1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 17(34)

Смежные математические вопросы

УДК 513.88

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ СУММИРУЕМЫХ С ВЕСОМ ФУНКЦИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р.И.Щербакова

В настоящей заметке, используя результаты работы [1], исследуются эволюционные представления алгебры суммируемых с весом функций и устанавливается взаимно-однозначное соответствие между такими представлениями и полугруппами некоторого класса, определение которого дается ниже.

Пусть ρ - функция на $R_+=[0,+\infty]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\rho(t)>0, \quad 0\le t<\infty$;

2) ρ непрерывна на R_+;

3) $\rho(t+s)\le\rho(t)\rho(s), \quad 0\le t, \ s<\infty$.

Можно показать, что $\rho(t)\le Me^{wt}$, $0\le t<\infty$, где $w<\infty$ и $M>0$ - некоторые постоянные.

Обозначим через $L^1(\rho)$ множество функций на R_+, для которых $\int_0^\infty\rho(t)|f(t)|dt<+\infty$. Пространство $L^1(\rho)$ с нормой

$$\|f\|_\rho=\int_0^\infty\rho(t)|f(t)|dt$$

является коммутативной банаховой алгеброй относительно свертки [3].

Пусть W - пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, принадлежащих $L^1(\rho)$ вместе со своими производными; W^0 - подпространство W, состоящее из функций, носители которых содержатся в $R^+=(0,+\infty)$; X - банахово пространство; $\mathcal{L}(X)$ - алгебра линейных непрерывных операторов из X в X, снабженная сильной операторной топологией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Представление T алгебры $L^1(\rho)$ в X называется эволюционным представлением, если существует последовательность функций φ_n, $n = 1,2,\ldots$, принадлежащих W^0, таких, что $T(\varphi_n)x \to x$ при $n \to \infty$ для всех x из X.

Нетрудно понять, что если T является эволюционным представлением в указанном выше смысле, то T будет эволюционным и в смысле определения работы [I].

Обозначим через T_0 сужение T на W^0. И пусть A - производящий оператор эволюционного представления T, который определяется так же, как и в [I], т.е. $\mathcal{D}(A)$ - область определения оператора A, или множество тех $x \in X$, для которых существует такой $y \in X$, что $T_0'(f)x = T_0(f)y$, $f \in W^0$ и $Ax = y$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

Можно показать, что оператор A обладает следующими свойствами:

I) A - замкнутый линейный оператор;

2) $T_0'x = AT_0x$, $x \in X$;

3) $\mathcal{D}(A)$ всюду плотно в X.

Заметим, что свойство 3) следует из эволюционности представления T. Действительно, $T(f)x \in \mathcal{D}(A)$ для всех x из X и f из W^0, в частности, для любого x из X множество $\mathcal{D}(A)$ содержит последовательность $T(\varphi_n)x$, $n = 1,2,\ldots$, которая в силу эволюционности представления T сходится к x.

Таким образом, каждому эволюционному представлению мы сопоставили замкнутый линейный оператор с плотной областью определения. Оказывается, что это соответствие взаимно-однозначно [I].

Дальнейшее изучение свойств оператора A основывается на теореме 2 работы [I], которая остается справедливой и в нашем случае.

Пусть A – производящий оператор эволюционного представления T. Тогда для любых $f \in W$ и $x \in X$ выполняется

$$T(-f')x = AT(f)x + f(0)x, \tag{I}$$

$$T(f)A \subset AT(f). \tag{2}$$

Если теперь в качестве $f \in W$ взять функцию $t \to e^{-\lambda t}$, то из соотношений (I) и (2) получим:

$$\lambda T(e^{-\lambda t})x = AT(e^{-\lambda t})x + x, \tag{3}$$

$$AT(e^{-\lambda t}) \supset T(e^{-\lambda t})A. \tag{4}$$

Заметим, что функции $t \to t^n e^{-\lambda t}$, $t > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, принадлежат пространству W, если только $\operatorname{Re}\lambda > w$. Здесь w – постоянная, такая, что $\rho(t) \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.

Таким образом, для любого $\lambda \in C : \operatorname{Re}\lambda > w$ существует резольвента $R(\lambda, A)$ оператора A и $R(\lambda, A) = T(e^{-\lambda t})$. Тогда

$$R^{(n)}(\lambda, A) = (-1)^n T(t^n e^{-\lambda t}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и

$$\|R^{(n)}(\lambda, A)\| \leq C\int_0^\infty \rho(t) t^n e^{-\lambda t}\, dt$$

для любого вещественного $\lambda > w$. Следовательно, оператор A порождает полугруппу класса L_0 такую, что $\|T(t)\| \leq C\rho(t)$. Более того, в силу оценки $\rho(t) \leq Me^{wt}$, $t > 0$, очевидно, что $T(t)$ является полугруппой класса C_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что полугруппа $T(t)$ принадлежит классу C_ρ, если для нее выполняются условия:

1) $T(t)$ принадлежит классу C_0;

2) $\|T(t)\| \leq C\rho(t)$, где $C > 0$ – произвольная постоянная.

Таким образом, каждому эволюционному представлению алгебры $L^1(\rho)$ можно сопоставить полугруппу класса C_ρ.

Обратно, пусть $T(t)$ - полугруппа класса C_ρ. Определим отображение T алгебры $L^1(\rho)$ в $\mathcal{L}(X)$ по формуле:

$$T(f)x=\int_0^\infty f(t)T(t)x\,dt. \tag{5}$$

Нетрудно понять, что отображение T является эволюционным представлением алгебры $L^1(\rho)$. В качестве последовательности φ_n, $n=1,2,\ldots$, из определения I_0 можно, например, взять последовательность функций $\varphi_n\in W^0$, $n=1,2,\ldots$ таких, что

1) $\varphi_n(t)>0$, $0<t<\infty$;
2) $\varphi_n(t)=0$, если $t\notin[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$;
3) $\int_0^\infty \varphi_n(t)\,dt=1$, $n=1,2,\ldots$.

Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА I. Между эволюционными представлениями алгебры $L^1(\rho)$ и полугруппами класса C_ρ существует взаимно-однозначное соответствие.

Из этой теоремы и теоремы 5 работы [2] непосредственно следует теорема порождения для эволюционных представлений алгебры $L^1(\rho)$.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы замкнутый линейный оператор A с плотной в X областью определения был производящим оператором эволюционного представления алгебры $L^1(\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого λ, принадлежащего полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda>w$, существовала резольвента $R(\lambda,A)$ оператора A и выполнялись неравенства

$$\|R^{(n)}(\lambda,A)\|\le C\int_0^\infty \rho(t)t^n e^{-\lambda t}\,dt,\ \lambda>w,\ n=0,1,2,\ldots$$

Литература

1. ВУВУНИКЯН Ю.М. Эволюционные представления алгебры суммируемых функций в локально-выпуклом пространстве. - "Докл. АН СССР", 1974, т. 216, № 4, с. 724-727.

2. ЗАБРЕЙКО П.П., ЗАФИЕВСКИЙ А.В. Об одном классе полугрупп. - "Докл. АН СССР", 1969, т.189, № 5, с. 934-937.

3. ЭДВАРС Р. Функциональный анализ (теория и приложения).- М., "Мир", 1969.

Поступила в ред.-изд.отд.
20. I. 1975 г.