УДК 519.3

ПРОЦЕДУРА НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПОВ РОСТА В МОДЕЛИ НЕЙМАНА

В.И.Шмырёв

Для определения темпов роста и оптимальных векторов модели Неймана в работе [I] был предложен процесс последовательных приближений, сходящийся при некоторых предположениях (условия регулярности) со скоростью геометрической прогрессии. Аналогичный процесс был независимо предложен в [2]. При реализации одного шага в каждом из этих процессов требуется решать некоторую задачу линейного программирования. В настоящей заметке показывается, что если решение этих задач проводить по вычислительной схеме метода последовательного улучшения с использованием обратных матриц (модифицированная схема симплекс-метода), то незначительным усложнением процесса [I] можно получить более быстро сходящуюся процедуру.

Пусть модель задается матрицами $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$ размером $m\times n$, которые неотрицательны и удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование технологического и экономического темпов роста модели:

$$\max_j a_{ij}>0,\ i=1,\dots,m,$$

$$\max_i a_{ij}>0,\ j=1,\dots,n.$$

Пусть $\bar{\alpha}$ - технологический темп роста, т. е. максимальное среди таких α, при которых существуют неотрицательные и отличные от нулевого решения системы неравенств

$$\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}-\alpha a_{ij})x_i \geqslant 0,\ j=1,\dots,n.$$

Процесс [I] состоит в последовательном уточнении оценки сверху для $\bar{\alpha}$. Для уточнения $\lambda_k > \bar{\alpha}$ фиксируется $\lambda = \lambda_k$ и решается следующая задача линейного программирования: минимизировать величину z при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}-\lambda a_{ij})x_i + z \geqslant 0,\ j=1,\dots,n,\\ &\sum_{i=1}^{m} x_i = 1\ ,\\ &x_i \geqslant 0\ ,\ i=1,\dots,m. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Если в оптимальном решении этой задачи значение величины z равно нулю, то тем самым $\lambda_k = \bar{\alpha}$. В противном случае для получения λ_{k+1} используется решение двойственной задачи, состоящей в максимизации величины ρ, при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\rho + \sum_{j=1}^{n}\pi_j(b_{ij}-\lambda a_{ij}) \leqslant 0,\ i=1,\dots,m,\\ &\sum_{j=1}^{n}\pi_j = 1,\\ &\pi_j \geqslant 0, j=1,\dots,n. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Именно, принимается

$$\lambda_{k+1} = \max_i \frac{(\pi^k; B^i)}{(\pi^k; A^i)},$$

где вектор $\pi^k = (\pi_1^k,\dots,\pi_n^k)$ вместе с числом ρ^k образует решение двойственной задачи, а B^i и A^i - строки матриц B и A : $B^i = (b_{i1},\dots,b_{in})$, $A^i = (a_{i1},\dots,a_{in})$. При этом будет $\rho^k > 0$, и потому $\bar{\alpha} \leqslant \lambda_{k+1} < \lambda_k$.

Предлагаемая модификация этого процесса, обеспечивающая для некоторого класса моделей более быструю сходимость, состоит в следующем.

Пусть $D_k(\lambda)$ - матрица оптимального базиса задачи (I) при $\lambda = \lambda_k$. Позволим теперь параметру λ изменяться. Для определенности будем считать, что z является первой базисной переменной, и рассмотрим вектор-функцию $\eta^k(\lambda) = (\rho^k(\lambda), \pi_1^k(\lambda),\dots,\pi_n^k(\lambda))$, являющуюся решением системы

$$D_k(\lambda)\eta^k(\lambda) = e_1, \quad (4)$$

где $e_1 \in R^{n+1}$ - первый координатный орт. Ясно, что $\eta^k(\lambda)$ - рациональная вектор-функция, а значит, определена везде, за исключением конечного числа значений λ, и бесконечно дифференцируема во всей области определения. При $\lambda = \lambda_k$ имеем $\eta^k(\lambda_k) = (\rho^k, \pi_1^k, \ldots, \pi_n^k)$. Дифференцируя (4), получаем

$$\dot\eta^k(\lambda^k) D_k(\lambda_k) + \eta(\lambda_k)\dot D_k \quad ж)$$

(так как $D_k(\lambda)$ линейно зависит от λ, то $\dot D_k(\lambda)$ - постоянная матрица). Зная $D_k^{-1}(\lambda_k)$, мы можем определить $\dot\eta^k(\lambda_k)$. Введем обозначение $\dot\pi^k = (\dot\pi_1^k(\lambda_k, \ldots, \dot\pi_n^k(\lambda_k))$ и возьмем линейную аппроксимацию вектора $\pi^k(\lambda) = (\pi_1^k(\lambda), \ldots, \pi_n^k(\lambda))$:

$$\hat\pi^k(\lambda) = \pi^k + (\lambda - \lambda_k)\dot\pi^k.$$

Теперь в качестве λ_{k+1} принимаем минимальное значение λ, еще удовлетворяющее условиям

$$\hat\pi_j^k(\lambda) \geq 0 \quad , j = 1, \ldots, m, \qquad (5)$$

$$(B^i - \lambda A^i, \hat\pi^k(\lambda)) \leq 0 \; , \; i = 1, \ldots, n, \qquad (6)$$

при уменьшении λ от λ_k. Если некоторая компонента π_j^k равна нулю, то не нарушая оптимальности полученного решения, можно ввести соответствующий орт в число базисных векторов и, таким образом, можно не ограничивая общности считать, что в этом случае $\pi_j^k(\lambda) = 0$. Поэтому неравенства (5) выполняются не только при $\lambda = \lambda_k$, но и при меньших значениях λ (по крайней мере при значениях λ, достаточно близких к λ_k). Система (6) представляет собой систему квадратичных неравенств, которая при $\lambda = \lambda_k$ переходит в следующую:

$$(B^i - \lambda_k A^i, \pi^k) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m.$$

Если учесть, что ρ^k и π_i^k удовлетворяют (2) и $\rho^k > 0$, то все эти неравенства выполняются как строгие. Следовательно, $\lambda_{k+1} < \lambda_k$.

ж) Для упрощения записи мы наряду с обозначением g' для производной произвольной функции g будем использовать иногда обозначение $\dot g$.

Более точно процедура определения λ_{k+1} заключается в следующем. Для каждого из неравенств (6) определяем ближайший слева к λ_k корень соответствующего квадратного уравнения и выбираем среди таких корней максимальный. Его сравниваем с левым концом интервала решений системы (5), принимая в качестве λ_{k+1} максимальное из этих значений.

Легко видеть, что определенное таким образом λ_{k+1} по-прежнему будет оценкой сверху для $\bar{\alpha}$. Действительно, как отмечалось в [I], для того чтобы определенное по некоторому неотрицательному вектору π минимальное значение λ, удовлетворяющее условиям

$$(\pi, B^i - \lambda A^i) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6'}$$

являлось оценкой сверху для $\bar{\alpha}$, достаточно выполнения неравенств

$$(\pi, A^i) > 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Поэтому если для некоторого $\lambda = \lambda_0$ удовлетворяются системы неравенств (5), (6) и система

$$(\hat{\pi}^k(\lambda), A^i) > 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

то оценкой сверху для $\bar{\alpha}$ будет минимальное λ, удовлетворяющее (6') при $\pi = \hat{\pi}^*(\lambda_0)$, и тем более такой оценкой будет $\lambda = \lambda_0$, т.е. $\lambda_0 \geq \bar{\alpha}$. Но система (7) заведомо выполняется при любом $\lambda_0 \in (\lambda_{k+1}, \lambda_k]$, ибо левые части неравенств этой системы являются линейными функциями от λ, принимающими неотрицательные значения при $\lambda = \lambda_{k+1}$, ввиду (5) и неотрицательности векторов A^i, и строго положительные – при $\lambda = \lambda_k$. Следовательно, любое λ_0 из промежутка $(\lambda_{k+1}, \lambda_k]$ является оценкой сверху для $\bar{\alpha}$. Значит, и $\lambda_{k+1} \geq \bar{\alpha}$.

Таким образом, последовательность λ_k убывает, ограничена снизу величиной $\bar{\alpha}$ и, следовательно, сходится. Но сходится ли λ_k к $\bar{\alpha}$, и если да, то какова скорость сходимости? На первом из этих вопросов мы остановимся позже, а сейчас, предполагая, что $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = \bar{\alpha}$, оценим скорость сходимости, которая будет определяться поведением разности $\lambda_{k+1} - \bar{\alpha}$ при достаточно больших номерах k. При этом возможны две ситуации в зависимости от того, в какой из систем неравенств (5) или (6), находится неравенство, препятствующее уменьшению λ за λ_{k+1}. Такие неравенства будем называть "лимитирующими".

Рассмотрим сначала ситуацию, когда лимитирующее неравенство находится в системе (6), т.е. λ_{k+1} является при некотором $i=i(k)$ корнем квадратного уравнения

$$(\hat{\pi}^k(\lambda), B^i-\lambda A^i)=0,$$

левую часть которого обозначим через $f_{ki}(\lambda)$: $f_{ki}(\lambda)=(\hat{\pi}^k(\lambda), B^i-\lambda A^i)$. Мы покажем, что о величине отклонения λ_{k+1} от $\bar{\lambda}$ с достаточной для наших целей точностью можно судить по разности $\tilde{\lambda}_{k+1}-\bar{\lambda}$, где $\tilde{\lambda}_{k+1}$ - первое приближение к корню функции $f_{ki}(\lambda)$, полученное по методу Ньютона, исходя из начального приближения $\bar{\lambda}$.

I. Для получения $\tilde{\lambda}_{k+1}$ нужно, чтобы $f'_{ki}(\bar{\lambda})\neq 0$. Покажем, что при подходящих ограничениях (условия регулярности) это будет выполнено.

Так как при фиксированном базисе значения базисных неизвестных и двойственных переменных в задаче (I) являются рациональными функциями параметра λ, то множество тех значений λ, при которых данный базис будет оптимальным, является совокупностью конечного числа интервалов. Базис, оптимальный на интервале, примыкающем справа к $\bar{\lambda}$, т.е. на интервале вида $(\bar{\lambda}, a>$, будем называть окончательным. Предполагая единственность окончательного базиса, обозначим через $z(\lambda)$, $x(\lambda)$ и $\rho(\lambda), \pi(\lambda)$ решения соответственно задач (1) и (2), определяемые этим базисом. Ясно, что для достаточно больших значений k будет $\rho^k(\lambda)=\rho(\lambda)$ и $\pi^k(\lambda)=\pi(\lambda)$. Кроме того, $\rho(\bar{\lambda})=z(\bar{\lambda})=0$. Ясно также, что функции $\pi_j(\lambda)$ ($j=1,\dots,n$) определены в точке $\bar{\lambda}$, ибо $\pi_j(\lambda)\leq 1$ на $(\bar{\lambda}, a>$ (рациональная функция определена всюду, кроме точек, являющихся корнями знаменателя; если бы $\bar{\lambda}$ было таким корнем, то $|\pi_j(\lambda)|\xrightarrow[\lambda\to\bar{\lambda}]{}+\infty$). Значит, функции $\pi_j(\lambda)$ бесконечно дифференцируемы при $\lambda=\bar{\lambda}$. То же самое можно сказать о функциях $x_i(\lambda)$ ($i=1,\dots,m$).

Заметим, что $x_{i(k)}$ не обязательно является базисной переменной окончательного базиса, но для достаточно больших значений k

$$(\pi(\bar{\lambda}), B^{i(k)}-\bar{\lambda}A^{i(k)})=0.$$

Действительно, если $i(k)=\hat{i}$ для бесконечного числа значений k, то, рассматривая равенство

$$(\hat{\pi}^k(\lambda_{k+1}), B^{i(k)}-\lambda_{k+1}A^{i(k)})=0$$

лишь для таких значений k и переходя к пределу, ввиду $\lambda_{k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}\bar{\alpha}$ и $\hat{x}^k(\lambda_{k+1})\xrightarrow[k\to\infty]{}\mathfrak{X}(\bar{\alpha})$, получим требуемое.

Таким образом, при всех достаточно больших значениях номера $i(k)$ принадлежат множеству

$$\mathcal{J}_0=\{i\,|\,(\mathfrak{X}(\bar{\alpha}),B^i-\bar{\alpha}A^i)=0\}.$$

Далее, в неравенствах

$$p(\lambda)+(\mathfrak{X}(\lambda),B^i-\lambda A^i)\le 0,\ i=1,\dots,m, \qquad (8)$$

которые выполняются при всех λ из интервала $(\bar{\alpha},a>$, для $i\in\mathcal{J}_0$ и $\lambda=\bar{\alpha}$ будет достигаться равенство. Следовательно, для $i\in\mathcal{J}_0$ производная от левой части (8) в точке $\lambda=\bar{\alpha}$ неположительна, т.е.

$$p'(\bar{\alpha})+(\mathfrak{X}'(\bar{\alpha}),B^i-\bar{\alpha}A^i)-(\mathfrak{X}(\bar{\alpha}),A^i)\le 0$$

или

$$(\mathfrak{X}'(\bar{\alpha}),B^i-\bar{\alpha}A^i)-(\mathfrak{X}(\bar{\alpha}),A^i)\le -p'(\bar{\alpha}). \qquad (9)$$

С другой стороны,

$$f'_{ki}(\bar{\alpha})=(\dot{\mathfrak{X}}^k,B^i-\bar{\alpha}A^i)-(\mathfrak{X}^k,A^i)+(\lambda_k-\bar{\alpha})(\dot{\mathfrak{X}}^k,A^i),$$

и так как для больших значений k справедливо $\mathfrak{X}^k(\lambda)=\mathfrak{X}(\lambda)$, то, принимая во внимание непрерывность функций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}'$ в точке $\bar{\alpha}$, легко видеть, что $f'_{ki}(\bar{\alpha})$ с точностью до бесконечно малых совпадает с левой частью (9).

Остается показать, что при подходящих условиях будет $p'(\bar{\alpha})>0$. Это вытекает из следующих выкладок.

Если $x_i(\lambda)\ne 0$, то

$$p(\lambda)+(\mathfrak{X}(\lambda),B^i-\lambda A^i)=0. \qquad (10)$$

Умножая эти тождества на $x_i(\lambda)$ и складывая, получаем

$$p(\lambda)\sum_i x_i(\lambda)+\sum x_i(\lambda)(\mathfrak{X}(\lambda),B^i-\lambda A^i)=0. \qquad (11)$$

Но $\sum_i x_i(\lambda)=1$, и первое слагаемое - это просто $p(\lambda)$. Теперь, дифференцируя в точке $\bar{\alpha}$, получаем

$$p'(\bar{\alpha})-(\mathfrak{X}(\bar{\alpha}),\sum_i A^i x_i(\bar{\alpha}))+(\mathfrak{X}'(\bar{\alpha}),\sum_i(B^i-\bar{\alpha}A^i)x_i(\bar{\alpha}))+$$

$$+\sum_i(\mathfrak{X}(\bar{\alpha}),B^i-\bar{\alpha}A^i)x'_i(\bar{\alpha})=0. \qquad (12)$$

Из (I0) следует, что последняя сумма равна $-p(\bar{\alpha})\sum_i x_i'(\bar{\alpha})$. Но $\sum_i x_i'(\lambda)\equiv 0$. Так что это слагаемое в (I2) пропадает. Аналогично, если

$$\sum_i (b_{ij}-\bar{\alpha}a_{ij})x_i(\bar{\alpha})+z(\bar{\alpha})>0,$$

то $\pi_j(\lambda)\equiv 0$ и, значит, $\pi_j'(\bar{\alpha})=0$. Кроме того, $\sum_j \pi_j'(\lambda)\equiv 0$. В итоге предпоследнее слагаемое равно $-z(\bar{\alpha})\sum_j \pi_j'(\bar{\alpha})$ и тоже пропадает. Окончательно из (I2) получаем

$$p'(\bar{\alpha})=(\pi(\bar{\alpha}),\sum_i A^i x_i(\bar{\alpha}))$$

или, с учетом (II) при $\lambda=\bar{\alpha}$,

$$p'(\bar{\alpha})=\frac{1}{\bar{\alpha}}(\pi(\bar{\alpha}),\sum_i B^i x_i(\bar{\alpha})). \qquad (I3)$$

Отсюда следует, что неравенство $p'(\bar{\alpha})>0$ будет заведомо выполняться, например, для регулярных моделей, характеризующихся тем свойством, что $\sum_i B^i x_i>0$ для любого оптимального вектора интенсивностей x (т.е. такого, на котором реализуется технологический темп роста модели).

Таким образом, если рассматриваемая модель регулярна, то для интересующих нас номеров $i=i(k)$ обеспечено $f_{ki}'(\bar{\alpha})\neq 0$. Более того, если фиксировать некоторое $\gamma\in(0,1)$, то при всех значениях k, начиная с некоторого K (которое будет зависеть от выбранного γ), можно гарантировать выполнение равномерной (не зависящей от k) оценки снизу для $|f_{ki}'(\bar{\alpha})|$:

$$|f_{ki}'(\bar{\alpha})|\geq m>0, \qquad (I4)$$

где $m=\gamma(\pi(\bar{\alpha}),\sum_{i=1}^{m} A^i x_i(\bar{\alpha}))$.

2. При получении оценки сверху для величины $|\lambda_{k+1}-\bar{\alpha}|$ будем исходить из очевидного неравенства

$$|\lambda_{k+1}-\bar{\alpha}|\leq|\lambda_{k+1}-\tilde{\lambda}_{k+1}|+|\tilde{\lambda}_{k+1}-\bar{\alpha}| \qquad (I5)$$

и оценим каждое из слагаемых правой части.

Обозначим $f_{ki(k)}(\lambda)$ через $f_k(\lambda)$. Тогда

$$f_k(\lambda)=f_k(\bar{\alpha})+f_k'(\bar{\alpha})(\lambda-\bar{\alpha})+\frac{1}{2}f_k''\cdot(\lambda-\bar{\alpha})^2$$

и, по определению λ_{k+1}, имеем $f_k(\lambda_{k+1})=0$, т.е.

$$0=f_k(\bar{x})+f_k'(\bar{x})(\lambda_{k+1}-\bar{x})+\frac{f_k''}{2}(\lambda_{k+1}-\bar{x})^2.$$

После деления на $f_k'(\bar{x})$ получаем

$$0=\frac{f_k(\bar{x})}{f_k'(\bar{x})}+\lambda_{k+1}-\bar{x}+\frac{1}{2}\frac{f_k''}{f_k'(\bar{x})}(\lambda_{k+1}-\bar{x})^2.$$

Учитывая, что $\tilde{\lambda}_{k+1}=\bar{x}-f_k(\bar{x})/f_k'(\bar{x})$, последнее равенство можно переписать так:

$$\tilde{\lambda}_{k+1}-\lambda_{k+1}=\frac{1}{2}\frac{f_k''}{f_k'(\bar{x})}(\lambda_{k+1}-\bar{x})^2. \qquad (16)$$

Но $f_k''=-(x'(\lambda_k),A^{i(k)})$, и, ввиду непрерывности x' в точке $\lambda=\bar{x}$, если учесть, что $\lambda_k\to\bar{x}$, получаем ограниченность сверху величины $|f_k''|$,

$$|f_k''|\le M,$$

причем M не зависит от k.

Теперь из (16) и (14) получаем оценку для первого слагаемого в правой части (15):

$$\left|\lambda_{k+1}-\tilde{\lambda}_{k+1}\right|\le\frac{1}{2}\frac{M}{m}(\lambda_{k+1}-\bar{x})^2.$$

Обозначая $\frac{M}{2m}$ через C_1 и учитывая, что $\lambda_{k+1}<\lambda_k$, окончательно получаем

$$\left|\tilde{\lambda}_{k+1}-\lambda_{k+1}\right|\le C_1(\lambda_k-\bar{x})^2.$$

3. Перейдем теперь к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (15). Имеем

$$\left|\tilde{\lambda}_{k+1}-\bar{x}\right|=\left|\frac{f_k(\bar{x})}{f_k'(\bar{x})}\right|, \qquad (17)$$

и для получения оценки нужно оценить сверху величину $|f_k(\bar{x})|$. Покажем существование такой константы d, что

$$\left|f_k(\bar{x})\right|\le d(\lambda_k-\bar{x})^2. \qquad (18)$$

Для этого достаточно показать, что отношение $f_{ki}(\bar{x})$ к $(\lambda_k-\bar{x})^2$ имеет конечный предел при $k\to\infty$ для любого $i\in J_0$. Учитывая определение множества J_0, можно записать

$$\frac{f_{ki}(\bar{x})}{(\lambda_k-\bar{x})^2}=\frac{(\hat{\mathcal{X}}^k(\bar{x}),B^i-\bar{x}A^i)}{(\lambda_k-\bar{x})^2}=\left(\frac{\hat{\mathcal{X}}^k(\bar{x})-\mathcal{X}(\bar{x})}{(\lambda_k-\bar{x})^2},B^i-\bar{x}A^i\right).$$

Но при достаточно больших k вектор-функция $\hat{\mathcal{X}}^k(\lambda)$ является линейной аппроксимацией для $\mathcal{X}(\lambda)$, поэтому

$$\mathcal{X}_j(\bar{x})=\hat{\mathcal{X}}_j^k(\bar{x})+\frac{1}{2}\mathcal{X}''(\xi_{kj})(\bar{x}-\lambda_k)^2,\ j=1,\dots,n,$$

где $\xi_{kj}\in(\lambda_k,\bar{x})$, а, следовательно, $\xi_{kj}\xrightarrow[k\to\infty]{}\bar{x}$ $(j=1,\dots,n)$.
В итоге

$$\frac{\hat{\mathcal{X}}^k(\bar{x})-\mathcal{X}(\bar{x})}{(\lambda_k-\bar{x})^2}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{\mathcal{X}''(\bar{x})}{2}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_{ki}(\bar{x})}{(\lambda_k-\bar{x})^2}=\frac{1}{2}(\mathcal{X}''(\bar{x}),B^i-\bar{x}A^i).$$

Тем самым существование такой константы d, что выполнено (I8), доказано. Теперь из (I7) и (I4) следует

$$\left|\tilde{\lambda}_{k+1}-\bar{x}\right|\le\frac{d}{m}(\lambda_k-\bar{x})^2=C_2(\lambda_k-\bar{x})^2.$$

Наконец, для $\left|\lambda_{k+1}-\bar{x}\right|$ из (I5) получаем

$$\left|\lambda_{k+1}-\bar{x}\right|\le(C_1+C_2)(\lambda_k-\bar{x})^2=C(\lambda_k-\bar{x})^2. \tag{I9}$$

Таким образом, если лимитирующее неравенство для всех достаточно больших значений k находится в системе (6), то скорость сходимости последовательности λ_k к $\bar{x}$ квадратичная.

Предположим теперь, что при определении λ_{k+1} лимитирующее неравенство содержится в системе (5), т.е. λ_{k+1} определяется из линейного уравнения $\hat{\mathcal{X}}_j^k(\lambda)=0$ при некотором $j=j(k)$. Если $\lambda_k\to\bar{x}$, при больших значениях k выполнение такого шага будет просто совпадать с шагом метода Ньютона для поиска корня функции $\mathcal{X}_{j(k)}(\lambda)$; скорость сходимости такого процесса, как известно, квадратичная при условии, что искомый корень не является кратным. Поэтому, если предполагать, что $\bar{x}$ не является кратным корнем интересующих нас функций $\mathcal{X}_j(\lambda)$, то и в этом случае мы можем получить оценку (I9).

Таким образом, предполагая единственность окончательного базиса можно сформулировать следующее утверждение:

ТЕОРЕМА. Если последовательность λ_k сходится к $\bar{\lambda}$, модель регулярна и $\bar{\lambda}$ не является кратным корнем для функций $\mathcal{X}_j(\lambda)$ $(j=1,\dots,n)$, то скорость сходимости квадратичная.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если же единственности окончательного базиса не предполагать, то весь процесс можно рассматривать как объединение конечного числа элементарных процессов, определяемых различными окончательными базисами, а следовательно, характеризующихся, вообще говоря, различными наборами функций $\mathcal{X}_j(\lambda)$ $(j=1,\dots,n)$. Если для каждого такого набора число $\bar{\lambda}$ не будет кратным корнем соответствующих функций $\mathcal{X}_j(\lambda)$, то каждый из элементарных процессов, а ввиду конечности их числа, и весь результирующий процесс будут иметь квадратичную скорость сходимости.

Вернемся теперь к вопросу о сходимости λ_k к $\bar{\lambda}$, предполагая по-прежнему для простоты единственность окончательного базиса. Несложно показать, что сходимость заведомо имеет место в том случае, когда для бесконечного числа значений k лимитирующее неравенство содержится в системе (6). Требуемые рассуждения таковы.

Обозначим множество тех значений k, при которых реализуется указанная ситуация, через K. Тогда для $k\in K$ будет

$$(\mathcal{X}^k+\dot{\mathcal{X}}^k(\lambda_{k+1}-\lambda_k),\, B^{i(k)}-\lambda_{k+1}A^{i(k)})=0. \tag{20}$$

Какой-то из номеров $i(k)$ будет повторяться бесконечно много раз. Пусть это i_0. Те же рассуждения, которые были проведены для функций $\mathcal{X}_j(\lambda)$, доказывают ограниченность последовательности $\mathcal{X}^k$. С другой стороны, из K можно выделить бесконечное подмножество K_0 так, чтобы $i(k)=i_0$ для $k\in K_0$ и подпоследовательность $\mathcal{X}^k$, $k\in K$, сходилась к некоторому пределу $\tilde{\mathcal{X}}$. Тогда, переходя в (20) к пределу при $k\in K$, получим

$$(\tilde{\mathcal{X}},\, B^{i_0}-\tilde{\lambda}A^{i_0})=0,$$

где через $\tilde{\lambda}$ обозначен предел последовательности λ_k. Но тогда из неравенства

$$p^k+(\pi^k, B^{i_0}-\lambda_k A^{i_0})\le 0$$

следует $\lim\limits_{k\to\infty} p^k=0$, что и требуется (см. [I]) для того, чтобы выполнялось равенство $\bar{\lambda}=\bar{\alpha}$.

Однако если, начиная с некоторого значения k, на всех последующих шагах лимитирующее неравенство будет находиться в системе (5), то может оказаться, что $\bar{\lambda}\ne\bar{\alpha}$. Ниже приводится простой пример, иллюстрирующий такую ситуацию.

ПРИМЕР. Матрицы B и A, задающие модель, таковы:

$$B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 6\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 5\end{pmatrix}.$$

Решая системы уравнений:

$$\begin{cases} p+\pi_1(3-4\lambda)+\pi_2(1-3\lambda)=0,\\ p+\pi_1(4-5\lambda)+\pi_2(6-5\lambda)=0,\\ \pi_1+\pi_2=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} z+(3-4\lambda)x_1+(4-5\lambda)x_2=0,\\ z+(1-3\lambda)x_1+(6-5\lambda)x_2=0,\\ x_1+x_2=1;\end{cases}$$

имеем

$$\pi_1=\frac{5-2\lambda}{4-\lambda},\qquad \pi_2=\frac{\lambda-1}{4-\lambda};$$

$$x_1=\frac{2}{4-\lambda},\qquad x_2=\frac{2-\lambda}{4-\lambda}.$$

Полученные решения будут неотрицательными при $\lambda\in[1,2]$, а, следовательно, будут оптимальными решениями соответственно задач (2) и (I). Далее,

$$\pi_2'=\frac{3}{(4-\lambda)^2},\qquad \pi_2''=\frac{6}{(4-\lambda)^3},$$

и на указанном интервале эти производные положительны. Кроме того, при $\lambda=1$ имеем $\pi_2=0$. Поэтому если начальное приближение λ_0 выбрать из интервала $(1,2)$, то при проведении процесса всегда будет $\lambda_k > 1$. Между тем, как несложно проверить, $\bar{\alpha} = \frac{4}{5} < 1$. Таким образом, $\lambda_k \not\to \bar{\alpha}$.

Для устранения подобных ситуаций можно применять комбинированную схему, а именно: если на протяжении определенного числа шагов лимитирующее неравенство все время содержится в системе (5), то следует проделать один шаг по прежней схеме, т.е. получить очередное значение λ_{k+1} по формуле (3). Это обеспечит сходимость последовательности λ_k к $\bar{\alpha}$, а скорость сходимости если и замедлится, то несущественно.

Литература

1. ШМЫРЁВ В.И. Метод решения модели Неймана. - "Оптимальное планирование", Новосибирск, "Наука", II, 1968.
2. M.J.Hamburger, G.L.Thompson, R.L.Weil. Computation of expansion rates for the generalized von Neumann model of an expansion economy. Econometrica, vol.35, 3-4 (1967), p.542-547.

Поступила в ред.-изд.отдел
20. 12. 1974 г.