1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 17(34)

Выпуклый анализ

УДК 513.88

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЕЛЕКТОРЫ ОТОБРАЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ШАР СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.Э.Линке

В настоящей статье, во-первых, излагаются с доказательствами теоремы о селекторах, частично анонсированные автором ранее в заметке [1], во-вторых, излагаются приложения полученных теорем к сублинейным операторам, а также некоторым другим задачам анализа и топологии.

Всюду через X обозначается сепарабельное банахово пространство, а через X' - сопряженное к X пространство, наделенное слабой топологией $\sigma(X',X)$, определяемой двойственностью между X' и X. Пусть $\mathcal{K}(X')$ - совокупность всех непустых выпуклых слабо компактных подмножеств из X', а Q - топологическое пространство. Рассмотрим слабо полунепрерывное снизу отображение*) $\Phi: Q\to\mathcal{K}(X')$, действующее в шар $S_{X'}$, т.е. $\Phi(t)\subset S_{X'}$ для всех $t\in Q$. Нас будут интересовать условия (необходимые и достаточные) на топологическое пространство Q, обеспечивающие существование слабо непрерывных селекторов у любого отображения Φ, т.е. существование слабо непрерывного отображения $\varphi: Q\to X'$ такого, что $\varphi(t)\in\Phi(t)$ для всех точек $t\in Q$.

---

*) Напомним, что многозначное отображение $\Phi: Q\to S$ топологических пространств называется полунепрерывным снизу, если для любого открытого множества $\mathcal{U}\subset S$ множество $\{t\in Q:\Phi(t)\cap\mathcal{U}\neq\emptyset\}$ открыто.

Из весьма общих теорем о селекторах Майкла [2, 3] можно извлечь следующий результат.

ТЕОРЕМА I. Если Q – паракомпактное хаусдорфово пространство, то для любого сепарабельного банахова пространства X и любого слабо полунепрерывного снизу отображения $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$, действующего в шар $S_{X'}$, существуют слабо непрерывные селекторы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие сепарабельности X и условие действия отображения Φ в шар $S_{X'}$ в теореме I, как показывают примеры в [4], являются существенными. В тоже время, как показано в заметке [I], условие паракомпактности Q можно заменить более слабым условием нормальности, которое является также необходимым. Именно справедлива

ТЕОРЕМА 2. Следующие условия для T_1-пространств Q эквивалентны:

а) Q - нормальное пространство;

б) для любого сепарабельного банахова пространства X и любого слабо полунепрерывного снизу отображения $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$, действующего в шар $S_{X'}$, существуют слабо непрерывные селекторы;

в) справедливо; б) в частном случае, когда X есть числовая прямая.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2, уточним теорему I из заметки [I], относящейся к существованию слабо непрерывного селектора у непрерывного в слабой топологии Хаусдорфа отображения $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$, действующего в шар $S_{X'}$. Как известно, в этом случае для существования слабо непрерывного селектора не нужно накладывать каких-либо аксиом отделимости на топологическое пространство Q. Однако для существования специальных селекторов, например, "проходящих" через фиксированное конечное множество точек, лежащих в графике Φ, такие условия необходимы.

Действительно, пусть $X = R$, а Q – регулярное пространство, не являющееся вполне регулярным и на котором любая непрерывная функция является константой. Тогда понятно, что у отображения $\Phi : Q \to \mathcal{K}(R')$, при котором каждой точке $t \in Q$ сопоставляется сегмент [0,I], нет селекторов, проходящих через точки $(t_0, 0)$, $(t_1, 1)$, где $t_0 \neq t_1$.

Если пространство Q вполне регулярно, то специальные селекторы существуют, точнее, справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Пусть Q – вполне регулярное T_1-пространство, X - сепарабельное банахово пространство, а отображение $\Phi : Q \to \mathcal{K}(X')$ непрерывно в слабой топологии Хаусдорфа и действует в шар $S_{X'}$. Для любого конечного набора различных точек $t_i \in Q$ и точек $l_i \in \Phi(t_i)$ ($i = 1,2,\ldots,n$) существует слабо непрерывный селектор φ отображения Φ такой, что $\varphi(t_i) = l_i$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Рассмотрим пространство $BC(Q)$ ограниченных непрерывных функций, определенных на Q, с естественным частичным порядком и с обычной нормой. Непрерывное в слабой топологии Хаусдорфа отображение $\Phi : Q \to \mathcal{K}(X')$, действующее в шар $S_{X'}$, порождает ограниченный сублинейный оператор $P : X \to BC(Q)$ по формуле

$$(Px)(t) = \sup_{l \in \Phi(t)} l(x) \qquad (x \in X,\ t \in Q).$$

(см. теорему I в [5] и замечание к ней). По теореме Крейнов-Какутани KB-линеал ограниченных элементов*) $BC(Q)$ можно реализовать с помощью оператора F как пространство $C(\hat{Q})$ непрерывных функций на компакте $\hat{Q}$. При этом известно, что в качестве компакта $\hat{Q}$ можно взять стоун-чеховскую компактификацию βQ топологического пространства Q. Будем считать, что Q топологически содержится в βQ. Тогда оператор F

---

*) Относительно терминологии и результатов теории полуупорядоченных пространств см. [8].

есть оператор продолжения на βQ ограниченных непрерывных функций, заданных на Q. Рассмотрим оператор $\hat{P}=F\circ P:X\to C(\beta Q)$. Оператор $\hat{P}$ ограничен и сублинеен. Сопоставим оператору $\hat{P}$ по теореме I из [5] отображение $\Phi_{\hat{P}}:Q\to\mathcal{K}(X')$.

Отображение $\Phi_{\hat{P}}$ непрерывно в слабой топологии и действует в шар $S_{X'}$ радиуса $\|\hat{P}\|$. Так как $(Px)(t)=(\hat{P}x)(t)$ для всех $x\in X$ и $t\in Q$, то сужение отображения $\Phi_{\hat{P}}$ на Q совпадает с Φ. Рассмотрим вспомогательное отображение $\tilde{\Phi}_{\hat{P}}:\beta Q\to\mathcal{K}(X')$, действующее по следующей формуле

$$\tilde{\Phi}_{\hat{P}}(t)=\begin{cases} l_i, & \text{если } t=t_i \ (i=1,2,\ldots,n),\\ \Phi_{\hat{P}}(t) - & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Это отображение будет слабо полунепрерывным снизу. Применяя к нему теорему I, получим существование слабо непрерывного селектора $\varphi:\beta Q\to X'$ отображения $\tilde{\Phi}_{\hat{P}}$ такого, что $\varphi(t_i)=l_i$ для всех $i=1,2,\ldots,n$. При этом сужение φ на Q является селектором отображения Φ с искомым свойством. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 идейно близко доказательству теоремы 3. Нужны лишь некоторые вспомогательные построения. Рассмотрим конус $\widetilde{BC(Q)}$ всех ограниченных полунепрерывных снизу функций, определенных на вполне регулярном T_1-пространстве. Пусть βQ - компактификация Стоуна-Чеха пространства Q. Так же, как и в доказательстве теоремы 3, считаем, что Q топологически содержится в βQ. Тогда оператор F, осуществляющий изоморфизм KB-линеалов ограниченных элементов $BC(Q)$ и $C(\beta Q)$, есть оператор продолжения на βQ ограниченных непрерывных функций, определенных на Q. Обратный оператор F^{-1} оператора F - оператор сужения на Q непрерывных функций, определенных на βQ.

Используя оператор F, построим отображение $\tilde{F}:\widetilde{BC(Q)}\to\widetilde{BC(\beta Q)}$ следующим образом. Пусть $f\in\widetilde{BC(Q)}$. Рассмотрим множество в $BC(Q)$ вида $И_f=\{h\in BC(Q):h<f\}$. Так как Q вполне регулярно, то множество $И_f$ не является пустым и поточечный супремум $И_f$ равен f. Положим*) $\tilde{F}(f)=\sup\{F(h):h\in И_f\}$.

ж) Супремум всюду вычисляется поточечно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Оператор $\widetilde{F}$ обладает следующими свойствами:

1^0. $\widetilde{F}(f_1+f_2)\geqslant\widetilde{F}(f_1)+\widetilde{F}(f_2)$ для всех $f_1,f_2\in\widetilde{BC(Q)}$;

2^0. $\widetilde{F}(f_1)\leqslant\widetilde{F}(f_2)$, если $f_1\leqslant f_2$;

3^0. $\widetilde{F}(\lambda f)=\lambda\widetilde{F}(f)$ для всех $f\in\widetilde{BC(Q)}$ и $\lambda\geqslant 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим свойство 1^0. Имеем, что $И_{f_1+f_2}\supset И_{f_1}+И_{f_2}$ для всех $f_1, f_2\in\widetilde{BC(Q)}$. Поэтому

$$\widetilde{F}(f_1+f_2)=\sup\{F(h):h\in И_{f_1+f_2}\}\geqslant\sup\{F(h_1)+F(h_2):h_1\in И_{f_1},h_2\in И_{f_2}\}=$$
$$=\sup\{F(h_1):h_1\in И_{f_1}\}+\sup\{F(h_2):h_2\in И_{f_2}\}=\widetilde{F}(f_1)+\widetilde{F}(f_2),$$

что и требовалось показать. Также просто проверяются свойства 2^0, 3^0. Доказательство окончено. Для нормальных T_1-пространств Q, кроме того, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если Q - нормальное T_1-пространство, то $\widetilde{F}(f_1+f_2)=\widetilde{F}(f_1)+\widetilde{F}(f_2)$ для всех $f_1, f_2\in\widetilde{BC(Q)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения отображения $\widetilde{F}$ справедливо равенство

$$\widetilde{F}(f_1+f_2)(t)=\widetilde{F}(f_1)(t)+\widetilde{F}(f_2)(t) \tag{I}$$

для всех $f_1, f_2\in\widetilde{BC(Q)}$ и $t\in Q$. Таким образом, осталось доказать, что при $t\in\beta Q\setminus Q$ также выполнено равенство (I). Выберем произвольно точку $t_0\in\beta Q\setminus Q$. Так как нормальное T_1-пространство вполне регулярно, то по свойству 1^0 предложения 4 справедливо неравенство

$$\widetilde{F}(f_1+f_2)(t_0)\geqslant\widetilde{F}(f_1)(t_0)+\widetilde{F}(f_2)(t_0). \tag{2}$$

Пусть $\widetilde{F}(f_1+f_2)(t_0)>c^0>c'$. Покажем, что всегда

$$\widetilde{F}(f_1)(t_0)+\widetilde{F}(f_2)(t_0)>c', \tag{3}$$

каковы бы ни были числа c^0 и c'. Тогда в силу неравенства (2) справедливо равенство (I) для точки t_0. Для того чтобы проверить неравенство (3), достаточно выбрать функции h_1, h_2 из $И_{f_1}$ и $И_{f_2}$ соответственно, такие, что $F(h_1)(t_0)+F(h_2)(t_0)>c'$. Так как функция $\widetilde{F}(f_1+f_2)$ полунепрерывна снизу на βQ и $\widetilde{F}(f_1+f_2)(t_0)>c^0$, то существует окрестность $V(t_0)$ точки t_0

в βQ такая, что $\tilde F(f_1+f_2)(t) > c^0$ для всех точек $t\in V(t_0)$. Далее, замыкание $\bar Q = \beta Q$, поэтому найдется сеть $\{t_\beta\}\subset Q$, сходящаяся к t_0. Не умаляя общности, можно считать, что $\{t_\beta\}\subset V(t_0)$. Откуда в силу (I) имеем:

$$\tilde F(f_1+f_2)(t_\beta) = \tilde F(f_1)(t_\beta) + \tilde F(f_2)(t_\beta) > c^0 > c'. \qquad (4)$$

Обозначим через $\alpha'_\beta = \tilde F(f_1)(t_\beta)$, $\alpha^2_\beta = \tilde F(f_2)(t_\beta)$. Числовые сети $\{\alpha'_\beta\}$, $\{\alpha^2_\beta\}$ ограничены, поэтому можно считать их сходящимися: $\alpha'_\beta \to \alpha'$, $\alpha^2_\beta \to \alpha^2$. Из (4) следует, что $\alpha'+\alpha^2 > c^0 > c'$. Поэтому, переходя к подсетям, можно считать, что $\tilde F(f_1)(t_\beta) = \alpha'_\beta > \alpha' - \varepsilon$, $\tilde F(f_2)(t_\beta) = \alpha^2_\beta > \alpha^2 - \varepsilon$, где $0<\varepsilon<\frac{c^0-c'}{2}$.

Сеть $\{t_\beta\}$ является замкнутым множеством в Q. Поэтому, используя лемму Урысона, найдем функции h_1, $h_2\in BC(Q)$ такие, что $h_1\le f_1$, $h_2 < f_2$, для которых на сети $\{t_\beta\}$ имеем $h_1(t_\beta) = \alpha'-\varepsilon$, $h_2(t_\beta) = \alpha^2-\varepsilon$. Откуда получаем, что

$$F(h_1)(t_0) + F(h_2)(t_0) = \lim_\beta F(h_1)(t_\beta) + \lim_\beta F(h_2)(t_\beta) =$$

$$= \lim_\beta h_1(t_\beta) + \lim_\beta h_2(t_\beta) = \alpha' + \alpha^2 - 2\varepsilon > c',$$

что и требовалось доказать. Предложение 4 доказано.

Теперь определим еще один оператор $\tilde F^{-1}: \widetilde{BC(\beta Q)} \to \widetilde{BC(Q)}$ по формуле

$$\tilde F^{-1}(g) = \sup\{F^{-1}(h) : h\in C(\beta Q),\ h<g\}.$$

По определению оператора $\tilde F^{-1}$ ясно, что он является оператором сужения полунепрерывной снизу функции $g\in \widetilde{BC(\beta Q)}$ на Q. Отображение $\tilde F^{-1}$ обладает всеми свойствами, установленными для $\tilde F$ в предыдущих предложениях. Кроме того, для всех функций $f\in\widetilde{BC(Q)}$ имеем $\tilde F^{-1}(\tilde F(f)) = f$, так как сужение $\tilde F(f)$ на Q совпадает с f.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2, сформулируем еще одно предложение, характеризующее ограниченные сублинейные операторы со значениями в $\widetilde{BC(Q)}$, которое по существу установлено в [7] (см. доказательство теоремы I).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть Q - топологическое пространство, а X - банахово пространство (не обязательно сепарабельное). Тогда для каждого ограниченного сублинейного оператора[ж]) $P:X \to \widetilde{BC(Q)}$ существует такое слабо полунепрерывное снизу отображение $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$, действующее в шар $S_{X'}$, что

$$(Px)(t) = \sup_{l \in \Phi(t)} l(x) \quad (x \in X,\ t \in Q). \tag{5}$$

Обратно, если задано слабо полунепрерывное снизу отображение $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$, действующее в шар $S_{X'}$, то оператор P, определяемый формулой (5), есть ограниченный сублинейный оператор $P:X \to \widetilde{BC(Q)}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если Q - паракомпактное топологическое пространство, а X - сепарабельное банахово пространство, то каждый ограниченный сублинейный оператор $P:X \to \widetilde{BC(Q)}$ имеет опорный линейный оператор $A:X \to BC(Q)$, т. е. оператор A, для которого выполнено неравенство $Ax \leq Px$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Сперва докажем импликацию а)$\Rightarrow$б). Пусть Q - нормальное T_1-пространство, а $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$ - слабо полунепрерывное снизу отображение, действующее в шар $S_{X'}$. Надо доказать существование слабо непрерывного селектора отображения Φ. Используя предложение 6, сопоставим отображению Φ ограниченный сублинейный оператор $P:X \to \widetilde{BC(Q)}$. При этом, как нетрудно видеть, существование слабо непрерывного селектора у отображения Φ эквивалентно существованию опорного линейного оператора у сублинейного оператора P. Таким образом, достаточно установить существование опорного линейного оператора $A:X \to BC(Q)$. Для этого рассмотрим оператор

ж) Здесь оператор P ограничен и сублинеен как оператор со значениями в KB – линеал всех ограниченных на Q функций.

$\hat{P}=\tilde{F}\circ P: X\to \widetilde{BC(\beta Q)}$. Используя предложения 4, 5, легко проверить сублинейность и ограниченность оператора $\hat{P}$. В силу следствия предложения 6 для оператора $\hat{P}$ существует опорный линейный оператор $\hat{A}: X\to BC(\beta Q)$. Проверим теперь, что оператор $A=F^{-1}\circ\hat{A}$ будет опорным к оператору P и тем самым завершим доказательство импликации а)$\Longrightarrow$ б). Действительно, используя свойства отображений $\tilde{F}$, $\tilde{F}^{-1}$, получаем

$$Ax=F^{-1}(\hat{A}x)=\tilde{F}^{-1}(\hat{A}x)\leqslant\tilde{F}^{-1}(\hat{P}x)=\tilde{F}^{-1}(F(Px))=P(x)$$

для всех $x\in X$.

Импликация б)$\Longrightarrow$ в) тривиальна. Осталось доказать импликацию в)$\Longrightarrow$ а). Пусть $Q-T_1$ - пространство, для которого справедливо в). Надо показать, что Q - нормальное пространство. Для этого достаточно показать, что для любых непересекающихся замкнутых множеств A и B из Q существует непрерывная функция $f: Q\to[0,1]$ такая, что $f(A)=\{0\}$, $f(B)=\{1\}$. Рассмотрим многозначное отображение $\Phi: Q\to R$ следующего вида:

$$\Phi(t)=\begin{cases}\{0\}, & t\in A,\\ \{1\}, & t\in B,\\ [0,1], & t\in Q\setminus(A\cup B).\end{cases}$$

Ясно, что отображение Φ удовлетворяет всем условиям из в), поэтому непрерывный селектор f отображения Φ является искомой функцией f. Теорема 2 доказана.

Остальная часть статьи посвящена приложениям полученных результатов и разбита на четыре пункта.

I. В этом пункте приводится характеристика нормальных пространств в классе вполне регулярных T_1-пространств.

ТЕОРЕМА 7. *Вполне регулярное T_1-пространство является нормальным тогда и только тогда, когда отображение $\tilde{F}: \widetilde{BC(Q)}\to\widetilde{BC(\beta Q)}$ удовлетворяет следующему равенству*

$$\tilde{F}(f_1+f_2)=\tilde{F}(f_1)+\tilde{F}(f_2) \qquad (6)$$

для всех f_1, $f_2\in\widetilde{BC(Q)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказана в предложении 5. Проверим достаточность. Пусть Q - вполне регулярное T_1-пространство, для которого выполнено равенство (6). Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве импликации а)$\Longrightarrow$б) теоремы 2, заменяя всюду ссылку на предложение 5 ссылкой на равенство (6), получим, что для Q справедливо утверждение б), которое в силу теоремы 2 эквивалентно нормальности Q. Теорема доказана.

2. В этом пункте изучаются ограниченные сублинейные операторы $P: X \longrightarrow \widetilde{BC(Q)}$, где Q - нормальное T_1-пространство. Прежде всего напомним определения. Оператор $P: X \to \widetilde{BC(Q)}$ называется сублинейным и ограниченным, если он субаддитивен, положительно однороден и ограничен как оператор, действующий в KB-линеал всех ограниченных на Q функций. В предложении 6 установлено, что такие операторы можно отождествить со слабо полунепрерывными снизу отображениями $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$, действующими в шар $S_{X'}$. Напомним также, что линейный оператор $A: X \longrightarrow BC(Q)$ называется опорным оператором сублинейного оператора $P: X \longrightarrow \widetilde{BC(Q)}$, если $Ax \leqslant Px$ для всех $x \in X$. Легко проверяется, что существование опорного оператора сублинейного оператора P эквивалентно существованию слабо непрерывного селектора у соответствующего оператору P отображения $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$. Используя этот простой факт, а также теорему 2 и предложение 6, получаем следующую теорему

ТЕОРЕМА 8. *Для T_1-пространств Q следующие условия эквивалентны:*

а) Q - нормальное пространство;

б) для сепарабельного банахова пространства[ж)] *X и для каждого ограниченного сублинейного оператора $P: X \longrightarrow \widetilde{BC(Q)}$ существуют опорные операторы;*

в) для каждого ограниченного сублинейного оператора $P: R \to \widetilde{BC(Q)}$ существуют опорные операторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации а)$\Longrightarrow$б), в)$\Longrightarrow$а) ввиду сделанных выше замечаний очевидны. Импликация б)$\Longrightarrow$в) здесь не так очевидна, как в теореме 2, потому что сейчас в б) мы

ж) Разумеется, что $X \neq \{0\}$.

не требуем условия "для каждого сепарабельного банахова пространства X", а X сейчас фиксировано. Пусть для некоторого сепарабельного банахова пространства X справедливо б), покажем, что выполнено также в). Возьмем произвольный ограниченный сублинейный оператор $P: R \to BC(Q)$ и выберем элемент $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$. На прямой $\{\lambda x_0\}$ определим сублинейный оператор $\tilde{P}$ следующим образом $\tilde{P}(\lambda x_0) = P(\lambda)$. Ясно, что $\tilde{P}$ также ограниченный сублинейный оператор. При этом существование опорных операторов оператора P эквивалентно существованию опорных операторов оператора $\tilde{P}$. Для того, чтобы доказать существование опорного оператора оператора $\tilde{P}$ распространим его до ограниченного сублинейного оператора $\hat{P}$, определенного на всем X. Тогда в силу б) $\hat{P}$ имеет опорный оператор, сужение которого на прямую $\{\lambda x_0\}$ является опорным оператором оператора $\tilde{P}$. Таким образом, осталось построить сублинейный оператор $\hat{P}: X \to BC(Q)$, продолжающий $\tilde{P}$. Построение $\hat{P}$ аналогично построению проектора на одномерное подпространство. По теореме Хана-Банаха существует линейный функционал $f \in X'$, $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = 1$. Определим $\hat{P}$ следующим ооразом, положив $\hat{P}x = \tilde{P}(f(x)x_0)$ для любого $x \in X$. Нетрудно проверить, что $\hat{P}$ действительно является распространением оператора $\tilde{P}$. Непосредственно проверяется его сублинейность и ограниченность. Теорема доказана.

Из доказанной выше теоремы вытекает некоторое усиление теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2'. Следующие условия для T_1-пространств Q эквивалентны:

а) Q - нормальное пространство;

б) для сепарабельного банахова пространства X и любого слабо полунепрерывного снизу отображения $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$, действующего в шар $S_{X'}$, существуют слабо непрерывные селекторы;

в) справедливо б), когда X есть числовая прямая.

Завершим этот пункт еще одной теоремой, относящейся к сублинейным операторам.

ТЕОРЕМА 9. Если Q-нормальное T_1-пространство, X-сепарабельное банахово пространство, тогда каждый ограниченный сублинейный оператор $P: X \to \widehat{BC(Q)}$ представим формулой

$$Px = \sup_{A \in \Omega_P} Ax \quad (x \in X), \qquad (7)$$

где супремум вычисляется поточечно по множеству Ω_P всех опорных операторов сублинейного оператора P.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 9 не составляет особого труда, если воспользоваться теоремой 2, предложением 6 и схемами доказательств аналогичных теорем в [7].

3. В этом пункте приводится одна теорема, относящаяся к сублинейным операторам $P: X \to BC(Q)$ (где Q – вполне регулярное T_1-пространство), которая доказывается с помощью теоремы 3 данной работы и теоремы об общем виде сублинейных операторов со значениями в $BC(Q)$ (см. теорему I в [5] и замечание к ней).

ТЕОРЕМА IO. Пусть Q-вполне регулярное T_1-пространство, X-сепарабельное банахово пространство. Тогда для любого ограниченного сублинейного оператора $P: X \to BC(Q)$ существуют опорные операторы и справедлива формула (7).

4. В заключительном пункте рассматривается следующая задача. Пусть в нормальном T_1-пространстве Q задано замкнутое подпространство S. Задан ограниченный сублинейный оператор $P: X \to \widehat{BC(Q)}$ и линейный оператор $A: X \to BC(S)$ такие, что $(Ax)(t) \leq (Px)(t)$ для всех $x \in X$ и $t \in S$. Существует ли линейный оператор $\tilde{A}: X \to BC(Q)$, опорный к P такой, что сужение $\tilde{A}x$ на S совпадает с Ax для всех $x \in X$? Ответ дает следующая

ТЕОРЕМА II. Для любого ограниченного сублинейного $P: X \to \widehat{BC(Q)}$ и любого линейного оператора $A: X \to BC(S)$ такого, что $(Ax)(t) \leq (Px)(t)$ $(x \in X, t \in S)$, существует линейный опорный оператор $\tilde{A}: X \to BC(Q)$, опорный P, и $\tilde{A}x|_S = Ax$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме об общем виде сублинейных операторов существуют слабо полунепрерывное снизу отображение $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$, действующее в шар $S_{X'}$, соответствующее P, и слабо непрерывное отображение $\varphi: S \to X'$, соответствующее A. При этом, как видно из условия теоремы, отображение φ является селектором отображения $\Phi|_S$. Рассмотрим вспомогательное отображение $\tilde{\Phi}: Q \to \mathcal{K}(X')$, определенное формулой

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in S, \\ \Phi(t), & t \in Q \setminus S. \end{cases}$$

Оно слабо полунепрерывно снизу и действует в шар $S_{X'}$. Применяя к отображению Φ теорему 2, получаем слабо непрерывный селектор $\tilde{\varphi}$, который порождает искомый линейный оператор $\tilde{A}$ по формуле

$$\tilde{A}: x \to (t \to \tilde{\varphi}(t)(x)) \qquad (x \in X,\ t \in Q).$$

Теорема доказана.

Литература

I. ЛИНКЕ Ю.Э. Сублинейные операторы и непрерывные селекторы. - В кн.: Оптимизация. Вып. 8(25), Новосибирск, 1972, с.71-76.

2. MICHAEL E. Continious selections I.-"Ann. Math.", 1956, vol. 63, issue 2, p. 361-382.

3. MICHAEL E. A survey of continious selections in Lecture notes in mathematics, № 171, Set valued mappings, selections and topological property of 2^X. Springer - Verlag. B.H., №4, p. 54-57.

4. CORSON H.H., Lindenstrauss J. Continuous selections with non metrisable range. - "Trans. Amer. Math. Soc.". 1966, vol. 121, p. 492-504.

5. ЛИНКЕ Ю.Э. Об опорных множествах сублинейных операторов. - "Докл. АН СССР", 1972, т.207, № 3, с. 531-533.

6. ЭДВАРДС Р. Функциональный анализ, теория и приложения. "Мир", 1969.

7. ЛИНКЕ Ю.Э. О существовании опорных линейных операторов к сублинейным операторам со значениями в $C(Q)$. - В кн.: Оптимизация. Вып. 8(25), Новосибирск, 1972, с. 52-70.

8. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.

Поступила в ред.-изд. отд.
20. VIII. 1974 г.