Действительно,

пусть это неравенство установлено для всех точек из X_n, а рассматриваемые точки $x<y$ содержатся в X_{n+1}, причем по крайней мере одна из них, например точка x, принадлежит Y_{n+1}. Тогда для точки $x+\frac{1}{2^{n+1}}\in X_n$ на основании I^0 имеем $f(x)<f(x+\frac{1}{2^{n+1}})$. Если при этом $y\in Y_{n+1}$, то для $y-\frac{1}{2^{n+1}}\in X_n$ имеем

$$x+\frac{1}{2^{n+1}}\leq y-\frac{1}{2^{n+1}},$$

следовательно,

$$f(x)<f(x+\frac{1}{2^{n+1}})\leq f(y-\frac{1}{2^{n+1}})<f(y).$$

Если же $y\in X_n$, то требуемое неравенство вытекает из предположения индукции.

Для доказательства соотношения (2) предположим, что оно справедливо для всех x и y из X_n (для точек из X_0 это соотношение вытекает из определения функции f). Допустим теперь, что точки x и y принадлежат X_{n+1}, причем $x\in Y_{n+1}$, т.е. $f(x)=\tau(f(x-\frac{1}{2^{n+1}}), f(x+\frac{1}{2^{n+1}}))$. При этом возможны два случая: а) $y\in Y_{n+1}$; б) $y\in X_n$.

В случае „а" $f(y)=\tau(f(y-\frac{1}{2^{n+1}}), f(y+\frac{1}{2^{n+1}}))$ и точка $\frac{x+y}{2}$, очевидно, содержится в X_{n+1}. Если указанная точка содержится в Y_{n+1}, то для

$$f(\frac{x+y}{2})=\tau(f(\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}), f(\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}))$$

на основании предположения индукции и условия 2^0 имеем

$$f(\frac{x+y}{2})=$$

$$=\tau(\tau(f(x-\frac{1}{2^{n+1}}), f(y-\frac{1}{2^{n+1}})), \tau(f(x+\frac{1}{2^{n+1}}), f(y-\frac{1}{2^{n+1}})))=$$

$$=\tau(\tau(f(x-\frac{1}{2^{n+1}}), f(x+\frac{1}{2^{n+1}})), \tau(f(y-\frac{1}{2^{n+1}}), f(y+\frac{1}{2^{n+1}})))=$$

$$=\tau(f(x), f(y)).$$

Если же $\frac{x+y}{2}\in X_n$, то

$$f(\frac{x+y}{2})=\tau(f(\frac{x+y}{2}), f(\frac{x+y}{2}))=$$

$$=\tau(\tau(f(x-\frac{1}{2^{n+1}}), f(y+\frac{1}{2^{n+1}})), \tau(f(x+\frac{1}{2^{n+1}}), f(y-\frac{1}{2^{n+1}})))=$$

$$=\tau(\tau(f(x-\tfrac{1}{2^{n+1}}),\ f(x+\tfrac{1}{2^{n+1}})),\ \tau(f(y-\tfrac{1}{2^{n+1}}),\ f(y+\tfrac{1}{2^{n+1}})))=$$

$$=\tau(f(x),f(y)).$$

В случае „б" точка $\frac{x+y}{2}$ принадлежит Y_{n+2}. Тогда в силу определения,

$$f(x)=\tau(f(x-\tfrac{1}{2^{n+1}}),\ f(x+\tfrac{1}{2^{n+1}})),$$

$$f(\tfrac{x+y}{2})=\tau(f(\tfrac{x+y}{2}-\tfrac{1}{2^{n+2}}),\ f(\tfrac{x+y}{2}+\tfrac{1}{2^{n+2}})).$$

Отсюда на основании предположения индукции

$$f(\tfrac{x+y}{2})=\tau(f(\tfrac{x+y}{2}-\tfrac{1}{2^{n+2}}),\ f(\tfrac{x+y}{2}+\tfrac{1}{2^{n+2}}))=$$

$$=\tau(\tau(f(x-\tfrac{1}{2^{n+1}}),f(y)),\ \tau(f(x+\tfrac{1}{2^{n+1}}),f(y)))=$$

$$=\tau(\tau(f(x-\tfrac{1}{2^{n+1}}),\ f(x+\tfrac{1}{2^{n+1}})),f(y))=$$

$$=\tau(f(x),f(y)).$$

Это завершает доказательство соотношения (2) для всех точек x и y из X.

Продолжим построенную функцию f на весь отрезок $[0,1]$, полагая

$$f(x^*)=\sup\{f(x):x\leq x^*,\quad x\in X\},$$

где $x^*\in[0,1]$. Учитывая условие 3^0, нетрудно проверить, что полученная функция $f:[0,1]\longrightarrow[\alpha,\beta]$ является непрерывной и строго возрастающей. Кроме того, она удовлетворяет условию (2) при всех x и y из $[0,1]$. А это означает, что отвечающая ей функция τ_f совпадает с исходной функцией $\tau:T\times T\longrightarrow R$. Из приведенного построения следует также, что на $[0,1]$ существует единственная непрерывная строго возрастающая функция, обладающая указанными свойствами.

Для доказательства справедливости теоремы в случае произвольного связного множества $T \subset R$ заметим, что для любых отрезков $[\alpha,\beta] \subset T$ и $[a,b] \subset R$, где $\alpha \neq \beta$ и $a \neq b$, также существует единственная непрерывная строго возрастающая функция $\varphi : [a,b] \longrightarrow [\alpha,\beta]$, для которой τ_φ совпадает с сужением исходной функции τ на $[\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta]$. Указанная функция связана с построенной выше функцией $f:[0,1] \to$ $\to [\alpha,\beta]$ тривиальным соотношением

$$\varphi((1-x)a+xb) = f(x), \quad x \in [0,1].$$

Из сказанного ясно, что для любых $\alpha_1 \leq \alpha < \beta \leq \beta_1$ из T и любого $[a,b] \subset R$ единственным образом определяются $a_1 \leq a < b \leq b_1$ и такие непрерывные строго возрастающие функции $\varphi : [a,b] \longrightarrow [\alpha,\beta]$ и $\varphi_1 : [a_1,b_1] \longrightarrow [\alpha_1,\beta_1]$, что

$$\varphi(x) = \varphi_1(x), \qquad x \in [a,b],$$

причем

$$\tau_\varphi = \tau \quad \text{на } [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta], \quad \tau_\varphi = \tau \quad \text{на } [\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_1,\beta_1].$$

Но тогда построенная функция $\varphi : [a,b] \longrightarrow [\alpha,\beta]$ единственным образом распространяется до искомой непрерывной строго возрастающей функции f, для которой $T_f = T$, $\tau_f = \tau$. Это завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть характеристика τ_f квазивыпуклой функции f со связной областью значений T удовлетворяет условиям I°, 2°, 3°. Тогда найдется такая вещественнозначная непрерывная строго возрастающая функция u, определенная на T, что суперпозиция $u \circ f$ является выпуклой функцией. При этом характеристики τ_f и $\tau_{u^{-1}}$ совпадают.*

В заключение заметим, что сопоставленная каждой квазивыпуклой функции f вспомогательная функция (I), вообще говоря, не является монотонной по большему из своих аргументов. В связи с этим в ряде случаев полезно вместо нее использовать функцию

$$\bar{\tau}_f(t,t') = \sup\left\{ f\left(\frac{x+y}{2}\right) : f(x) \leq t,\ f(y) \leq t' \right\},$$

которая уже, очевидно, является монотонной.

Автор считает приятным долгом выразить свою благодарность Г.Ш.Рубинштейну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

I. Fenhel W. Convex Cones, Sets and Functions. Princeton, 1953.

2. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Характеристика насыщения класса выпуклых функций. - В кн.: Оптимизация. Вып. 9. Новосибирск, 1972, с. 165-180.

Поступила в ред.-изд. отдел
12. II. 1975 г.