УДК 330.115,382.81/82

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ, УЧИТЫВАЮЩАЯ НОВОВВЕДЕНИЯ

В.Л.Макаров

В настоящей работе рассматривается довольно универсальный способ учета изменений в производстве, связанных с техническим прогрессом. На базе этого способа строится модель экономического равновесия типа модели Эрроу-Дебре. В определении понятия состояния равновесия для исследуемой модели с нововведениями имеется существенная отличительная черта по сравнению с классическим понятием равновесия, заключающаяся в необходимости оценки самого факта создания нововведений с учетом масштаба их внедрения. Доказывается существование такого модифицированного состояния равновесия,и изучаются основные его свойства. В заключение обсуждаются некоторые экономические следствия, вытекающие из полученных математических результатов.

§ I. Предлагаемая форма описания нововведений

Отличие рассматриваемой в работе модели от классической модели экономического равновесия Эрроу-Дебре состоит, в частности, в том, что производственные возможности производителей задаются более сложным образом.

Пусть матрицы Φ и A задают набор существующих (действующих, имеющихся) производственных способов производителя. Пара строк матриц Φ и A с одинаковым номером представляет собой производственный способ, в котором элементы матрицы Φ характеризуют затраты или выпуск (в зависимости от знака) внутренних для данного производителя факторов (продуктов, ресурсов), а элементы матрицы A – затраты или выпуск продуктов, ресурсов, общих для всей системы.

Набор нововведений, которым располагает данный производитель, задается с помощью матриц B, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{A}$ и S. Здесь каждая строка матрицы B соответствует отдельному нововведению и показывает затраты всех видов факторов (локальных и общих), необходимых для осуществления (реализации) данного нововведения. Таким образом, число столбцов в этой матрице равно суммарному числу столбцов матриц $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{A}$ (или Φ и A, что то же самое). Каждой строке матрицы B, т.е. каждому нововведению, соответствует одна или несколько строк матриц $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{A}$. Эти пары строк представляют собой новые производственные способы, появляющиеся в результате осуществления данного нововведения. Матрица S имеет вид

$$S=\begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ & 1 & \ldots \; 1 \\ & & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Число её столбцов равно числу нововведений, а число строк равно числу новых способов; единицы в каждом столбце указывают, какие новые способы связаны с соответствующим нововведением.

Таким образом, нововведение характеризуется вектором затрат на его реализацию и набором способов, появляющихся в результате его осуществления. В соответствии с экономическим смыслом предполагается, что $B \geqslant 0$. Кроме того, производитель располагает вектором ресурсов R размерности, равной числу столбцов матрицы B.

В дальнейшем будем называть множеством производственных возможностей данного производителя следующее множество:

$$Y=\{y\in R^{l} \mid y=g\tilde{A}+hA+z^{A},\ g\tilde{\Phi}+h\Phi+z^{\Phi}\geqslant 0, \tag{I.I}$$
$$-\delta B+\tilde{z}\geqslant 0,\ z+\tilde{z}=R,\ (gS)_{k}>0\Longrightarrow \delta_{k}=1,$$
$$\delta_{k}=0 \text{ или } 1 \text{ для всех } k;\ (z,\tilde{z},g,h)\geqslant 0\}.$$

Здесь l – число продуктов, общих для всей системы; g – вектор интенсивностей (объемов) применения новых способов; h – вектор интенсивностей применения старых способов; z – вектор ресурсов, затраченных в производстве; $\tilde{z}$ – вектор ресурсов, направленных на реализацию нововведений; r^A и r^Φ — части вектора r, соответствующие столбцам матриц A и Φ; $(yS)_k$ — k-я компонента вектора gS; δ — булев вектор, где $\delta_k=1$ показывает, что при построении данного вектора y k-е нововведение реализуется, а $\delta_k=0$ означает, что k-е нововведение не реализуется.

Определим еще для фиксированного булева вектора δ множество

$$Y(\delta)=\{y\in R^l \mid y=g\tilde{A}+hA+(R-\delta B)^A,\ g\tilde{\Phi}+h\Phi+(R-\delta B)^\Phi\geqslant 0,$$

$$(gS)_k=0, \qquad \delta_k=0;\ (g,h)\geqslant 0\}, \tag{I.2}$$

где $(R-\delta B)^A$ - обозначение для подвектора, составленного из компонент вектора $R-\delta B$, относящихся к общим продуктам (столбцам матрицы A), $(R-\delta B)^\Phi$ - аналогичное обозначение. Определение $Y(\delta)$ имеет смысл для всех булевых векторов δ, удовлетворяющих неравенству $\delta B\leqslant R$. В дальнейшем δ иногда называется планом реализаций, а $\Delta=\{\delta\in R^N_+ \mid \delta B\leqslant R\}$ - множеством допустимых планов. По определению, $Y(\delta)$ является выпуклым многогранным множеством. Из экономических соображений дополнительно предполагается, что $Y(\delta)$ ограничено для любого допустимого δ. Нетрудно видеть, что $Y=\bigcup_{\delta\in\Delta} Y(\delta)$, где теоретико-множественное объединение берется по всем допустимым планам нововведений.

Заметим, что для большинства дальнейших результатов многогранность множеств $Y(\delta)$ не требуется, достаточно, чтобы они были выпуклыми компактами. Это естественное обобщение имеет и содержательный смысл, состоящий в том, что одно нововведение производит целый конус новых производственных способов. Обозначим через $Z^{(k)}\subset R^{s+l}$ выпуклый замкнутый конус производственных способов, создаваемых нововведением k $(k=1,2,\dots,N)$, а через $Z^{(0)}$ - конус действующих способов. Тогда

$$Y(\delta)=\{y\in R^l \mid (y',y)\in R-\delta B+Z^{(0)}+\sum_{k\in N(\delta)} Z^{(k)},\ y'\geqslant 0\},\ Y=\bigcup_{\delta\in\Delta} Y(\delta),$$

где $N(\delta)=\{k \mid \delta_k=1\}$. Ясно, что в рассмотренном случае многогранных $Y(\delta)$ конусы $Z^{(k)}$ являются многогранными и определяются образующими, представляющими собой строки матрицы $\boxed{\tilde{\Phi} \mid \tilde{A}}$, относящиеся к соответствующим нововведениям.

В дальнейшем существенную роль играет понятие множества допустимых (или возможных) объемов (или масштабов) реализации нововведений. Введем соответствующие определения. Пусть f_k —

некоторая фиксированная нормировка для производственных способов, заполняющих конус $Z^{(k)}$. Например, f_k может быть такой линейной функцией, определенной на $Z^{(k)}$, что $f_k(z)>0$ для $z\neq 0$. Далее, пусть

$$F(\delta)=\{f\in R^N_+ \mid f_k=f_k(z^{(k)}),\ k\in N(\delta),\ P_s(z^{(0)}+\sum z^{(k)}+R-\delta B)>0,$$

$$z^{(0)}\in Z^{(0)},\quad z^{(k)}\in Z^{(k)},\quad f_k=0,\quad k\notin N(\delta)\},$$

где $P_s(z)$ - обозначение для первых s координат вектора $z\in R^{s+l}$. Тогда $F=\bigcup_{\delta\in\Delta}F(\delta)$ будем называть множеством допустимых объемов реализации нововведений.

В § 2-3 используются также следующие обозначения:

$$Z(\delta)=\{z\in R^{s+l} \mid z=(y',y)\in R-\delta B+Z^{(0)}+\sum_{k\in N(\delta)}Z^{(k)},\ y'>0\},$$

$$Z=\bigcup_{\delta\in\Delta}Z(\delta),$$

$$V(\delta)=Y(\delta)\times F(\delta),\qquad V=\bigcup_{\delta\in\Delta}V(\delta),$$

$$W(\delta)=Z(\delta)\times F(\delta),\qquad W=\bigcup_{\delta\in\Delta}W(\delta).$$

Все эти обозначения используются также с нижним субиндексом , например $V_i(\delta)$, для того чтобы указать, что соответствующее множество относится к отдельному производителю с номером i.

§ 2. Задача оптимизации суммарной полезности

Пусть имеется m производителей, заданных своими множествами производственных возможностей $Y_1,\dots,Y_m$ так, как это было описано в § I. И пусть имеется n потребителей, заданных, как в классической модели равновесия с помощью функций полезности $u_1,\dots,u_n$ и запасов продуктов $w^{(1)},\dots,w^{(n)}$. При этом функции $u_j: R^l_+\longrightarrow R_+$ предполагаются непрерывными, выпуклыми вверх, неубывающими и неограниченными сверху.

Задача оптимизации суммарной полезности потребителей может быть сформулирована для заданного вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, соизмеряющего индивидуальные полезности потребителей.

Найти $(y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ при условиях:

$$y^{(i)} \in Y_i, \quad x^{(j)} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y^{(i)} + \sum_{j=1}^{n} w^{(j)} \geqslant \sum_{j=1}^{n} x^{(j)}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j (x^{(j)}) \longrightarrow \max. \tag{2.3}$$

Учитывая, что все Y_i замкнуты и ограничены, а u_j непрерывны, легко показать, что данная задача имеет решение. Наша цель сейчас – охарактеризовать данное решение с помощью двойственных переменных (цен). Для этого проанализируем сначала задачу с одним производителем и одним потребителем $(m = n = 1)$.

ЗАДАЧА (Δ). Найти (y, x) из условий:

$$\begin{aligned} & y \in Y, \quad x > 0, \\ & y + w \geqslant x, \\ & u(x) \longrightarrow \max. \end{aligned}$$

Ограниченное множество производственных возможностей Y, представленное в форме (I.I), можно задать несколько по-другому:

$$\begin{aligned} Y = \{ y \in R^l \; & y = g\tilde{A} + hA + r^A, \quad g\tilde{\Phi} + h\Phi + r^{\Phi} \geqslant 0, \\ & -\delta B + \tilde{r} \geqslant 0, \; r + \tilde{r} = R, \; \delta = 0,1, \; \delta\hat{G} \geqslant gS, \; (r, \tilde{r}, g, h) \geqslant 0 \}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь условие $(gS)_k > 0 \Longrightarrow \delta_k = 1$ для всех k заменено на $\delta\hat{G} \geqslant gS$, где $\hat{G}$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят достаточно большие числа (G_k), большие максимально возможной суммарной интенсивности, с которой могут быть использованы способы, связанные с нововведением k. Из (2.4) следует, что задача (Δ) является задачей частично целочисленного (булева) выпуклого программирования. Если же в формулировке этой задачи множество Y заменить на $Y(\delta)$, то получится задача выпуклого программирования. Задачу (Δ) можно решить, например, перебирая всевозможные $\delta \in \Delta$ (которых не больше 2^N, где N – размерность вектора δ) и решая задачи выпуклого программирования с данным $Y(\delta)$. Каждую такую задачу будем называть задачей (δ).

В дальнейшем нам понадобится следующее табличное представление задачи (δ) :

	ν	p^{Φ}	p^{A}	1
$g(\delta)$		$\tilde{\Phi}(\delta)$	$\tilde{A}(\delta)$	
h		Φ	A	
x	-1		x	$u(x)$
$\geqslant$	-1	$-r^{\Phi}(\delta)$	$-w-r^{A}(\delta)$	max

(2.5)

Здесь $\Phi(\delta)$, $A(\delta)$ - матрицы новых способов, для которых соответствующие компоненты δ равны единице; $r^{\Phi}(\delta)$ и $r^{A}(\delta)$ - векторы ресурсов, направляемых в производство при данном плане реализации нововведений δ . Слева указан столбец переменных, где $g(\delta)$ включает только компоненты, относящиеся к нововведениям, реализуемым по плану δ ; x - вектор потребления. Сверху указан вектор двойственных переменных $p=(\nu, p^{\Phi}, p^{A}, 1)$.

Введем еще одно обозначение

$$Y(G,G^*)=\{y\in R^l \mid y=g\tilde{A}+hA+r^A,\ \ g\Phi+h\Phi+r^{\Phi}\geqslant 0, \\ -\delta B+\tilde{r}\geqslant 0,\ r+\tilde{r}=R,\ \delta G\geqslant gS\geqslant G^*,\ (\delta, r, \tilde{r}, g, h)\geqslant 0\}. \tag{2.6}$$

Как видим, различие в определении множества $Y(G,G^*)$ по сравнению с Y состоит в следующем. Выброшено условие, что есть булев вектор, требуется лишь, чтобы $\delta \geqslant 0$. Вместо специально подобранной диагональной матрицы G взята произвольная диагональная матрица $G>0$, и введено дополнительное условие $gS\geqslant G^*$, где G^* есть некоторый заданный неотрицательный вектор.

Рассмотрим задачу (G,G^*) . Найти (y,x) из условий:

$$y\in Y(G,G^*),\quad x\geqslant 0,$$
$$y+w\geqslant x,$$
$$u(x)\longrightarrow max.$$

Это задача выпуклого программирования, так как u -выпуклая вверх функция. В дальнейшем будет всегда предполагаться, что задача (G,G^*) имеет решение, в частности, G^* выбрано соответствующим образом. Легко, конечно, привести различного рода достаточные условия на матрицы A , $\tilde{A}$, Φ , $\tilde{\Phi}$, B и векторы R , G^* , G , при которых задача (G,G^*) имеет решение. Здесь это, однако, не делается, чтобы не загромождать изложения.

В дальнейшем нам потребуется формулировка задачи (G, G^*) в матричной форме, представленная следующей схемой:

	ν	$\hat{\beta}$	$\tilde{\beta}$	π	ρ^*	$\rho^{\wedge}$	$\tilde{\pi}$	1
δ			$-B$	G				
g				$-S$	$\tilde{\Phi}$	$\tilde{A}$	S	
h					Φ	A		
$\tilde{r}$		$-I$	I					
r		$-I$			I			
x	-1					F		$u(x)$
				$\geqslant$				
	-1	$-R$	0	0	0	$-w$	G^*	max

(2.7)

Обозначим через $g(G)$ множество всех векторов g, входящих в решение задачи (G, G^*). Рассмотрим точечно-множественное отображение $\Gamma : G \longrightarrow \Gamma(G)$, определенное для всех $G \geqslant 0$ такое, что

$$\Gamma(G) = \{G' \mid G' = gS,\ g \in g(G)\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. П у с т ь $\bar{G}$ - н е п о д в и ж н а я т о ч к а о т о б р а ж е н и я Γ, т. е. $\bar{G} \in \Gamma(\bar{G})$. Т о г д а с р е д и р е ш е н и й з а д а ч и $(\bar{G}, G^*)$ с м н о ж е с т в о м $Y(\bar{G}, G^*)$ с у щ е с т в у е т т а к о е р е ш е н и е $\bar{v} = (\bar{\delta}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{r}, \bar{\tilde{r}})$, в к о т о р о м δ е с т ь б у л е в в е к т о р.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = (\delta, g, h, r, \tilde{r})$ - такое решение задачи (G, G^*) с $G = \bar{G}$, для которого $gS = \bar{G}$. Тогда, по определению множества $Y(\bar{G}, G^*)$, имеем $\delta\bar{G} \geqslant gS = \bar{G}$. Предположим, что для некоторого номера k выполнено строгое неравенство $\delta_k \bar{G}_k > \bar{G}_k$. Это, в частности, означает, что $G_k > 0$. Изменим наше решение v таким образом, чтобы вместо δ_k была единица. Непосредственно проверяется, что измененное v' определяет в точности тот же самый вектор $y \in Y(\bar{G}, G^*)$, что и прежнее v. Действительно, надо проверить только выполнение неравенств $-\delta B + \tilde{r} \geqslant 0$. Поскольку B не содержит отрицательных элементов, уменьшение одной из компонент δ не нарушает неравенства. Итак, для всех k таких, что $\bar{G}_k > 0$, положим $\delta_k = 1$, и при этом y останется тем же самым. Для тех k, у которых $\bar{G}_k = 0$, положим $\delta_k = 0$, ибо это, по тем же соображениям, касается только неравенств $-\delta B + \tilde{r} \geqslant 0$, и не нарушает их. Таким образом, данное изменение исходного решения v не приводит к изменению y, что и доказывает предложение.

Область определения отображения Γ можно ограничить многогранником $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}=\{G\in R_+^w,\ G=gS,\ gA+hA+r^A+w\geqslant 0,\ g\Phi+h\Phi+r^\Phi\geqslant 0,$$

$$r+\tilde{r}=R,\ -\delta B+\tilde{r}\geqslant 0,\ \delta\hat{G}\geqslant gS\geqslant G^*,\ (\delta,r,\tilde{r},g,h)\geqslant 0\}.$$

Здесь $\hat{G}$ - матрица, имеющая тот же смысл, что и в выражении (2.4). В силу предположения о разрешимости задачи (G,G^*) множество $\mathcal{V}$ непусто.

Непосредственно из определений Γ и $\mathcal{V}$ следует, что $\Gamma(G)\subset\mathcal{V}$ для всех $G\in\mathcal{V}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Существует неподвижная точка $\bar{G}$ отображения Γ, определенного на $\mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $M(G)$ множество векторов $v=(\delta,r,\tilde{r},g,h)$, удовлетворяющих ограничениям:

$$gA+hA+r^A+w\geqslant 0,$$
$$g\Phi+h\Phi+r^\Phi\geqslant 0,\quad \delta G\geqslant gS\geqslant G^*,$$
$$-\delta B+\tilde{r}\geqslant 0,\quad r+\tilde{r}=R,\quad (\delta,r,\tilde{r},g,h)\geqslant 0.$$

Отображение $\Gamma^{(1)}: G\longrightarrow M(G)$ является в области $\mathcal{V}$ непрерывным в смысле определения из [1, с. 38]. Непрерывность $\Gamma^{(1)}$ сразу следует из того факта, что $M(G)$ - многогранник (ограниченное множество).

Введем точечно-множественное отображение $\Gamma^{(2)}: G\longrightarrow \Gamma^{(2)}(G),\ G\in\mathcal{V}$. Здесь $\Gamma^{(2)}(G)$ состоит из векторов $\bar{v}\in M(G)$, доставляющих решение задаче (G,G^*). По теореме 7, § 9 из [1], отображение $\Gamma^{(2)}$ полунепрерывно сверху. Отображение Γ получается из $\Gamma^{(2)}$ операцией проектирования на подпространство, соответствующее переменным g, и последующего (линейного) преобразования векторов g в G с помощью матрицы S. Поэтому, по теореме 2, § 9 из [1], отображение Γ полунепрерывно сверху.

Учитывая, что $\mathcal{V}$ - выпуклый компакт, $\Gamma(G)$ - также выпуклый компакт для любого $G\in\mathcal{V}$, получаем, что Γ удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани о существовании неподвижной точки (см.[I, теорема I, § 23]).

Предложения I и 2 дают надежду на то, что интересующее нас решение задачи (Δ) можно получить как неподвижную точку отображения Γ. А последняя -как решение задачи выпуклого программирования-характеризуется двойственными ценами.

Нетрудно понять, что не при всяком $\delta \in \Delta$ решение задачи (δ) будет соответствовать неподвижной точке отображения Γ. Действительно, если, к примеру, имеется новый производственный способ, который по всем компонентам хуже (затраты больше, выпуск меньше) существующего способа, то этот способ не войдет в решение ни одной задачи (δ) с положительной интенсивностью.

Тем не менее неподвижных точек отображения Γ может быть много. В частности, если $G^* = 0$, то среди неподвижных точек есть $\bar{G} = 0$. Их число, очевидно, уменьшается с увеличением компонент вектора G^*. Однако, если G^* будет слишком большим, он может отсечь искомое решение задачи (Δ).

Первый вопрос, который естественно возникает, это - дает ли решение задачи (Δ) всегда неподвижную точку отображения Γ при $G^* = 0$? Следующий пример показывает, что оптимальное решение может не соответствовать никакой неподвижной точке при $G^* = 0$.

ПРИМЕР I.

$$A = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1{,}1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ -1, & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R = (5,5,1,0); \quad w = 0; \quad u(x) = x.$$

Нетрудно убедиться, что оптимальное решение задачи (1) есть

$$\bar{v} = (\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{\bar{z}}, \bar{v}) =$$

$$= (1; 1; 1; 2\tfrac{1}{3}; 0; (2; 0; 0; 0); (3; 0; 0; 0)),$$

при котором значение целевой функции равно $3\tfrac{2}{3}$.

Покажем, что это решение не является неподвижной точкой при $G^* = 0$. Положим $\bar{G} = \bar{q} = (1; 2\tfrac{1}{3})$ и найдем двойственные переменные, соответствующие решению $\bar{v}$, являющемуся допустимым решением задачи (G, G^*) с множеством $Y(\bar{G}, 0)$. Нетрудно видеть, что решение $\bar{v}$ в задаче $(\bar{G}, 0)$ линейного программирования является базисным и двойственные переменные, соответствующие этому базису, есть

$$\bar{p} = \left(\frac{7}{8}; \frac{7}{18}; \frac{7}{18}; \frac{3}{18}; \frac{7}{18}; \frac{4}{18}; \frac{11}{18}; 1\right).$$

Здесь первое число относится к неравенству $z_1 + \tilde{z}_1 \leq 5$, второе число – к неравенству $\delta_1 + \delta_2 \leq \tilde{z}_1$, третье и четвертое – к неравенствам $\delta \bar{G} \geq g$, последние четыре числа относятся к балансовым неравенствам для продуктов. (Оценка последнего максимизируемого продукта равна единице.)

По оценкам, $\bar{p}$ – единственный не вошедший в оптимальное решение производственный способ, соответствующий переменной h_2, является сверхрентабельным, т.е. скалярное произведение $\bar{p}$ на этот способ строго больше нуля. Следовательно, оптимальное решение задачи (Δ) не является оптимальным решением задачи (G, G^*) при $G = \bar{G}$ и $G^* = 0$.

Этот же пример показывает, что при $G^* = 0$ вообще не существует неподвижной точки, у которой $\bar{\delta} = (1, 1)$. Действительно, если решение строится только на новых способах, то двойственные переменные для продуктов, соответствующие этому решению в задаче (G, G^*), равны (0; 0,5; 1; 1). Следовательно, способ, соответствующий переменной h_1, сверхрентабелен. Решение на способах, соответствующих переменным (g_1, g_2, h_2), также не дает неподвижной точки, поскольку оно вообще не базисное (включен еще отрицательный орт, соответствующий первому продукту).

Чтобы закончить с вопросом о существовании неподвижных точек при $G^* = 0$ в рассмотренном примере, отметим, что их всего две: (I) $\bar{G} = (0; 0)$, которой соответствует решение, построенное на существующих способах $(0; 0; 0; 0; 2\frac{1}{2}; 1)$, и $max = 3,5$. (2) $\bar{G} = (0; 1)$, которой соответствует решение $(0; 1; 0; \frac{38}{30}; \frac{41}{30}; 1)$, $max = 3\frac{19}{30}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Решение задачи (Δ) всегда дает неподвижную точку отображения Γ при некотором G^*, $G^* \leq \bar{G}$, где $\bar{G} = \bar{g} S$ взято из решения задачи (Δ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу $(\bar{\delta})$, где $\bar{\delta}$ есть часть оптимального решения задачи (Δ). Задача $(\bar{\delta})$ представляет собой задачу выпуклого программирования, матричная схема

(2.5) которой была представлена выше. Ее решение есть соответствующая часть решения задачи (Δ). Двойственные переменные, характеризующие согласно теореме Куна-Таккера решение задачи $(\bar{\delta})$, обозначены через (ν, p^{Φ}, p^{A}).

Дополним вектор (ν, p^{Φ}, p^{A}) до полного вектора двойственных переменных $p^{*}=(\nu, \hat{p}, \tilde{p}, \pi, p^{\Phi}, p^{A}, \tilde{\pi})$ задачи (2.7) при $G = G^{*} = \bar{G}$, который будет характеризовать данное решение задачи (Δ) как допустимое решение задачи (2.7). Положим $\nu = u(\bar{x}) - \bar{x}pA$; $\hat{p} = \tilde{p} = (p^{\Phi}, p^{A}) = p$; $\pi_{k} = b^{(k)} p/\bar{G}_{k}$ для тех k, у которых $\bar{G}_{k} > 0$. Для тех k, для которых $\bar{G}_{k} = 0$, $\pi_{k} = \max a^{k,s} p + 1$, если $\max a^{k,s} p > 0$, и $\pi_{k} = 0$ – в противном случае. Здесь $a^{k,s}$ – строка матрицы $\tilde{\Phi}\tilde{A}$, относящаяся к нововведению k и способу s, порождаемому этим нововведением. Максимум берется по всем способам, порождаемым нововведением k. Далее, $\tilde{\pi}_{k} = \pi_{k}$, если $\bar{G}_{k} > 0$, и $\tilde{\pi} = 0$, если $\bar{G}_{k} = 0$. Учитывая, что p – характеристические цены задачи $(\bar{\delta})$, непосредственно проверяется, что скалярное произведение любой строки матрицы из схемы (2.7) на p^{*} не больше нуля, а для строк с положительными значениями в решении – строго равно нулю. В частности, $u(\bar{x}) = \bar{x}p^{A} + \nu$, по определению, и $u(x) \leqslant p^{A}x + \nu$ для всех $x \geqslant 0$ в силу того, что p^{A} – характеристические цены задачи $(\bar{\delta})$.

Итак, p^{*} – характеристические цены для рассматриваемого допустимого решения задачи (2.7) при $G = G^{*} = \bar{G}$. Следовательно, по теореме Куна-Таккера, это решение оптимально, что доказывает предложение.

Вернемся теперь к примеру I. В задаче (2.7), поставив $G^{*}=(\frac{7}{5}; 1)$, получим $\pi=(\frac{1}{7}; \frac{1}{3})$, $p = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1; 1)$. Оптимальное решение сохранится, если положить $G^{*}=(0; 1)$. Тогда характеристические цены будут $\pi=(0; \frac{7}{18})$, $p=(\frac{7}{18}; \frac{4}{18}; 1; 1)$. Положив $G^{*}=(\frac{7}{5}; 0)$, получим при том же решении характеристические цены $\pi=(\frac{52}{70}; 0)$, $p=(\frac{1}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10}; 1)$. Одновременно оба ограничения уменьшить нельзя, ибо в этом случае, как было показано выше, неподвижной точки для данного решения не существует.

Предложение 3 можно переформулировать в виде теоремы I. Вместо задачи (G, G^{*}) можно рассматривать эквивалентную ей в определенном смысле задачу (G, π).

ЗАДАЧА (G, π): Найти $(\delta, z, \tilde{z}, g, h)$ из условий

$$g\tilde{A} + hA + r^A + w = y \geqslant 0,$$
$$g\tilde{\Phi} + h\Phi + r^{\Phi} \geqslant 0, \quad -\delta B + \tilde{r} \geqslant 0,$$
$$r + \tilde{r} = R, \quad \delta G \geqslant gS, \quad (\delta, r, \tilde{r}, g, h) \geqslant 0,$$
$$u(y) + gS\pi \longrightarrow max.$$

Эквивалентность задач (G, G^*) и (G, π) понимается следующим образом. Для любого решения v задачи (G, G^*) найдется вектор π такой, что v является решением задачи (G, π), и, наоборот, для любого решения v' задачи (G, π) найдется такой вектор G^*, что v' оказывается решением задачи (G, G^*). Эквивалентность в этом смысле задач (G, G^*) и (G, π) является хорошо известным фактом теории функций Лагранжа.

ТЕОРЕМА I. Пусть $(\bar{\delta}, \bar{g}, \bar{h})$ есть решение задачи (Δ) и пусть $\bar{G} = \bar{g}S$. Тогда найдется такой вектор $\bar{\pi} \in R^N_+$, что $(\bar{\delta}, \bar{g}, \bar{h})$ оказывается решением задачи (G, π) при $G = \bar{G}$, $\pi = \bar{\pi}$.

§ 3. Существование состояния равновесия

Доказательство существования равновесия в модели с нововведениями опирается на теорему существования равновесия в модели, где множества производственных возможностей заданы классическим образом, т.е. с помощью выпуклых компактов. Однако в отличие от обычно рассматриваемых формулировок нам потребуется, чтобы целевыми функциями производителей были не величины прибыли, а произвольные вогнутые функции. Дополнительные отличия или обобщения состоят также в том, что (а) множества производственных возможностей не состоят из векторов, представляющих собой затраты и выпуск продуктов, последние получаются из производственных возможностей линейным преобразованием; (б) функции дохода потребителей являются произвольными непрерывными функциями, удовлетворяющими закону Вальраса. Будем обозначать эту модель буквой M. Все обозначения, вводимые для данной модели M, являются автономными, не связанными с предыдущими или последующими обозначениями, относящимися к основной модели.

Итак, модель экономического равновесия M определена с помощью следующей информации:

$$\{H^{(1)},\dots,H^{(m)}, A^{(1)},\dots,A^{(m)}, \varphi_1,\dots,\varphi_m, u_1,\dots,u_n, \mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n, w^{(1)},\dots,w^{(n)}\}.$$

Здесь $H^{(i)}$ – множество производственных возможностей (планов) i-го производителя, которое предполагается выпуклым компактом, содержащим нулевой вектор; $A^{(i)}$ – матрица преобразования производственных возможностей в вектор выпуска и затрат продуктов, т.е. $y^{(i)}=h^{(i)}A^{(i)}$ представляет собой вектор, положительные компоненты которого показывают выпуск, а отрицательные–затраты соответствующих продуктов, если реализуется производственный план $h^{(i)}\in H^{(i)}$; далее, φ_i – целевая функция i-го производителя, определенная на $H^{(i)}$, предполагается непрерывной;

u_j – целевая функция j-го потребителя, определенная на неотрицательном ортанте R^l_+, неотрицательная, непрерывная, вогнутая (выпуклая вверх), неограниченно возрастающая.

$\mathcal{D}_j$ – функция дохода j-го потребителя, определенная в области V, где $V=Y^{(1)}\times\dots\times Y^{(m)}\times P$,

$$Y^{(i)}=\{y^{(i)}\in R^l \mid y^{(i)}=h^{(i)}A^{(i)}, h^{(i)}\in H^{(i)}\},\ P=\{p\in R^l_+ \mid \sum_{s=1}^{l} p_s=1\}.$$

Функции $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$ предполагаются непрерывными и удовлетворяют тождеству (закону Вальраса)

$$\sum_{j=1}^{n}\mathcal{D}_j(v)=\sum_{i=1}^{m} y^{(i)}p$$

во всей области своего определения. Через $w^{(1)},\dots,w^{(n)}$ обозначены начальные количества (запасы) продуктов у потребителей, $w^{(j)}>0$, $j=1,2,\dots,n$. Состояние экономического равновесия есть набор векторов $\bar Z=(\bar h^{(1)},\dots,\bar h^{(m)},\bar x^{(1)},\dots,\bar x^{(n)},\bar p)$, удовлетворяющий условиям:

$$\sum_i \bar y^{(i)}+\sum_j w^{(j)}\geq\sum_j \bar x^{(j)}, \text{ где } \bar y^{(i)}=\bar h^{(i)}A^{(i)}; \tag{3.1}$$

$$\varphi_i(\bar h^{(i)})=\max_{h\in H^{(i)}}\varphi_i(h); \tag{3.2}$$

$$u_j(\bar x^{(j)})=\max_{x\bar p\leq\mathcal{D}_j(\bar v)+w^{(j)}\bar p,\ x\geq 0} u_j(x). \tag{3.3}$$

ТЕОРЕМА 2 (*существования состояния экономического равновесия*). *В модели M состояние экономического равновесия существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся схемой, примененной для доказательства теоремы 18.1 из [2]. Представим модель M в виде игры нескольких лиц в нормальной форме. При этом множества стратегий некоторых игроков непрерывно зависят от самих стратегий. Формулировку такой игры и определение для нее состояния равновесия см. в [2, § 17].

Итак, имеется $(m+n+1)$ игрок. Пусть z-обозначение для ситуации игры (набора стратегий всех игроков), $X^{(s)}(z)$, $\psi_s(z)$-соответственно множество стратегий и значение целевой функции игрока s в ситуации z. Точечно-множественные отображения $X^{(s)}: z \longrightarrow X^{(s)}(z)$ $(s=1,\dots,m+n+1)$, заданные на некотором выпуклом компакте Z, определяются следующим образом:

$$X^{(s)}(z)=Y^{(s)}, \quad \psi_s(z)=\varphi_s(h^{(s)}), \quad s=1,\dots,m;$$

$$X^{(s)}(z)=\{x^{(j)}\in R^l_+ \; px^{(j)}\le \mathcal{D}_j(v)+w^{(j)}p, x^{(j)}\le \hat{Y}\}$$

для тех z, для которых

$X^{(s)}(z)=\{x^{(j)}\in R^l_+: px^{(j)}\le w^{(j)}p,\ x^{(j)}\le \hat{Y}\}$ для тех z, для которых $\mathcal{D}_j(v)+w^{(j)}p\le 0$.

$$\psi_s(z)=u_j(x^{(j)}), \quad s=m+j, \quad j=1,\dots,n,$$

$$X^{(s)}(z)=P, \quad P=\{p\in R^l_+: \sum_k p_k=1\},$$

$$\psi_s(z)=(\sum_{j=1}^{n} x^{(j)}-\sum_{i=1}^{m} y^{(i)}-\sum_{j=1}^{n} w^{(j)})p, \quad s=m+n+1,$$

где $y^{(i)}=h^{(i)}A^{(i)}$, $i=1,\dots,m$.

Здесь фактически зависят от z только множества стратегий для игроков $s=m+1,\dots,m+n$. Вектор $\hat{Y}$ указывает верхнюю границу возможного производства продукции. Отсюда

$$Z=H^{(1)}\times\dots\times H^{(m)}\times\hat{Y}\times\dots\times\hat{Y}\times P.$$

Непосредственно проверяется, что полученная игра удовлетворяет всем условиям теоремы 17.1 из [2], и, следовательно, в ней существует состояние равновесия в смысле Нэша. Обозначим его через $\bar{Z}$. Покажем теперь, что ситуация $\bar{Z}$ является состоянием равновесия в модели M. Для этого надо проверить только выполнение неравенств (3.1), поскольку соотношения (3.2) и

(3.3) выполнены по определению состояния равновесия игры. Предположим противное, т.е. пусть неравенства из (3.I) с номерами $K_1,\dots,K_r$ $(r>1)$ не выполняются. Тогда поскольку игрок с номером $m+n+1$ выбирает такие цены $\bar{p}$, которые максимизируют функцию ψ_{m+n+1}, то имеет место равенство

$$\sum_{s=1}^{r} \bar{p}_{K_s} = 1, \qquad (3.4)$$

а цены остальных продуктов, следовательно, равны нулю. Умножив левую и правую части неравенств (3.I) на соответствующие цены и просуммировав их, учитывая (3.4) и предположение о их невыполнении, получим

$$\sum_i \bar{y}^{(i)}\bar{p} + \sum_j w^{(j)}\bar{p} < \sum_j x^{(j)}\bar{p}. \qquad (3.5)$$

По определению функций $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$, имеем $\sum_j \mathcal{D}_j(v) = \sum_i \bar{y}^{(i)}\bar{p}$, а, по определению состояния равновесия игры, получаем

$$\bar{x}^{(j)}\bar{p} \le \mathcal{D}_j(\bar{v}) + w^{(j)}\bar{p},$$

что противоречит неравенству (3.5).

Полученное противоречие доказывает выполнение неравенства (3.I) и завершает доказательство теоремы в целом.

Сформулируем теперь модель экономического равновесия с учетом реализации нововведений. Будем обозначать её через MN. Все обозначения, введенные ранее в § I-2, здесь сохраняются. Модель MN задается с помощью следующей информации:

$$\{V_1,\dots,V_m, u_1,\dots,u_n, w^{(1)},\dots,w^{(n)}, \mathcal{D}=(\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_{n+r})\},$$

где V_i - множество производственных возможностей i-го производителя, $V_i = Y_i \times F_i$, как уже отмечалось выше, u_j - функция полезности j-го потребителя, $w^{(j)}$ - имеющиеся у него запасы продуктов; $\mathcal{D}_j(z^{(1)},\dots,z^{(m)}, p, \pi)$ - доход j-го потребителя при выбранных производственных возможностях $z^{(1)},\dots,z^{(m)}$ и ценах p, π на продукты и нововведения соответственно. Здесь первые n потребителей - это собственно потребители (потребители продукции, вкусы которых определяются функциями $u_1,\dots,u_n$), а следующие r потребителей заинтересованы в потреблении только реализованных нововведений. Об экономическом смысле этой категории потребителей говорится ниже.

Состояние экономического равновесия представляет собой набор векторов $\bar{z} = (\bar{v}^{(1)}, \dots, \bar{v}^{(m)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(n)}, \bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(r)}, \bar{p}, \bar{\pi})$, где $\bar{v}^{(i)} = (\bar{y}^{(i)}, \bar{f}^{(i)})$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_i \bar{y}^{(i)} + \sum_j w^{(j)} \geqslant \sum_j \bar{x}^{(j)}; \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{f}^{(i)} \geqslant \sum_{k=1}^{r} \bar{g}^{(k)}; \tag{3.7}$$

$$\bar{y}^{(i)}\bar{p} + \bar{f}^{(i)}\bar{\pi} = \max_{(y^{(i)}, f^{(i)}) \in V_i} (y^{(i)}\bar{p} + f^{(i)}\bar{\pi}), \quad i = 1, \dots, m; \tag{3.8}$$

$$u_j(\bar{x}^{(j)}) = \max_{\substack{x\bar{p} \leqslant \mathcal{D}_j(\bar{z}^{(1)}, \dots, \bar{z}^{(m)}, \bar{p}, \bar{\pi}) + w^{(j)}\bar{p} \\ x \geqslant 0}} u_j(x), \quad j = 1, \dots, n; \tag{3.9}$$

$$\bar{\pi}\bar{g}^{(k)} = \max_{\substack{\bar{\pi}g \leqslant P_{n+k}(\bar{z}^{(1)}, \dots, \bar{z}^{(m)}, \bar{p}, \bar{\pi}) \\ g \geqslant 0}} \bar{\pi} g. \tag{3.10}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Функции u_j $(j = 1, \dots, n)$ определены в R_+^{ℓ}, вогнутые, неограниченно возрастающие.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Функции $\mathcal{D}_j$ $(j = 1, \dots, n+r)$ определены в области $\mathcal{V} = Z_1 \times \dots \times Z_m \times P \times \Pi$, где $P = \{p \in R_+^{\ell} \mid \sum_s p_s = 1\}$, $\Pi = R_+^N$, непрерывны и удовлетворяют закону Вальраса (3.II) отдельно для производства продуктов и производства нововведений во всей области своего определения:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}, p, \pi) = \sum_{i=1}^{m} y^{(i)} p,$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+r} \mathcal{D}_j(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}, p, \pi) = \sum_{i=1}^{m} f^{(i)} \pi. \tag{3.II}$$

Пусть $F_i(\delta^{(i)})$ – множество возможных объемов реализации нововведений для производителя i при плане реализации $\delta^{(i)}$, Δ_i есть множество всех допустимых планов нововведений $\delta^{(i)}$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Найдутся векторы

$\bar{\pi} \in \{\pi \in R_+^N \mid \sum_{i=1}^{N} \pi_k = 1\}$ и $\bar{\delta} = (\bar{\delta}^{(1)}, \ldots, \bar{\delta}^{(n)})$ такие, что для каждого производителя i выполнено строгое неравенство

$$\max_{f \in F_i(\bar{\delta}^{(i)})} f\bar{\pi} > \max_{f \in F_i(\delta^{(i)})} f\bar{\pi}, \quad \delta^{(i)} \in \Delta_i, \quad \delta^{(i)} = \bar{\delta}^{(i)}. \quad (3.12)$$

Ниже показывается, что это предположение вытекает из довольно слабых условий, накладываемых на матрицы A, $\tilde{A}$, Φ, $\tilde{\Phi}$ и B.

ТЕОРЕМА 3. При выполнении предположений I – 3 состояние равновесия в модели MN существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π^*- вектор цен для нововведений, о котором идет речь в предположении 3, и пусть $\bar{\delta} = (\bar{\delta}^{(1)}, \ldots, \bar{\delta}^{(n)})$ - план нововведений, на котором реализуется для данного π^* неравенство (3.12). Пусть

$$\gamma = \max_{p \in P} \max_{i} \max_{\delta^{(i)} \in \Delta_i} \max_{y \in Y^{(i)}(\delta^{(i)})} yp .$$

Поскольку $Y^{(i)}(\delta^{(i)})$ и p- компакты, то $\gamma < \infty$. Найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$\min\left[\lambda \pi^* f(\bar{\delta}^{(i)}) - \max_{\substack{\delta^{(i)} \in \Delta_i \\ \delta^{(i)} \neq \bar{\delta}^{(i)}}} \lambda \pi^* f(\delta^{(i)})\right] > \gamma . \quad (3.13)$$

Обозначим $\lambda \pi^* = \bar{\pi}$. Построим модель M следующим образом. В качестве множеств производственных возможностей производителей возьмем $H^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)})$,

$$H^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)}) = \{(g,h) \mid g\tilde{\Phi}^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)}) + h\Phi + z^{(i)\Phi}(\bar{\delta}^{(i)}) \geqslant 0, g,h \geqslant 0\},$$

где $\tilde{\Phi}^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)})$ получена из $\tilde{\Phi}^{(i)}$ вычеркиваем строк, для которых $\bar{\delta}_k^{(i)} = 0$, $z^{(i)\Phi}(\bar{\delta}^{(i)})$ - вектор внутренних для производителя i ресурсов, направляемых в производство в соответствии с планом нововведений $\bar{\delta}^{(i)}$. Матрицы преобразований производственных возможностей в векторы выпуска и затрат продуктов есть $\tilde{A}^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)})$, $A^{(i)}$, где первая соответствует переменным g, а вторая - h, матрица $\tilde{A}^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)})$ получена из $\tilde{A}^{(i)}$ вычеркиваем строк, соответствующих нулевым компонентам вектора $\bar{\delta}^{(i)}$.

В качестве целевых функций производителей берутся

$$\varphi_i(g^{(i)}, h^{(i)}, p) = \left[g^{(i)}\tilde{A}^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)}) + h^{(i)}A^{(i)} + z^{(i)A}(\bar{\delta}^{(i)})\right]p + g^{(i)}S^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)})\bar{\pi}^{(i)},$$

где $S^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)})$ также получена из $S^{(i)}$ вычеркиванием строк, соответствующих нулевым компонентам $\bar{\delta}^{(i)}$, $\bar{\pi}^{(i)}$ - часть вектора $\bar{\pi}$, относящаяся к производителю i.

Функции $u_1,\ldots,u_n$, $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n$, векторы $w^{(1)},\ldots,w^{(n)}$ берутся из модели MN. Сформулированная модель M удовлетворяет условиям теоремы 2, и, следовательно, в ней существует состояние равновесия. Обозначим его через

$$(\bar{g}^{(1)}, \bar{h}^{(1)}, \ldots, \bar{g}^{(m)}, \bar{h}^{(m)}, \bar{x}^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \bar{p}).$$

Построим с помощью состояния равновесия модели M и вектора $\bar{\pi}$ искомое состояние равновесия модели MN. Положим

$$\bar{y}^{(i)} = \bar{g}^{(i)}\tilde{A}^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)}) + \bar{h}^{(i)}A^{(i)} + z^{(i)A}(\bar{\delta}^{(i)}).$$

Векторы $\bar{g}^{(k)}$ $(k = 1,\ldots,z)$ определим из соотношений

$$\sum_{k=1}^{z} \bar{g}^{(k)} = f(\bar{\delta}) = \sum_{i=1}^{m} f(\bar{\delta}^{(i)}), \tag{3.14}$$

$$\bar{g}^{(k)}\bar{\pi} = \mathcal{D}_{n+k}(\bar{y}^{(1)}, f^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(m)}, f^{(m)}, \bar{p}, \bar{\pi}), g_k \geq 0. \tag{3.15}$$

Если $z > 1$, то векторы $\bar{g}^{(k)}$, очевидно, определяются этими соотношениями неоднозначно.

Проверим, что $(\bar{\delta}^{(1)}, \bar{g}^{(1)}, \bar{h}^{(1)}, \ldots, \bar{\delta}^{(m)}, \bar{g}^{(m)}, \bar{h}^{(m)}, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{(n)}, \bar{p}, \bar{\pi})$ доставляет состояние равновесия модели MN. Соотношения (3.6) и (3.9) выполняются по определению состояния модели M. Соотношения (3.7) и (3.10) выполнены, поскольку $\bar{g}^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям (3.14), (3.15). Наконец, обратимся к соотношению (3.8). По определению состояния равновесия модели M, имеем для каждого i

$$\bar{y}^{(i)}p + f^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)})\bar{\pi} = \max\,(y^{(i)}p + f^{(i)}\bar{\pi}),$$
$$(y^{(i)}, f^{(i)}) \in Y_i(\bar{\delta}^{(i)}) \times F_i(\bar{\delta}^{(i)}).$$

В силу соотношения (3.13) величина $\bar{y}^{(i)}\bar{p} + f^{(i)}(\bar{\delta}^{(i)})\bar{\pi}$ заведомо больше $y^{(i)}\bar{p} + f^{(i)}\bar{\pi}$ в случае, когда $y^{(i)} \in Y_i(\delta^{(i)})$, $f^{(i)} \in F_i(\delta^{(i)})$, $\delta^{(i)} \neq \bar{\delta}^{(i)}$. Следовательно, соотношение (3.8) выполнено для построенного равновесия, и тем самым доказательство теоремы завершено.

Вернемся теперь к предположениям, лежащим в условиях теоремы существования. Предположение 2 о свойствах функций распределения доходов $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ содержит закон Вальраса (закон сохранения при перераспределении финансовых средств), что является вполне естественным с экономической точки зрения. Дополнительное менее реалистическое условие состоит в том, что закон Вальраса выполняется в более сильной форме: отдельно для "рынка" продуктов и "рынка" нововведений. Каждый производитель максимизирует суммарную прибыль, полученную как от производства продуктов, так и от "производства" нововведений. Однако далее в соответствии со свойствами функций $\mathcal{D}$ прибыль от производства продукции идет только к потребителям продукции, а прибыль от "производства" нововведений соответственно распределяется только потребителям нововведений. Это предположение , конечно, не совсем оправданно с экономической точки зрения. В реальной экономической практике было бы довольно затруднительно обеспечить точное соблюдение такого типа ограничений. Отказ от данного предположения приводит к значительным трудностям в доказательстве теоремы существования состояния равновесия. Конечно, в состоянии равновесия (просто по определению) прибыль от производства продуктов (соответственно нововведений) идет только потребителям продуктов (нововведений). Однако это имеет место именно в состоянии равновесия. Предположение же 2 требует выполнения этого условия во всех состояниях.

Предположение 3, как уже отмечалось, может быть доказано при довольно слабых и экономически оправданных условиях, накладываемых на производственные возможности производителей.

Рассмотрим задачу отыскания максимального, в смысле естественного порядка, элемента $\bar{f}$ на многограннике $F_i(\delta^{(i)})$, $\delta^{(i)} \in \Delta_i$. Эту задачу можно представить себе как экстремальную задачу на максимизацию числа ассортиментных наборов в структуре $\bar{f}$.

В неравенствах данная задача линейного программирования запишется так:

Найти $(g, h, \lambda) \geq 0$ из условий:

$$g\tilde{A}^{(i)}(\delta^{(i)}) + hA^{(i)} + z^{(i)A}(\delta^{(i)}) \geq 0. \qquad (3.16)$$

$$g\tilde{\Phi}^{(i)}(\delta^{(i)})+h\Phi^{(i)}+z^{(i)\Phi}(\delta^{(i)})\geq 0, \tag{3.17}$$

$$gS^{(i)}(\delta^{(i)})\geq\lambda\bar{f}, \qquad \lambda\longrightarrow max. \tag{3.18}$$

Здесь, как и выше, $\tilde{A}^{(i)}(\delta^{(i)}), \tilde{\Phi}^{(i)}(\delta^{(i)}), S^{(i)}(\delta^{(i)}), z^{(i)A}(\delta^{(i)}), z^{(i)\Phi}(\delta^{(i)})$, - соответствующие реализации матриц и векторов при фиксированном плане нововведений $\delta^{(i)}$.

Обозначим двойственные переменные, соответствующие неравенствам (3.16), (3.17), через $p(\delta^{(i)}, \bar{f})$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3'. В модели MN для любого производителя i и любого $\delta^{(i)}\in\Delta_i$

$$p(\delta^{(i)},\bar{f})B^{(k)}>0, \quad \bar{f}\in R_+^N, \quad \bar{f}\neq 0, \tag{3.19}$$

для тех $k=1,\dots,N$, для которых $\delta_k^{(i)}=0$.

Предположение 3', очевидно, имеет место, если, например, $B>0$ или $p(\delta^{(i)},\bar{f})>0$ для всех $\delta^{(i)}$ и $\bar{f}$. С экономической точки зрения предположение 3 вполне оправданно. Оно означает, что затраты на любое нововведение при любых ценах, получающихся из экстремальной производственной задачи, не равны нулю. Другими словами, можно сказать так: не существует такого критерия оптимальности для производителя, при котором осуществление или неосуществление какого-либо нововведения не сказывается на его затратах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Предположение 3 вытекает из Предположения 3'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем все векторы $\delta^{(i)}\in\Delta_i$, на которых достигается

$$\max_{\delta^{(i)}\in\Delta_i}\ \max_{f\in F_i(\delta^{(i)})} f_1=\bar{f}_1.$$

Обозначим их через $\Delta_i(1)$. Если $\Delta_i(1)$ содержит более одного элемента, то выделим в $\Delta_i(1)$ множество $\Delta_i(2)$, состоящее из таких $\delta^{(i)}$, на которых достигается

$$\max_{\delta^{(i)}\in\Delta_i(1)}\ \max_{f\in F_i(\delta^{(i)})} f_2=\bar{f}_2.$$

Снова, если $\Delta_i(2)$ содержит более одного элемента, продолжим данный процесс (нахождение лексикографического максимума). В результате определим $\Delta_i(3) \supseteq \Delta_i(4) \supseteq \cdots$. Процесс останавливается на некотором шаге $\gamma \leq N$, где N – размерность векторов f, т.е. $\Delta_i(\gamma)$ содержит только один элемент. Действительно, в противном случае найдутся $\hat{\delta}^{(i)}$, $\tilde{\delta}^{(i)} \in \Delta_i(\gamma)$, причем $\hat{\delta}^{(i)} \neq \tilde{\delta}^{(i)}$. Максимальный элемент $\bar{f} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_N)$, по определению, содержится и в $F_i(\hat{\delta}^{(i)})$, и в $F_i(\tilde{\delta}^{(i)})$.

Из определения множеств $F_i(\delta^{(i)})$ непосредственно следует, что если $f \in F_i(\delta^{(i)})$ и $f_k > 0$, то $\delta^{(i)}_k = 1$, т.е. в данном случае $\hat{\delta}^{(i)}_k = \tilde{\delta}^{(i)}_k = 1$ для всех k таких, что $\bar{f}_k > 0$. Поскольку в $\Delta_i(\gamma)$, очевидно, содержится такой вектор $\delta^{(i)}$, у которого $\delta^{(i)}_k = 0$; если $\bar{f}_k = 0$, то будем для определенности считать, что таким вектором является $\hat{\delta}^{(i)}$. Следовательно, $\hat{\delta}^{(i)} \leq \tilde{\delta}^{(i)}$ и $\tilde{\delta}^{(i)}_{\tilde{k}} = 1$ для некоторого $\tilde{k}$, для которого $\hat{\delta}^{(i)}_{\tilde{k}} = 0$. Из этого условия вытекает, что $z(\hat{\delta}^{(i)}) \geq z(\tilde{\delta}^{(i)}) + b^{(\tilde{k})}$.

В силу теоремы двойственности для задачи линейного программирования (3.16)-(3.18) с ассортиментным вектором $\bar{f}$, решение которой определяет максимальный элемент $\bar{f}$, т.е. $\bar{\lambda} = 1$, имеем

$$z(\tilde{\delta}^{(i)})\, p(\tilde{\delta}^{(i)}, \bar{f}) = \bar{\lambda} = 1.$$

Сопоставляя это соотношение с последним неравенством, получаем

$$z(\hat{\delta}^{(i)})\, p(\tilde{\delta}^{(i)}, \bar{f}) \geq 1 + b^{(\tilde{k})} p(\tilde{\delta}^{(i)}, \bar{f}),$$

и на основании предположения 3'

$$z(\hat{\delta}^{(i)})\, p(\tilde{\delta}^{(i)}, \bar{f}) > 1. \tag{3.20}$$

Неравенство (3.20) говорит, о том, что $\bar{f}$ не является максимальным элементом на множестве $F_i(\hat{\delta}^{(i)})$, что невозможно. Следовательно, в множестве $\Delta_i(\gamma)$ содержится единственный элемент $\hat{\delta}^{(i)}$.

Поскольку это рассуждение верно для каждого производителя i, в результате описанной процедуры нахождения максимального элемента получаем вектор $\bar{\delta} = (\bar{\delta}^{(1)}, \ldots, \bar{\delta}^{(m)})$.

Для завершения доказательства осталось указать, как подбирается вектор $\bar{\pi}$, для которого выполняется соотношение (3.12). Пусть $\bar{\delta}^{(i)} \in \Delta_i(\gamma)$. Поскольку F_i, по определению, ограниченное множество, существует $\max\limits_k \max\limits_{f \in F_i} f_k = L < +\infty$. В качестве $\bar{\pi}^{(i)}$ можно, например, взять вектор, определенный соотношениями:

$$\bar{\pi}^{(i)}_k = \frac{L(\gamma + 1 - k) \cdot \bar{\pi}_{k+1}}{\bar{f}_k} \quad \text{для } k \leq \gamma - 1,$$

$$\bar{\pi}^{(i)}_\gamma = 1, \quad \bar{\pi}^{(i)}_k = 0 \quad \text{для } k > \gamma. \tag{3.21}$$

Действительно, из соотношений (3.21) непосредственно вытекает, что $\bar{\pi}_\kappa \bar{f}_\kappa > L(\gamma-\kappa)\bar{\pi}_{\kappa+1}$ для $\kappa \leq \gamma$. Поскольку $L \geq f_\kappa$ для любого $f \in F_i$, то $\bar{\pi}_\kappa \bar{f}_\kappa > \sum_{s=\kappa} \bar{\pi}_s f_s$. Отсюда, вспоминая определение $\bar{f}$, получаем искомое соотношение (3.12).

§ 4. Равновесие и оптимальность

Вернемся к сформулированной в § 2 задаче (2.1)-(2.3) оптимизации суммарной полезности потребителей. Целевая функция этой задачи представляет собой сумму целевых функций потребителей, взятых с априорно заданными весами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Основной вопрос, касающийся связи между состояниями равновесия и решениями экстремальной задачи типа (2.1)-(2.3), состоит в следующем. При каких условиях можно построить модель MN (в частности, найти функции распределения доходов $\mathcal{D}$) такую, что решение задачи (2.1)-(2.3) оказалось бы состоянием равновесия модели? И наоборот, при каких условиях состояние равновесия модели MN оказывается решением задачи максимизации суммарной полезности с некоторыми весами α? В классической модели экономического равновесия Эрроу-Дебре ответ на этот вопрос содержится в соответствующей теореме эквивалентности. (См. по этому поводу, например, [2, § 19].) В настоящем параграфе показывается, что для модели экономического равновесия с нововведениями ситуация несколько иная, хотя во многом схожая с классической.

Сформулируем экстремальную задачу, у которой ограничения совпадают с соответствующими ограничениями задачи (2.1)-(2.3), а в целевую функцию добавлено еще одно слагаемое.

Найти $(y^{(1)}, f^{(1)}, \ldots, y^{(m)}, f^{(m)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ при условиях:

$$(y^{(i)}, f^{(i)}) \in Y_i \times F_i, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{4.1}$$

$$x^{(j)} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{4.2}$$

$$\sum_i y^{(i)} + \sum w^{(i)} \geq \sum_j x^{(j)}; \tag{4.3}$$

$$\sum \alpha_j u_j(x^{(j)}) + \sum \pi f^{(i)} \longrightarrow max. \tag{4.4}$$

Здесь π - неотрицательный вектор, который можно интерпретировать как вектор цен (весов) нововведений.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\bar{v} = (\bar{y}^{(1)}, \bar{f}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(m)}, \bar{f}^{(m)}, \bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}, \bar{g}^{(1)}, \ldots, \bar{g}^{(m)}, \bar{p}, \bar{\pi})$ - состояние равновесия модели MN. Найдутся векторы $\alpha^* \geq 0$ и $\pi^* \geq 0$ такие, что состояние равновесия $\bar{v}$ доставляет решение задачи (4.1)-(4.4) с целевой функцией, в определение которой входят веса α^*, π^*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\tilde{W}_i(\delta^{(i)})$ множество, состоящее из векторов вида

$$((0,\dots,-1,\ 0,\dots,0)(y,f)(0,\dots,0))$$

размерности $m+\ell+N+2n$. Здесь, как и выше, ℓ - число продуктов; в векторе $(0,\dots,-1,\dots,0)$ размерности m число -1 стоит на i-м месте; $y\in Y_i(\delta^{(i)})$, $f\in F_i(\delta^{(i)})$; вектор $(0,\dots,0)$ имеет размерность $2n$. Введем теперь множество $\tilde{W}$:

$$\tilde{W}=\{\tilde{w}\in R^{(m+\ell+N+2n)}\ \Big|\ \tilde{w}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\delta^{(i)}\in\Delta_i}\tilde{w}(\delta^{(i)})+$$

$$+((\underbrace{0,\dots,0}_{m})(-\sum_{j=1}x^{(j)})(\underbrace{0,\dots,0}_{N})(u_1(x^{(1)}),\dots,u_n(x^{(n)})(1,\dots,-1),$$

$$\tilde{w}(\delta^{(i)})\in\tilde{W}_i(\delta^{(i)}),\ i=1,\dots,m;\ \sum_{i=1}^{m}y(\delta^{(i)})+\sum_j w^{(j)}\geq \tag{4.5}$$

$$\geq\sum_j x^{(j)};\quad x^{(j)}\geq 0,\quad j=1,\dots,n\},$$

$\tilde{W}^*$ - обозначение для замкнутой выпуклой конической оболочки множества $\tilde{W}$.

Сформируем вектор μ (двойственных переменных) размерности $m+\ell+N+2n$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_m,\bar{p},\bar{\pi},\alpha_1,\dots,\alpha_n,\ \nu_1,\dots,\nu_n)$. Здесь $\bar{p}$ и $\bar{\pi}$ взяты из рассматриваемого состояния равновесия $\bar{v}$, $\mu_i=\bar{p}\bar{y}^{(i)}+\bar{\pi}\bar{f}^{(i)}$, $i=1,\dots,m$.

Векторы α и ν определены следующим образом. По определению состояния равновесия,

$$u_j(\bar{x}^{(j)})=\max_{\substack{x\bar{p}\leq \mathcal{D}_j(\bar{y}^{(1)},\bar{f}^{(1)},\dots,\bar{y}^{(m)}\bar{f}^{(m)},\bar{p},\bar{\pi})+w^{(j)}\bar{p},\\ x\geq 0}} u_j(x)$$

т.е. задача отыскания $\bar{x}^{(j)}$ представляет собой задачу выпуклого программирования. По теореме о характеристике задачи выпуклого программирования (см., например,[2]), существуют такие множители $\alpha_j\geq 0$, $\nu_j\geq 0$, что

$$\alpha_j u_j(x)-x\bar{p}-\nu_j\leq 0 \tag{4.6}$$

для всех $x\geq 0$ и данное неравенство обращается в равенство на $x=\bar{x}^{(j)}$.

Покажем, что вектор μ определяет гиперплоскость, опорную к конусу $\tilde{W}^*$ в точке $\tilde{\bar{w}}=(-1,\dots,-1,\ \sum_j w^{(j)}, \sum_i f^{(i)}, u_1(\bar{x}^{(1)}), u_n(\bar{x}^{(n)}),\ -1,\dots,-1)$, т.е.

$$\mu\tilde{w} < 0, \quad \tilde{w} \in \tilde{W}^*, \quad \mu\tilde{\tilde{w}} = 0. \qquad (4.7)$$

Действительно, по определению числа μ_i и по определению состояния равновесия модели MN, имеем $y\bar{p} + f\bar{\pi} \leq \mu_i$ для $(y,f) \in Z(\delta^{(i)})$, $\delta^{(i)} \in \Delta_i$ и $\bar{y}^{(i)}\bar{p} + \bar{f}^{(i)}\bar{\pi} = \mu_i$, $i = 1,\ldots,m$. Отсюда, учитывая еще соотношение (4.6), получаем, что для каждого слагаемого $\tilde{w}'$ вектора $\tilde{w}$ в выражении в фигурных скобках соотношения (4.5) $\tilde{w}'\mu \leq 0$. Следовательно, $\tilde{w}\mu \leq 0$ для $\tilde{w} \in \tilde{W}$, а также для $\tilde{w} \in \tilde{W}^*$. Для точки $\tilde{\tilde{w}}$, по определению, выполняется $\tilde{\tilde{w}}\mu = 0$. Из соотношений (4.7) почти непосредственно вытекает утверждение теоремы. Действительно, предположим противное, т.е. что найдется вектор $(\hat{y}^{(1)}\hat{f}^{(1)},\ldots,\hat{y}^{(m)}\hat{f}^{(m)},$ $\hat{x}^{(1)},\ldots,\hat{x}^{(n)})$, удовлетворяющий условиям (4.I) - (4.3), и

$$\sum_j \alpha_j u_j(\hat{x}^{(j)}) + \sum_i \bar{\pi}\hat{f}^{(i)} > \sum \alpha_j u_j(\bar{x}^{(j)}) + \sum_i \bar{\pi}\bar{f}^{(i)}. \qquad (4.8)$$

В силу соотношений (4.I) - (4.3) точка

$$\hat{\tilde{w}} = (-1,\ldots,-1, \sum_j w^{(j)}, \sum \hat{f}^{(i)}, u_1(\hat{x}^{(1)}),\ldots,u_n(\hat{x}^{(n)}),-1,\ldots,-1)$$

принадлежит множеству $\tilde{W}^*$. Следовательно, должно быть $\hat{\tilde{w}}\mu \leq 0$. Однако соотношение $\tilde{\tilde{w}}\mu = 0$ и неравенство (4.8) в совокупности дают $\hat{\tilde{w}}\mu > 0$. Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Благодаря тому, что в задаче (4.I) - (4.4) целевая функция имеет дополнительное слагаемое πf по сравнению с целевой функцией задачи (2.2) - (2.4), состояние равновесия модели MN хотя и обладает экстремальными свойствами согласно теореме 4, может тем не менее не доставлять решения задаче максимизации суммарной полезности. Легко привести пример такого состояния равновесия. Роль и влияние добавочного слагаемого проясняется с помощью теоремы 5, представляющей собой в определенном смысле обратную к теореме 4.

Подобно тому, как задаче (Δ) была сопоставлена схема (2.7), задаче (4.I) - (4.4) сопоставим схему (4.9). Схема (4.9) определяет сформулированную в § 2 задачу (G,π), если совокупность всех производителей модели MN считать одним производителем, а совокупность всех потребителей - одним потребителем с целевой функцией $\sum \alpha_j u_j$.

Будем называть векторы α и π, входящие в определение целевой функции (4.4), согласованными, если решение задачи (4.I) - (4.4) является одновременно и решением соответствующей задачи (G,π) при $G=\bar{g}S$, где $\bar{g}$ взято из решения задачи (4.I) - (4.4). Напомним, что по теореме I согласованные векторы α,π существуют.

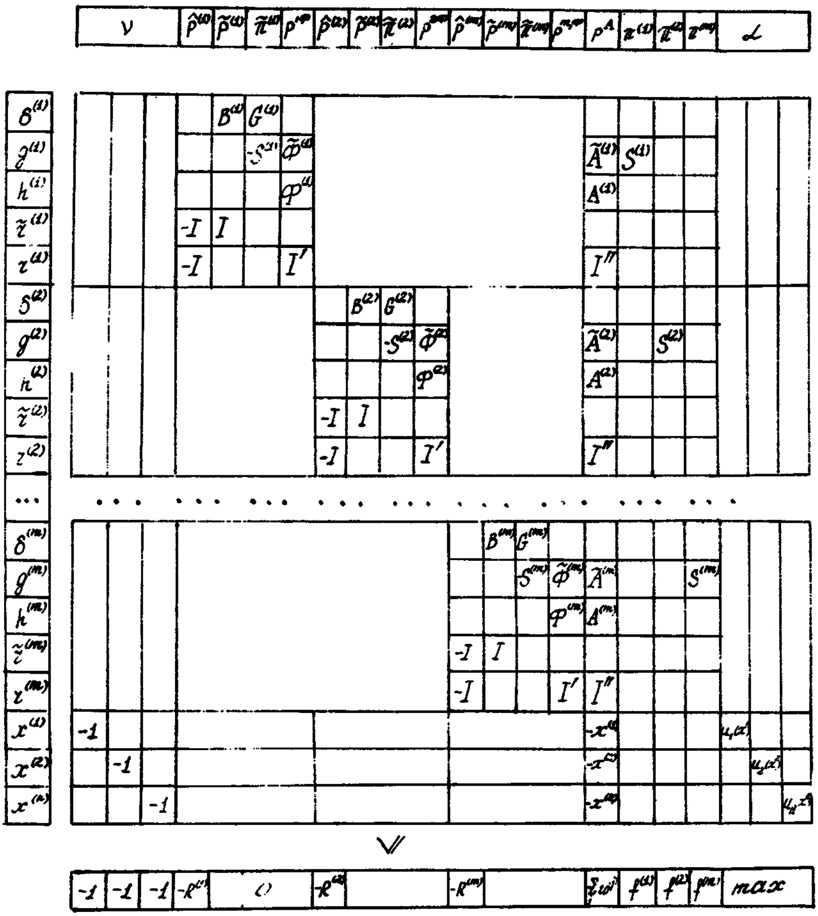
ТЕОРЕМА 5. Пусть $\bar{v}=(\bar{y}^{(1)},\bar{f}^{(k)},\dots,\bar{y}^{(m)},\bar{f}^{(m)},\bar{x}^{(1)},\dots,\bar{x}^{(n)})$ представляет собой решение задачи (4.I) - (4.4) при заданных согласованных векторах α и π^*. Тогда найдутся (линейные) функции распределения доходов $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_{n+r}$, векторы потребления масштабов нововведений $\bar{g}^{(1)},\dots,\bar{g}^{(r)}$ и цены $\bar{p}$ и $\bar{\bar{\pi}}$ такие, что $\bar{v}$ вместе с $\bar{g}^{(1)},\dots,\bar{g}^{(r)}$, $\bar{p}$ и $\bar{\bar{\pi}}$ оказывается состоянием равновесия модели MN с данными функциями $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_{n+r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\delta}=(\bar{\delta}^{(1)},\dots,\bar{\delta}^{(m)})$ - план нововведений, на котором реализуется решение $\bar{v}$. Характеристические (двойственные) переменные для решения задачи $(\bar{\delta})$ обозначим через $\rho=(\rho^A,\rho^{\Phi,1},\dots,\rho^{\Phi,m})$. Здесь вектор ρ^A соответствует неравенствам $z^A(\bar{\delta})+g(\bar{\delta})\tilde{A}(\bar{\delta})+hA+\sum_j w^{(j)}\geq\sum_j x^{(j)}$, т.е. представляет собой цены на общие для всей системы продукты, векторы $\rho^{\Phi,i}$ относятся к неравенствам

$$g(\bar{\delta})\tilde{\Phi}(\bar{\delta})+h\Phi\geq z^{\Phi,i}(\bar{\delta}^{(i)}),$$

т.е. являются ценами на внутренние для соответствующих производителей продукты. Отметим, что согласно теореме двойственности для задачи линейного программирования для характеристических цен ρ выполнено соотношение $a^{k,s}\rho+\pi^*_k=0$ для тех нововведений k, для которых $\bar{\delta}_k=1$, и для тех способов s, создаваемых данным нововведением k, которые входят в решение с положительной интенсивностью. Подобно тому, как это было сделано при доказательстве предложения 3, вычислим для данных ρ внутренние цены нововведений $\tilde{\pi}$, цены на ресурсы $\hat{p},\tilde{p}$ и вектор ν так, чтобы совокупный вектор цен $(\nu,\hat{p},\tilde{p},\tilde{\pi},\rho,\pi^*)$ был характеристическим для задачи выпуклого программирования вида (4.9), у которой $G=\bar{g}S=\bar{G}$.
А именно положим $\nu_j=\alpha_j u_j(\bar{x}^{(j)})-\bar{x}^{(j)}\rho^A$, $j=1,\dots,n$; $\hat{p}=\tilde{p}=\rho$, $\tilde{\pi}_k=b^{(k)}\rho/\bar{G}_k$ для тех k, у которых $\bar{G}_k>0$. Для тех k, для которых $\bar{G}_k=0$, $\tilde{\pi}_k=\max_s a^{ks}\rho+\pi^*_k+1$, если $\max_s a^{ks}\rho+\pi^*_k>0$, и $\tilde{\pi}_k=0$ - в противном случае. Здесь a^{ks} - строка, составленная из соответствующих строк мат-

Схема (4.9)



риц $\tilde{A}$ и $\tilde{\Phi}_i$, относящихся к нововведению κ и способу s, порождаемому этим нововведением. Максимум берется по всем способам, порождаемым нововведением κ. Учитывая, что p-характеристический вектор для задачи $(\bar{\delta})$, непосредственно проверяется, что $(\nu, p, p, \hat{\pi}, p, \pi^*, \alpha)$ - характеристический вектор задачи (4.9), т.е. скалярное произведение этого вектора на любую строку матрицы схемы (4.9) не больше нуля, а для строк, формирующих решение $\bar{v}$, это произведение строго равно нулю.

Вычислив скалярные произведения полученного характеристического вектора на способы (строки матрицы схемы (4.9)), относящиеся к произвольно выбранному производителю i, умножив их на соответствующие интенсивности способов при решении $\bar{v}$ и сложив все вместе, получим соотношение

$$(\bar{\varphi}^{(i)}, \bar{y}^{(i)})p + \bar{f}^{(i)}\pi^* = R^{(i)}p, \quad i = 1, \dots, m. \qquad (4.IO)$$

Рассмотрим теперь для произвольного i задачу максимизации функции $(\varphi^{(i)}, y^{(i)})p$ при ограничениях: $-\delta^{(i)}B + \tilde{z}^{(i)} \geq 0$,

$$\varphi^{(i)} = z^{(i)\Phi} + g^{(i)}\tilde{\Phi}^{(i)} + h^{(i)}\Phi^{(i)}, \quad y^{(i)} = z^{(i)A} + g^{(i)}\tilde{A}^{(i)} + h^{(i)}A,$$

$z^{(i)} = (z^{(i)\Phi}, z^{(i)A}) \geq 0$, $z^{(i)} + \tilde{z}^{(i)} = K^{(i)}$, $\delta^{(i)}$ – булев вектор. Здесь переменными являются $\delta^{(i)}, g^{(i)}, h^{(i)}, z^{(i)}, \tilde{z}^{(i)}$ Назовем её задачей (p, π^*).
Эта задача, очевидно, является частным случаем задачи (2.I - - 2.3).
Обозначим её решение через $\hat{\delta}^{(i)}, \hat{g}^{(i)}, \hat{h}^{(i)}, \hat{z}^{(i)}, \hat{\tilde{z}}^{(i)}$.
Соответствующая задача линейного программирования представляется в виде следующей схемы:

	$\hat{p}$	$\tilde{p}$	π	1
δ		$-B$	G	
g			$-S$	$\Phi_{p^\Phi} + A_{p^A} + S_{\pi^*}$
h				$-\Phi_{p^\Phi} + A_{p^A}$
$\tilde{z}$	$-I$	$+I$		
z	$-I$			p
	$-R$	0	0	max

(4.II)

Здесь в обозначениях опущен индекс i. Согласно теореме I найдется такой вектор $\hat{\pi}$, что $(\hat{\delta}^{(i)}, \hat{g}^{(i)}, \hat{h}^{(i)}, \hat{z}^{(i)}, \hat{\hat{z}}^{(i)})$ оказывается решением задачи линейного программирования с ограничениями вида (4.II) при $G = \hat{g}^{(i)} S = \hat{G}$ и целевой функцией $\varphi^{(i)} p^{\Phi} + y^{(i)} p^{A} + f^{(i)} \pi^* + f^{(i)} \hat{\pi}$. Здесь, как и выше,

$$\varphi^{(i)} = z^{(i)\Phi} + g\tilde{\Phi}^{(i)} + h^{(i)} \Phi^{(i)}, \quad y^{(i)} = z^{(i)A} + g^{(i)}\tilde{A}^{(i)} + h^{(i)} A^{(i)}, \quad f^{(i)} = g^{(i)} S^{(i)},$$

т.е. данная целевая функция отличается от целевой функции задачи (4.II) добавкой $f^{(i)}\hat{\pi}$. Вычислим непосредственно характеристические цены $(\hat{p}, \tilde{p}, \pi, \hat{\pi})$ (двойственные переменные), соответствующие решению $(\hat{\delta}^{(i)}, \hat{g}^{(i)}, \hat{h}^{(i)}, \hat{z}^{(i)}, \hat{\hat{z}}^{(i)})$ данной задачи линейного программирования.

Положим $\hat{p} = \tilde{p} = p$, $\pi_k = \hat{\pi}_k = b^{(k)} p / \hat{G}_k$, если $\hat{G}_k > 0$. Для тех k, для которых $\hat{G}_k = 0$, $\pi_k = \max_s a^{ks} p + \pi_k^* + 1$, $\hat{\pi}_k = 0$, если $\max_s a^{ks} p + \pi_k^* > 0$, и $\pi_k = \hat{\pi}_k = 0$ – в противном случае. Непосредственно проверяется, как это здесь уже неоднократно проделывалось, что вычисленные таким образом цены $(p, p, \pi, \hat{\pi})$ являются характеристическими для рассматриваемой задачи линейного программирования. Следовательно, имеет место соотношение

$$R^{(i)} p = (\hat{\varphi}^{(i)}, \hat{y}^{(i)}) p + \hat{f}^{(i)} \pi^* + \hat{f} \hat{\pi}.$$

Сравнивая это соотношение с (4.I0) и учитывая, что $(\hat{\varphi}^{(i)}, \hat{y}^{(i)})$ – решение задачи (p, π^*) и $\hat{f}^{(i)} \hat{\pi} \geqslant 0$, получаем

$$(\bar{\varphi}^{(i)}, \bar{y}^{(i)}) p + \bar{f}^{(i)} \pi^* = \max_{(\varphi^{(i)}, y^{(i)}, f^{(i)}) \in W_i} (\varphi^{(i)}, y^{(i)}) p + f^{(i)} \pi^*. \qquad (4.I2)$$

Покажем теперь, что $\varphi^{(i)} p^{\Phi} = 0$. Действительно, по определению, $\bar{\varphi}^{(i)} = z^{(i)\Phi}(\bar{\delta}) + \bar{g}(\bar{\delta}) \Phi^{(i)}(\bar{\delta}) + \bar{h}\Phi$. Соотношение (4.9) дает $\bar{\varphi}^{(i)} \geqslant 0$. А поскольку p – характеристические цены в задаче $(\bar{\delta})$, то неравенство $\bar{\varphi}_k^{(i)} > 0$ влечет $p_k^{\Phi} = 0$. Следовательно, $\bar{\varphi}^{(i)} p^{\Phi} = 0$. В силу этого равенства, а также с учетом того, что

$$V_i = Y_i \times F_i = \{(y^{(i)}, f^{(i)}) | (\varphi^{(i)}, y^{(i)}, f^{(i)}) \in W_i, \ \varphi^{(i)} \geqslant 0\},$$

из соотношения (4.I2) непосредственно получается необходимое для доказательства теоремы соотношение (3.8) из определения состояния равновесия, где в качестве $\bar{p}$ взято p^{A}.

Обратимся теперь к остальным соотношениям, определяющим состояние равновесия. Неравенства (3.6) для $\bar{v}$ выполнены по определению. Функции распределения доходов $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{n+z}$ определим в форме $\mathcal{D}_j(y^{(1)}, f^{(1)}, \ldots, y^{(m)}, f^{(m)}, \bar{p}, \pi) = \sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} y^{(i)} \bar{p}$ для $j = 1, \ldots, n$ и в форме $\mathcal{D}_j(y^{(1)}, f^{(1)}, \ldots, y^{(m)}, f^{(m)}, \bar{p}, \pi) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} f^{(i)} \pi \qquad \text{для } j = m+1, \dots, m+r, \qquad (4.13)$$

где

$$\theta_{ij} \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} = 1, \quad \sum_{j=n+1}^{n+r} \theta_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Коэффициенты $\{\theta_{ij}\}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n+r$, а также векторы потребления масштабов использования нововведений $(\bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(j-n)})$, $j = n+1, \dots, n+r$, определяются (неоднозначно) из соотношений (4.13) и уравнений:

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} \bar{y}^{(i)} \bar{p} = \bar{x}^{(j)} \bar{p}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} \bar{f}^{(i)} \pi = \bar{g}^{(j-n)} \pi, \ j = n+1, \dots, n+r,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{f}^{(i)} = \sum_{j=n+1}^{n+r} \bar{g}^{(j-n)},$$

$$\bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(n+r)} \geq 0.$$

Тогда соотношения (3.7) и (3.10) также оказываются выполненными по определению. И наконец, соотношение (3.9) имеет место в силу того, что $\bar{p}$ - характеристические цены для задачи выпуклого программирования, представленной на схеме (4.9). Доказательство теоремы завершается.

§ 5. Об экономической интерпретации факта существования равновесия модели с нововведениями

Экономическое равновесие в классическом случае означает существование такой ситуации, когда интересы всех частей экономической системы (потребителей и производителей) оказываются согласованными. В силу теоремы эквивалентности (см. например, [2, § 19]) между состояниями равновесия и точками, лежащими на границе Парето, при любом глобальном критерии оптимальности гарантируется существование такой ситуации, при которой частные интересы производителей и потребителей согласуются с общими, воплощенными в данном глобальном критерии оптимальности с помощью чисто экономических средств.

Теоремы I, 3-5 распространяют этот вывод на случай наличия нововведений. Однако вопрос состоит в том, какой ценой это достигается. Рассмотрим полученные результаты более детально.

Теорема I показывает, что в глобальной оптимизационной задаче, учитывающей нововведения, существуют оптимальные оценки, имеющие ту же природу, что и оценки задачи линейного программирования, хотя исходная задача содержит булевы переменные. Однако при этом с необходимостью появляется новое образование: оптимальные оценки масштабов внедрения нововведений. Оценок продуктов и ресурсов оказывается недостаточно, как показывает пример I.

Пример I вместе с теоремами I, 3-5 приводит к следующему выводу: в общем случае не существует таких цен на продукты и ресурсы, при которых производители были бы заинтересованы в производстве и внедрении нововведений, а потребители были бы заинтересованы в использовании результатов этих нововведений.

Введение же оценок объемов использования нововведений позволяет изменить ситуацию. Экономическое равновесие существует, если в результат производственной деятельности производителей включается и экономически оценивается сам факт реализации нововведений с учетом масштаба их последующего внедрения. Таким образом, в экономической системе производятся продукты в обычном смысле слова и "продукты", представляющие собой нововведения. Количество "продуктов" измеряется масштабом их внедрения. Экономическую оценку (положительные цены) получают те произведенные блага, которые признаются обществом, т.е. находят своих потребителей. Потребителями обычных продуктов являются обычные потребители, а вот кто является потребителем "продуктов" (нововведений)? Это вопрос экономической интерпретации. В определении понятия экономического равновесия для модели MN просто постулируется наличие потребителей нововведений (потребители с номерами $n+1, \ldots, n+r$ и соответствующими функциями распределения доходов $\mathcal{D}_{n+1}, \ldots, \mathcal{D}_{n+r}$). Их экономическая природа, обоснованность реальности их существования - это особые вопросы, здесь не рассматриваемые. Если считать, что носителем общей цели общества в целом является государство, то можно принять, что государство и должно выступать в роли потребителя нововведений. Однако в реальной экономической системе эту функцию государство должно поручить конкретным органам, которые, вообще говоря, могут иметь свои локальные интересы. В данной работе эта проблема только констатируется. Конкретное ее изучение охватывает многие аспекты экономической организации, ставит ряд трудных проблем и приводит к далеко идущим выводам. Для того чтобы проиллюстрировать, о каких проблемах и выводах может идти речь, представим себе, например, что потребителями нововведений являются министерства и Государственный комитет по науке и технике. Тогда в этих организациях должен быть создан аппарат для "покупки" нововведений. Порядок его формирования определяет функции $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{n+r}$, удовлетворяющие закону Вальраса, а порядок расходования - целевые функции $\pi^{(n+1)}, \ldots, \pi^{(n+r)}$. Не исключено, что при этом общая стоимость произведенного в системе общественного продукта (стоимость продукции плюс стоимость нововведений) возрастет по сравнению со стоимостью, подсчитанной в рамках действующей практики ценообразования. Насколько существенным может быть увеличение общей стоимости - судить априори затруднительно. Оно определяется увеличением прибыли производителей, а последняя, в свою очередь, определяется стоимостью затраченных ресурсов. Возрастание же стоимости затрачиваемых ресурсов возможно за счет повышенной, по сравнению с действующей практикой, оценки ресурсов, связанных с созданием и внедрением нововведений. Система ценообразования должна будет включать в себя методику и механизм образования цен на нововведения. При этом возникают проблемы, так сказать, технического порядка: что является единицами нововведений, в которых должен измеряться соответствующий масштаб внедрения, как подсчитывать этот масштаб внедрения, особенно в динамическом случае, и т.п.

Литература

1. БЕРЖ К. Общая теория игр нескольких лиц. М., Физматгиз, 1961.

2. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., "Наука", 1973.

Поступила в ред.-изд. отдел
25. VI. 1976 г.