УДК 519.3

ВЫПУКЛАЯ ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.П.Дармахеев

В настоящей работе предлагается специальный метод решения выпуклой задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями, квадратичная форма которой приведена к сумме квадратов. Показывается, что такая структура задачи позволяет за счёт некоторого усложнения логики известного алгоритма [I] снизить размер матриц, участвующих в процессе, и тем самым повысить размерность решаемых задач. Ранее экономный алгоритм был построен для случая невырожденной квадратичной формы, приведенной к сумме квадратов [3]. В предлагаемой статье рассмотрен общий случай.

Пусть требуется определить столбец $x(N)=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, минимизирующий величину

$$f(x)=p(N)x(N)+\frac{1}{2}x^T(N_1)\cdot x(N_1)$$

при условиях

$$A(M,N)x(N)=b(M),\quad x(N)>0, \qquad (I)$$

где $N=\{1,2,\dots,n\}$, $N_1=\{1,2,\dots,n_1\}$, $M=\{1,2,\dots,m\}$, $p(N)$ - строка, $b(M)$ - столбец, а $A(M,N)$ - матрица с соответствующими номерами строк и столбцов. При этом $n_1 \leq n$, а значок "T" означает транспонирование. В общей схеме метода последовательного улучшения [I, 2] к началу очередного шага известна некоторая допустимая, т.е. удовлетворяющая условиям (I), точка $x(N)$. Также известно такое множество $\mathcal{J}$, что $\{j\in N: x_j>0\}\subset \mathcal{J}\subset N$, и ранг матрицы $A(M,\mathcal{J})$ равен m. Разобьём множество $\mathcal{J}$ на два подмножества: $\mathcal{J}=\mathcal{J}'\cup\mathcal{J}''$, где $\mathcal{J}'=\mathcal{J}\cap N_1$, $\mathcal{J}''=\mathcal{J}\cap(N\setminus N_1)$, причём можно считать, что столбцы матрицы $A^1(M,\mathcal{J}'')$ линейно-независимы [2].

В методе последовательного улучшения для квадратичной функции начальная для каждого шага точка $x(N)$ доставляет минимум функции $f(x)$ на аффинном многообразии

$$L(\mathcal{J})=\{x(N): A(M,\mathcal{J})x(\mathcal{J})=b(M),\ x(N\setminus\mathcal{J})=0\},$$

нахождение которого введением строки множителей Лагранжа $y(M)=(y_1,y_2,\dots,y_m)$ сводится к решению следующей системы:

$$\begin{aligned}
&A(M,\mathcal{J})x(\mathcal{J})=b(M),\\
&y(M)A(M,\mathcal{J}')-x^T(\mathcal{J}')=p(\mathcal{J}'),\\
&y(M)A(M,\mathcal{J}'')\qquad\quad\;\, =p(\mathcal{J}'').
\end{aligned}\tag{2}$$

Ранг матрицы $A(M,\mathcal{J}'')$ равен $|\mathcal{J}''|$ (числу элементов множества $\mathcal{J}''$), и поэтому можно выбрать такое множество $I^\circ\subset M$, состоящее из $|\mathcal{J}''|$ элементов, что квадратная матрица $A(I^\circ,\mathcal{J}'')$ будет неособенной. Это позволяет выразить $y(I^\circ)$ и $x(\mathcal{J}')$ через $y(I)$, где $I=M\setminus I^\circ$. Обозначив через $D(\mathcal{J}'',I^\circ)$ матрицу, обратную к матрице $A(I^\circ,\mathcal{J}'')$, получим $y(I^\circ)=(p(\mathcal{J}'')-y(I)A(I,\mathcal{J}''))D(\mathcal{J}'',I^\circ)$. Если теперь положить

$$Q(\mathcal{J}',I)=A^T(\mathcal{J}',I)-A^T(\mathcal{J}',I^\circ)D^T(I^\circ,\mathcal{J}'')A^T(\mathcal{J}'',I),\tag{3}$$

то из системы (2) найдём

$$x(\mathcal{J}')=-p^T(\mathcal{J}')+A^T(\mathcal{J}',I^\circ)D^T(I^\circ,\mathcal{J}'')p^T(\mathcal{J}'')+Q(\mathcal{J}',I)y^T(I).\tag{4}$$

Подставив найденное выражение $x(\mathcal{J}')$ в первую группу уравнений системы (2), найдём

$$\begin{aligned}
&A(M,\mathcal{J}'')x(\mathcal{J}'')+A(M,\mathcal{J}')\,Q(\mathcal{J}',I)\,y^T(I)=\\
&=b(M)+A(M,\mathcal{J}')\left[p^T(\mathcal{J}')-A^T(\mathcal{J}',I^\circ)\,D^T(I^\circ,\mathcal{J}'')\,p^T(\mathcal{J}'')\right].
\end{aligned}\tag{5}$$

Мы получили систему из m уравнений относительно m неизвестных $w=(x^T(\mathcal{J}''),\ y(I))^T$. Положив

$$B=\left[A(M,\mathcal{J}'')\,|\,A(M,\mathcal{J}')\cdot Q(\mathcal{J}',I)\right],$$
$$\beta=b(M)+A(M,\mathcal{J}')\left[p^T(\mathcal{J}')-A^T(\mathcal{J}',I^\circ)D^T(I^\circ,\mathcal{J}'')p^T(\mathcal{J}'')\right],$$
систему (5) запишем в виде $Bw=\beta$.

Рассмотрим подробно один шаг процесса решения.

1^0. Предположим, что на очередном шаге матрица B оказалась неособенной и известна матрица B^{-1}. Пусть также известны решение системы (5) и матрица $D(\mathcal{J}'',I^\circ)$, причем $x(\mathcal{J}'')$ и $x(\mathcal{J}')$ неотрицательны. Здесь $x(\mathcal{J}')$ получается из $y(I)$ согласно (4). По общей схеме метода последовательного улучшения надо проверить выполнение условий оптимальности $y(M)\cdot A(M,N\setminus\mathcal{J})\leqslant p(N\setminus\mathcal{J})$. Если эти неравенства выполнены, то текущий столбец $x(N)$ оптимальный. В противном случае, определив некоторое j_0, для которого $\Delta=y(M)A(M,j_0)-p(j_0)>0$, и приняв $\tilde{\mathcal{J}}=\mathcal{J}\cup\{j_0\}$, мы должны перейти к следующему шагу метода.

2^0. При расширении $\mathcal{J}$ к матрице системы (2) добавляются строка и столбец. Выясним, в каком случае новая система (2) останется неособенной. Особенность системы означала бы, что найдутся строка $\lambda(M)$ и столбец $\mu(\tilde{\mathcal{J}})$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$A(M,\tilde{\mathcal{J}})\mu(\tilde{\mathcal{J}})=0, \tag{6}$$
$$\lambda(M)A(M,\mathcal{J}')-\mu^T(\mathcal{J}')=0,\quad \lambda(M)A(M,\mathcal{J}'')=0, \tag{7}$$
$$\lambda(M)A(M,j_0)-c_{j_0}\mu(j_0)=0. \tag{8}$$

Здесь $c_{j_0}=0$ при $j_0>n_1$ и $c_{j_0}=1$ при $j_0\leqslant n_1$. Из (7) получим

$$\mu(\mathcal{J}')=Q(\mathcal{J}',I)\lambda^T(I). \tag{9}$$

Так как $\mu(j_0)\neq 0$, то $\lambda(M)$ и $\mu(\tilde{\mathcal{J}})$ можно нормировать условием $\mu(j_0)=1$. Подставляя найденное выражение для $\mu(\mathcal{J}')$ в (6), получим $B\cdot(\mu^T(\mathcal{J}''),\ \lambda(I))^T=-A(M,j_0)$, откуда

$$\mu(\mathcal{J}'')=-B^{-1}(\mathcal{J}'',M)A(M,j_0);\ \lambda^T(I)=-B^{-1}(I,M)A(M,j_0). \tag{10}$$

Положим $\gamma=c_{j_0}-\lambda(M)A(M,j_0)=c_{j_0}+\mu^T(\mathcal{J}')\mu(\mathcal{J}')\geqslant 0$. Если $\gamma=0$, то найденные $\lambda(M)$ и $\mu(\tilde{\mathcal{J}})$ удовлетворяют всем условиям (6-8). Это значит, что функция f не достигает минимума на аффинном многообразии $L(\tilde{J})$. Вектор $g(N)$, определяющий направление убывания функции f вдоль $L(\tilde{J})$, имеет вид

$$g(\tilde{J})=\mu(\tilde{J}), \quad g(N\setminus\tilde{J})=0.$$

Если $\tau\neq 0$, то матрица системы (2) при замене J на $\tilde{J}$ неособенная и функция f на аффинном многообразии $L(\tilde{J})$ достигает в точке $x+(\Delta\setminus\tau)\cdot g$ минимума [1].

Таким образом, в обоих случаях нужно смещаться из точки x в направлении вектора g. Далее, следует определить

$$t_0=\min\left\{\frac{\Delta}{\tau},\min_{g(j)<0}\frac{x(j)}{-g(j)}\right\}.$$

Если $g(N)\geqslant 0$ и $\tau=0$, то $t_0=+\infty$ и функция f не ограничена снизу на допустимом множестве. В противном случае получаем новые векторы $\tilde{y}(M)=y(M)+t_0\lambda(M)$, $\tilde{x}(N)=x(N)+ t_0 g(N)$. Возможны два случая:

I. Если $t_0=\Delta/\tau$, то полагаем $\bar{J}=\tilde{J}$. В этом случае $\tilde{x}$ доставляет минимум функции f на аффинном многообразии $L(\bar{J})$ и процесс может быть повторен, начиная с п. I^0. Следует лишь предварительно получить новые матрицы D и B^{-1} (их будем обозначать через $\bar{D}$ и $\bar{B}^{-1}$). Рассмотрим отдельно случаи $j_0 < n_1$ и $j_0 > n_1$.

а) Если $j_0\leqslant n_1$, то $\bar{J}''=J''$ и матрица $D=A^{-1}(I^0,J'')$ не изменяется. Так как $\bar{J}'=J'\cup\{j_0\}$, то

$$\begin{aligned}\bar{B}&=[A(M,J'')\,|\,A(M,J'\cup\{j_0\})Q(J'\cup\{j_0\},I)]=\\&=[A(M,J'')\,|\,A(M,J')Q(J',I)+0(M,J'')\,|\,A(M,j_0)Q(j_0,I)]=\\&=B+uv,\end{aligned}$$

где столбец $u=A(M,j_0)$, $v=[0(J''),Q(j_0,I)]$, а $0(\ldots)$ обозначает нулевую матрицу, строку или столбец с указанным в скобках набором индексов. Таким образом, $\bar{B}$ получается из B прибавлением матрицы ранга один, и $\bar{B}^{-1}$ можно получить по методу пополнения (см. [4], с. 210-211):

$$\bar{B}^{-1}=B^{-1}-\frac{B^{-1}uvB^{-1}}{1+vB^{-1}u}=B^{-1}-\frac{B^{-1}uvB^{-1}}{\tau}.$$

б) Если $j_0 > n_1$, то $\bar{J}' = J'$, $\bar{J}'' = J'' \cup \{j_0\}$, и совокупность $\{A(M, j), j \in \bar{J}''\}$ остаётся линейно-независимой ввиду условия $\gamma \neq 0$. Множество I° нужно расширить на некоторый элемент $i' \in I$ таким образом, чтобы квадратная матрица $A(I^\circ \cup \{i'\}, J'' \cup \{j_0\})$ оказалась неособенной. Это будет тогда, когда величина

$$\alpha = A(i', j_0) - A(i', J'') D(J'', I^\circ) A(I^\circ, j_0) \tag{11}$$

отлична от нуля. Итак, в качестве номера i' можно взять номер наибольшего по модулю элемента в строке

$$Q(j_0, I) = A^T(j_0, I) - A^T(j_0, I^\circ) D^T(I^\circ, J'') A^T(J'', I),$$

которая отлична от нуля, так как в рассматриваемом случае $\gamma = -Q(j_0, I)\lambda^T(I) \neq 0$.

Пусть $\bar{I}^\circ = I^\circ \cup \{i'\}$, $\bar{I} = I \setminus \{i'\}$. Теперь надо пересчитать матрицу D. Если $A(i', J'') = v$, $A(I^\circ, j_0) = u$, то

$$A(\bar{I}^\circ, \bar{J}'') = \begin{pmatrix} A(I^\circ, J'') & u \\ v & A(i', j_0) \end{pmatrix}.$$

По формулам метода окаймления (см. [4], с. 199-200),

$$\bar{D}(\bar{J}'', \bar{I}^\circ) = A^{-1}(\bar{I}^\circ, \bar{J}'') = \begin{pmatrix} D + \frac{D u v D}{\alpha} & -\frac{D u}{\alpha} \\ -\frac{v D}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где α получается по формуле (11). Остаётся пересчитать матрицу B^{-1}. В соответствии с разбиением матрицы B на две части $B = [A(M, J'') \mid A(M, J') \, Q(J', I_1)]$, будем её столбцы обозначать через B_1^j, $j \in J''$, и B_2^i, $i \in I$. Аналогично этому матрица B^{-1} разобьется на две матрицы: $F_1 = F_1(J'', M)$ и $F_2 = F_2(I, M)$. Поскольку

$$\bar{B} = [A(M, \bar{J}'') \mid A(M, J')(A^T(J', \bar{I}) - A^T(J', \bar{I}^\circ)\bar{D}^T(\bar{I}^\circ, \bar{J}'')A^T(\bar{J}'', \bar{I}))],$$

то, используя (12), получим $A(\bar{I}, \bar{J}'')\bar{D}(\bar{J}'', \bar{I}^\circ)A(\bar{I}^\circ, J') = A(\bar{I}, J'')D(J'', I^\circ)A(I^\circ, J') + \frac{1}{\alpha} Q^T(\bar{I}, j_0) Q^T(i', J')$, и, следовательно, матрица $\bar{B}$ получается из матрицы B заменой в ней столбца $B_2^{i'}$ на столбец $A(M, j_0)$ и последующим добавлением матрицы ранга один. Таким образом, матрицу $\bar{B}^{-1}$ можно получать из B^{-1} в два этапа, используя формулы метода пополнения. Но может оказаться, что промежуточная матрица особенная или близка к ней, и такой путь пересчёта становится невозможным. Следующий приём пересчёта матрицы B^{-1} позволяет обойти эту трудность. Расширим матрицу B до матрицы

$$\tilde{B}=\left(\begin{array}{c|c} B & A(M,j_0) \\ \hline 0(\mathcal{J}'') \mid Q(j_0,I) & 0 \end{array}\right).$$

Матрица $\tilde{B}$ неособенная, так как $Q(j_0,I)F_2(I,M)A(M,j_0)=\tau\neq 0$. По формулам метода окаймления найдём

$$\tilde{B}^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} B^{-1}-\frac{1}{\tau}B^{-1}A(M,j_0)Q(j_0,I)F_2(I,M) & \frac{1}{\tau}B^{-1}A(M,j_0) \\ \hline -\frac{1}{\tau}Q(j_0,I)F_2(I,M) & -\frac{1}{\tau} \end{array}\right).$$

Покажем, что матрицу $\bar{B}^{-1}$ можно получить из $\tilde{B}^{-1}$ вычеркиванием последнего столбца и строки, отвечающей номеру i'. Действительно, матрица $\bar{B}$ получается вычеркиванием в матрице $\hat{B}=\tilde{B}-\frac{1}{\alpha}\tilde{B}_2^{i'}(\tilde{B}_{j_0}-\ell_{i'})$ последней строки и столбца, отвечающего индексу i', здесь через $\tilde{B}_{j_0}$ обозначена последняя строка матрицы $\tilde{B}$, а через $\ell_{i'}$ – единичный орт-строка с единицей на том месте, на котором в матрице B стоит столбец $B_2^{i'}$. Найдём $\hat{B}^{-1}$ по методу пополнения. Так как

$$1-\frac{1}{\alpha}(\tilde{B}_{j_0}-\ell_{i'})\tilde{B}^{-1}\tilde{B}_2^{i'}=1-\frac{1}{\alpha}(\tilde{B}_{j_0}-\ell_{i'})\ell^{i'}=1-\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)=\frac{1}{\alpha},$$

то $\hat{B}^{-1}=\tilde{B}^{-1}+\tilde{B}^{-1}\tilde{B}_2^{i'}(\tilde{B}_{j_0}-\ell_{i'})\tilde{B}^{-1}=\tilde{B}^{-1}+\ell^{i'}(\ell_{j_0}-\tilde{B}^{-1}_{i'})$.

Отсюда видно, что матрица $\hat{B}^{-1}$ отличается от $\tilde{B}^{-1}$ лишь в строке, отвечающей номеру i', и что $\hat{B}^{-1}_{i'}=\tilde{B}^{-1}_{i'}-\tilde{B}^{-1}_{i'}+\ell_{j_0}=\ell_{j_0}$. Отсюда и следует доказываемое утверждение.

П. Если $t_0=\frac{x(j')}{-g(j')}<\frac{\Delta}{\tau}$, то элемент j' исключается из множества $\mathcal{J}$, и вместо него добавляется номер j_0, т.е. в этом случае $\bar{\mathcal{J}}=(\mathcal{J}\setminus\{j'\})\cup\{j_0\}$. Номер j' может принадлежать либо первой группе ($j'\leq n_1$), либо второй ($j'>n_1$). Рассмотрим отдельно эти возможности.

1. Пусть $j' \leq n_1$. Положим $\tilde{J} = J \setminus \{j'\}$. Тогда $\tilde{J}'' = J''$, а $\tilde{J}' = J' \setminus \{j'\}$. Матрица $\mathcal{D}$ останется прежней, а вместо B получим матрицу

$$\tilde{B} = A(M, J'')\ A(M, \tilde{J}')Q(\tilde{J}', I) =$$

$$= A(M, J'')\ A(M, J')Q(J' I) - [0(M, J'')|A(M, j')Q(j', I)] =$$

$$= B - [0(M, J'')|A(M, j')Q(j', I)].$$

Матрица $\tilde{B}$ неособенная тогда и только тогда, когда

$$\gamma = 1 - Q(j' I)F_2(I, M)A(M, j') = 0. \qquad (13)$$

Если это условие выполнено, то, получив матрицу $\tilde{B}^{-1}$ по методу пополнения, процесс можно возобновить, начиная с п. 2^0. В противном случае [1] функция f достигает минимума на $L(\tilde{J})$ в полученной точке $\tilde{x}(N)$ и надо найти матрицы $\mathcal{D}$ и B^{-1} для $\tilde{J} = (J \cup \{j_0\}) \setminus \{j'\}$. Так как $\tau = c_{j_0} + \mu^T(J')\mu(J') > c_{j_0} + g^2(j') > 0$, то можно сначала осуществить преобразования матриц $\mathcal{D}$ и B^{-1}, соответствующие добавлению j_0 к множеству J, а затем уже преобразования, связанные с исключением элемента j'. После этого можно вернуться к пункту I^0.

Может оказаться, что хотя условие (13) и выполняется, значение γ мало, и вычислять матрицу $\tilde{B}^{-1}$ нецелесообразно, поскольку $\tilde{B}$ близка к особенной. В этом случае можно поступить так же, как и в случае $\gamma = 0$, т.е. сначала осуществить пересчёт матриц $\mathcal{D}$ и B^{-1} для множества $J \cup \{j_0\}$, а потом для $\tilde{J}$. Такой путь возможен потому, что функция f достигает минимума на $L(\tilde{J})$ [5]. Теперь, однако, минимум не обязательно лежит в $\tilde{x}(N)$. Если точка минимума допустимая, то можно вернуться к пункту I^0. В противном случае из точки $\tilde{x}(N)$ следует перемещаться по направлению к точке минимума f на $L(\tilde{J})$ на максимально возможную величину. После этого можно вернуться к П.

2. Если $j' > n_1$, то $\tilde{J} = J \setminus \{j'\}$, $\tilde{J}' = J'$, а $\tilde{J}'' = J''_{\tilde{0}} \setminus \{j'\}$. Выберем $i' \in I^0$ из условия $\mathcal{D}(j', i') \neq 0$ и положим $\bar{I}^0 = I^0 \setminus \{i'\}$. Тогда $\tilde{\mathcal{D}}(\tilde{J}'', \bar{I}^0) = \mathcal{D}(\tilde{J}'', \bar{I}^0) - \mathcal{D}(\tilde{J}'', i')\mathcal{D}(j', \bar{I}^0)/\mathcal{D}(j', i')$.

Отсюда непосредственной проверкой можно получить, что соответствующая матрица $\tilde{B}$ есть результат следующих преобразований матрицы B:

) столбец $A(M, j')$ заменяется на $v - A(M, J')A^T(J', I^0)\mathcal{D}^T(I^0, j')/\mathcal{D}(j', i')$;

2) прибавляется следующая матрица ранга один:

$v\cdot|0(\mathcal{J}''),\mathcal{D}^T(i',\mathcal{J}'')A^T(\mathcal{J}'',I)|\cdot$

Пусть $\hat{B}$ - матрица, получаемая в результате выполнения первого пункта, т.е. $\hat{B}=B+[v-A(M,j')]\cdot[l_{j'}(\mathcal{J}''),0(I)]$. Матрица $\hat{B}$ неособенная тогда и только тогда, когда $F_1(j',M)v\neq 0$. В этом случае $\hat{B}^{-1}=B^{-1}-B^{-1}(v-A(M,j'))l_{j'}(\mathcal{J}'')F_1(\mathcal{J}'',M)/(F_1(j',M)v=$

$=B^{-1}-B^{-1}vF_1(j',M)/(F_1(j',M)v)+\frac{[l_{j'}(\mathcal{J}''),0(I)]^T F_1(j',M)}{F_1(j',M)v}$. Так как $\tilde{B}=\hat{B}+v\cdot[0(\mathcal{J}''),\mathcal{D}^T(i',\mathcal{J}'')A^T(\mathcal{J}'',I)]$ и $1+0(\mathcal{J}''),\mathcal{D}^T(i',\mathcal{J}'')\times$ $\times A^T(\mathcal{J}'',I)\hat{B}^{-1}v=1+[0(\mathcal{J}''),\mathcal{D}^T(i',\mathcal{J}'')A^T(\mathcal{J}'',I)]\cdot[B^{-1}v-B^{-1}v+$ $+[l_{j'}(\mathcal{J}''),0(I)]^T]=1$, матрица $\tilde{B}$ неособенная, если только неособенна $\hat{B}$, т.е. если

$$\tilde{\gamma}=F_1(j',M)A(M,\mathcal{J}')A^T(\mathcal{J}',I^\circ)\mathcal{D}^T(I^\circ,j')\neq 0. \qquad (14)$$

Итак, если $\tilde{\gamma}\neq 0$, то, получив матрицу $\tilde{B}^{-1}$, процесс можно возобновить с п. 2^0. В противном случае матрица $\tilde{B}$ особенная и функция f в точке $\tilde{x}(N)$ достигает на $L(\{j_0\}\cup(\mathcal{J}\setminus\{j'\}))$ минимума [1]. Поэтому необходимо найти матрицы $\mathcal{D}$ и B^{-1} для нового множества $\bar{\mathcal{J}}=\{j_0\}\cup(\mathcal{J}\setminus\{j'\})$. Рассмотрим отдельно два возможных случая:

а) Если $\gamma>0$, то, получив матрицу B для множества $\mathcal{J}\cup\{j_0\}$, можно перейти к преобразованиям матриц $\mathcal{D}$ и B^{-1}, связанным с удалением номера j', как это было сделано выше для случая $\tilde{\gamma}\neq 0$.

б) Если $\gamma=0$ и, следовательно, $j_0>n_1$, то $\bar{\mathcal{J}}''=$ $=(\mathcal{J}''\cup\{j_0\})\setminus\{j'\}$; $\bar{\mathcal{J}}'=\mathcal{J}'$; $\tilde{\mathcal{J}}''=\mathcal{J}''\setminus\{j'\}$. Покажем, что в качестве нового множества $\bar{I}^\circ$ для $\bar{\mathcal{J}}''$ можно взять прежнее множество I°, для чего надо показать, что матрица $A(I^\circ,\bar{\mathcal{J}}')$ неособенная. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{D}(j',I^\circ)\times$ $\times A(I^\circ,j_0)\neq 0$. Но при $\gamma=0$ имеем $\mu(\mathcal{J}')=0$, и поэтому $A(I^\circ,j_0)=-A(I^\circ,\mathcal{J}'')\mu(\mathcal{J}'')$. Тогда $\mathcal{D}(j',I^\circ)A(I^\circ,j_0)=-\mathcal{D}(j',I^\circ)\times$ $\times A(I^\circ,j'')\mu(\mathcal{J}'')=-g(j')>0$. Новая матрица $\bar{\mathcal{D}}$ получается по формуле $\bar{\mathcal{D}}=\mathcal{D}-\mathcal{D}(\mathcal{J}'',I^\circ)[A(I^\circ,\mathcal{J}^\circ)-A(I^\circ,j')]\mathcal{D}(j',I^\circ)/$ $/-\mu(j')=\mathcal{D}-\frac{\mu(\mathcal{J}'')\mathcal{D}(j',I^\circ)}{\mu(j')}-\frac{l^{j'}\mathcal{D}(i,I^\circ)}{\mu(j')}$. Учитывая, что

$B=[A(M,\tilde{\mathcal{J}}'')|A(M,j')|A(M,\mathcal{J}')(A^T(\mathcal{J}',I)-A^T(\mathcal{J}',I^\circ)\mathcal{D}^T(I^\circ,\mathcal{J}'')A^T(\mathcal{J}'',I))]$,

$\bar{B}=[A(M,\bar{J}'')|A(M,j_0)|A(M,J')(A^T(J',I)-A^T(J',I^0)\bar{\mathcal{D}}^T(I^0,\bar{J}'')A^T(\bar{J}'',I))]$, выразим $\bar{B}$ через B. Поскольку $A(I,\bar{J}'')\bar{\mathcal{D}}(\bar{J}'',I^0) =$

$$=A(I,\bar{J}'')[\mathcal{D}(J'',I^0)-\mu(J'')\mathcal{D}(j',I^0)/\mu(j')-l^{j'}\mathcal{D}(j',I^0)/\mu(j')] =$$

$$=A(I,J''\setminus\{j'\})\mathcal{D}(J''\setminus\{j'\},I^0)-A(I,J''\setminus\{j'\}\cdot\mu(J''\setminus\{j'\}\times$$

$$\times\mathcal{D}(j',I^0)/\mu(j')-A(I,j_0)\mathcal{D}(j',I^0)/\mu(j') =$$

$= A(I,J'')\mathcal{D}(J'',I^0)$, то матрица $\bar{B}$ получается из B, заменой столбца $A(M,j')$ столбцом $A(M,j_0)$. Поэтому $\bar{B}^{-1}$ можно получить из B^{-1} по обычным формулам метода пополнения.

Относительно характера выполнения условия (I4) можно сказать то же, что говорилось выше по отношению к условию (I3) при $j' \leqslant n_1$. Если $\tilde{\gamma}$ мало, то можно поступить так же, как и в случае $\tilde{\gamma}=0$, т.е. сначала осуществляем пересчёт матриц $\mathcal{D}$ и B^{-1} для множества $\tilde{J}=J\cup\{j_0\}$, а потом для $\bar{J}$.

Завершая рассмотрение алгоритма, остановимся на вопросе получения начального вектора w, множества J и матриц $\mathcal{D}(J'',I^0)$ и B^{-1}. Рассмотрим следующую задачу:

$$Ax+Ez=b,\quad x\geqslant 0,\quad z\geqslant 0, \tag{I5}$$

$$\min\,(f(x)+(L,z)), \tag{I6}$$

где $z=(x_{n+1},x_{n+2},\dots,x_{n+m})$; E – единичная матрица размером $m\times m$; L – вектор, состоящий из достаточно больших положительных компонент, дающих уверенность в том, что в точке минимума $[\bar{x},\bar{z}]$ функции $f(x)+(L,z)$, если система (I) совместна, $\bar{z}=0$. При этом считаем, что $b\geqslant 0$. Начальная информация для задачи (I5–I6) получается довольно просто:

$$J=\{n+1,n+2,\dots,n+m\},\ J''=J,\ J'=\{\emptyset\},\ I^0=\{1,2,\dots,m\},$$

$$I=\{\emptyset\},\ \mathcal{D}(J'',I^0)=E,\ B^{-1}=E,\quad w=(b_1,b_2,\dots,b_m).$$

Итак, для решения исходной задачи вышеизложенный алгоритм можно применить не к ней самой, а к эквивалентной ей задаче (I5 - I6).

В заключение отметим, что рассмотренная задача возникает, например, при решении задачи сепарабельного программирования (с минимизируемой функцией $\varphi(x)=\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\dots+\varphi_n(x_n)$) методом Ньютона.

Литература

1. ШМЫРЁВ В.И. Об алгоритмах метода последовательного улучшения для квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22). Новосибирск, 1972, с. 133-157.
2. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задач выпуклого программирования с линейными ограничениями методом последовательного улучшения допустимого вектора. - "Докл. АН СССР", 1963, т. 150, № 2, с. 231-234.
3. БУЛАВСКИЙ В.А. Один специальный алгоритм квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация, Вып. 5(22). Новосибирск. 1972, с. 23-36.
4. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, изд. 2-е, 1963.
5. БУЛАВСКИЙ В.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Метод последовательного улучшения для выпуклых задач с линейными ограничениями. - В кн.: Оптимизация, Вып. 5(22). Новосибирск, 1972, с.37-62.

Поступила в ред.-изд. отд.
10.IУ. 1975 г.