Выпуклый анализ

УДК 513.80

О СУЩЕСТВЕННОЙ ОТДЕЛИМОСТИ КОНУСОВ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.К.Гаврин

Пусть X – локально выпуклое линейное топологическое пространство над полем действительных чисел, $\mathcal{P}$ и Q – выпуклые конусы в X, причем

$$\mathcal{P}, Q \neq \{0\}, \quad \mathcal{P} \cap Q \subset \{0\}.$$

Будем говорить, что конус $\mathcal{P}$ с у щ е с т в е н н о о т д е л и м от конуса Q, если эти два конуса отделимы такой гиперплоскостью H, что $\mathcal{P} \setminus H \neq \emptyset$. Если конус $\mathcal{P}$ – порождающий ($\mathcal{P} - \mathcal{P} = X$), существенная отделимость совпадает с обычной.

Введем в X полуупорядочение, определяемое конусом $\mathcal{P}$: для x_1, $x_2 \in X$ будем говорить, что x_1 с л е д у е т за x_2

$$x_1 \succ x_2,$$

если $x_1 - x_2 \in \mathcal{P}$. Обозначим $\mathcal{E}_x$ множество элементов X, мажорируемых элементом x:

$$\mathcal{E}_x = \{u : x \succ u\} \equiv \{u : x - u \in \mathcal{P}\}.$$

Элемент $x_0 \in \mathcal{P}$ назовем п с е в д о е д и н и ц е й в $\mathcal{P}$, если множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_{kx_0}$ плотно в $\mathcal{P}$. Очевидно, вместе с x_0 псевдоединицей в $\mathcal{P}$ будет и каждый элемент вида αx_0 $(\alpha > 0)$, а также вида $x_0 + p$, где $p \in \mathcal{P}$, так что конус $\{\alpha x_0 + p : \alpha > 0,\ p \in \mathcal{P}\}$ состоит из псевдоединиц. Таким образом, если в $\mathcal{P}$ имеются псевдоединицы, то они образуют плотное в $\mathcal{P}$ множество. Ясно также, что если $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность элементов X, причем x_0 есть псевдоединица в $\mathcal{P}$, то все элементы этой последовательности являются псевдоединицами в $\mathcal{P}$.

Если X-банахово пространство и $\mathcal{P}$ содержит счетное плотное в $\mathcal{P}$ множество $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\xi_n \neq 0)$, то существует псевдоединица в $\mathcal{P}$:

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}.$$

Действительно, $\xi_n \in \mathcal{E}_{2^n \|\xi_n\| x_0}$ $(n=1,2,\ldots)$ и $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_{k x_0}$, так что множество справа является плотным в $\mathcal{P}$.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов X *неограниченно приближается* к Q, если для любой окрестности нуля U все члены последовательности, за исключением конечного числа, принадлежат $Q+U$.

Рассмотрим следующие три утверждения:

I. $\mathcal{P}$ существенно отделим от Q.

II. Существуют такой элемент $p_0 \in \mathcal{P}$ и такая выпуклая окрестность нуля U, что

$$(p_0 + \mathcal{P} + U) \cap Q = \emptyset. \tag{1}$$

III. Не существует возрастающей последовательности псевдоединиц в $\mathcal{P}$, неограниченно приближающейся к Q.

ТЕОРЕМА I. *Утверждения I и II эквиваленты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть справедливо утверждение I и y есть такой элемент X^*, что гиперплоскость $H=\{u : \langle u,y\rangle = 0\}$ отделяет $\mathcal{P}$ и Q, причем $\mathcal{P} \setminus H \neq \emptyset$. Примем для определенности, что $\langle p,y\rangle > 0$ для $p \in \mathcal{P}$. Выберем $p_0 \in \mathcal{P} \setminus H$ так, что $\langle p_0, y\rangle > 0$. Найдем такую выпуклую окрестность нуля U, что $\langle p_0 + x, y\rangle > 0$ для $x \in U$. Тогда для любого $p \in \mathcal{P}$ справедливо неравенство $\langle p_0 + p + x, y\rangle > 0$, в то время, как для любого $q \in Q$ $\langle q, y\rangle \leq 0$. Этим доказано, что

$(p_0+\mathcal{P}+U)\cap Q=\varnothing$ при указанном выборе p_0 и U , т.е. установлена справедливость утверждения II.

Предположим теперь справедливость утверждения II, так что при некоторых p_0 и U имеет место соотношение (1). Не нарушая общности, можно принять, что $U=-U$.

Положим

$$\mathcal{P}_1=\{p+\tau(p_0+x):p\in\mathcal{P},\ x\in U,\ \tau\geq 0\}.$$

В силу выпуклости $\mathcal{P}$ и U конус $\mathcal{P}_1$ является выпуклым. Он телесен, так как любой элемент вида $p+\tau p_0$ (при $\tau>0$) содержится в $\mathcal{P}_1$ вместе со своей окрестностью $p+\tau p_0+\tau U$. Докажем, что

$$\mathcal{P}_1\cap Q\subset\{0\}. \tag{2}$$

Допустим, рассуждая от противного, что элемент $q\in Q$ представим в форме

$$q=p+\tau(p_0+x)\qquad(p\in\mathcal{P},\ x\in U,\ \tau\geq 0).$$

Если $\tau=0$, то $q=p\in\mathcal{P}$ и потому $q=0$. Если же $\tau>0$, то

$$\frac{1}{\tau}q=p_0+\frac{1}{\tau}p+x\in p_0+\mathcal{P}+U$$

и (1) неверно вопреки предположению. Соотношение (2) доказано.

Выпуклый телесный конус $\mathcal{P}_1$ отделим от выпуклого конуса Q некоторой гиперплоскостью $H=\{u:(u,y)=0\}$. Пусть для определенности $(u,y)\geq 0$ для $u\in\mathcal{P}_1$. Так как $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}_1$, то H отделяет конусы $\mathcal{P}$ и Q . Осталось показать, что $\mathcal{P}$ не лежит в H . Допустим противное: $\mathcal{P}\subset H$. Зафиксируем $p\in\mathcal{P}$ и возьмем любой элемент $x\in U$. Тогда элемент вида $u=p+p_0\pm x$ принадлежит $\mathcal{P}_1$, так что $0\leq(u,y)=\pm(x,y)$. Следовательно, $(x,y)=0$. Это значит, что $U\subset H$, что невозможно.

Доказана справедливость соотношения I.

ТЕОРЕМА 2. Если X – пространство со счетной базой окрестностей нуля и в конусе $\mathcal{P}$ имеется псевдоединица (в частности, если X–сепарабельное банахово пространство), то утверждения I и III эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы I достаточно установить эквивалентность П$\Longleftrightarrow$Ш.

Пусть справедливо соотношение П и p_0 и U имеют указанный в нем смысл. Допустим, рассуждая от противного, что утверждение Ш неверно, т.е. что существует возрастающая последовательность псевдоединиц в $\mathcal{P}\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, неограниченно приближающаяся к Q.

Так как x_0 есть псевдоединица в $\mathcal{P}$, то

$$(p_0+\frac{1}{2}U)\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}S_{kx_0}\neq\emptyset.$$

Пусть v—точка из этого пересечения, т.е. существует такой номер k_0, что

$$v\in(p_0+\frac{1}{2}U)\cap S_{k_0x_0}.$$

Это значит, что

$$v=p_0+\frac{1}{2}\xi\ \ (\xi\in U),\quad k_0x_0-v\in\mathcal{P}.$$

Для любого натурального n имеет место представление

$$k_0x_n=v+(k_0x_0-v)+k_0\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\equiv v+p_n=$$
$$=p_0+p_n+\frac{1}{2}\xi\ \ (p_n\in\mathcal{P}).$$

С другой стороны, для n достаточно большого $x_n\in Q-\frac{1}{2k_0}U$, так что $k_0x_n=q_n-\frac{1}{2}\xi_n$ ($q_n\in Q$, $\xi_n\in U$). Таким образом,

$$p_0+p_n+\frac{1}{2}(\xi+\xi_n)=k_0x_n+\frac{1}{2}\xi_n=q_n\in Q.$$

Оказалось, что $q_n\in(p_0+\mathcal{P}+U)\cap Q$ вопреки допущению о пустоте множества справа.

Установим теперь, что из Ш следует П. Допустим с этой целью, что П неверно и докажем, что неверно Ш.

Пусть $\{-U_r\}_{r=1}^{\infty}$ есть счетная фундаментальная система окрестностей нуля, причем $U_1\supset U_2\supset\ldots$. Пусть, далее, x_0 – произвольная псевдоединица в $\mathcal{P}$ и уже построены $x_1,\ldots,x_{k-1}$, причем

$$x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_{k-1}\in\mathcal{P}.$$

Так как $(x_{k-1}+\mathcal{P}-U_k)\cap Q\neq\emptyset$ (в силу предположения о том, что II неверно), то найдется элемент $p_к \in \mathcal{P}$, так что $x_к = x_{к-1} + p_к \in Q + U_к$. При этом $x_к \in \mathcal{P}$, $x_к \succ x_{к-1}$. Для любого m и $к > m$ будет $x_к \in Q + U_m$. Таким образом, $\{x_к\}_{к=0}^{\infty}$ есть возрастающая последовательность псевдоединиц, неограниченно приближающаяся к Q.

Установлено, что III неверно, и завершено доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предположение о наличии счетной базы окрестностей нуля использовано только во второй части доказательства, так что соотношение II$\Longrightarrow$III справедливо и без этого предположения.

В дальнейшем роль X будет играть пространство функций, заданных на [0,I], роль $\mathcal{P}$ - конус неотрицательных функций из X. В качестве Q избирается некоторый конус, такой что $\mathcal{P} \cap Q = \{0\}$. Мы заинтересованы в примере отсутствия отделимости, и потому пространство X избирается так, чтобы конус $\mathcal{P}$ не был телесным. Этому условию удовлетворяют, например, пространства L_p [0,I] ($p \geqslant 1$) и C_0 [0,I] - пространство непрерывных функций, аннулирующихся в точке 0. В указанных пространствах единиц нет. Псевдоединицей в L_p [0,I] служит любая положительная п.в. функция, в C_0 [0,I] - любая функция, положительная в [0,I].

Пример, который мы сейчас приведем, показывает возможность того, что неотделимыми являются два замкнутых конуса, пересечение которых состоит из точки 0 *).

ПРИМЕР. $X = L_2$ [0,I], $\mathcal{P}$ - конус неотрицательных п.в. функций. Так как $\mathcal{P}$ - порождающий конус ($\mathcal{P} - \mathcal{P} = X$), то $\mathcal{P}$ не содержится ни в какой гиперплоскости. Следовательно, существенная отделимость $\mathcal{P}$ от какого-либо конуса Q равносильна отделимости $\mathcal{P}$ и Q.

Введем функции

$$w_i(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < \frac{1}{2^{i+1}}, \\ 1, & \frac{1}{2^{i+1}} < t < 1 - \frac{1}{2^{i+1}}, \\ 2^i, & 1 - \frac{1}{2^{i+1}} < t < 1, \end{cases}$$

---

*) Это не первый пример такого рода (см. [I], стр.377, упр.I6б).

и возьмем в качестве Q выпуклую коническую оболочку множества $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$. Так как при любых $\lambda_i \geq 0$ функция

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i(t)$$

отрицательна в промежутке $0<t<\frac{1}{2^{r+1}}$ (при условии $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i > 0$), то $\mathcal{P} \cap Q = \{0\}$

Система функций $\{w_i\}$ подобрана таким образом, что норма w_i^- (минус знак отрицательной части) мала, лишь когда i велико и, следовательно, велика норма $\|w_i\|$. Аналогичным свойством обладают все элементы Q, что показывает приводимая ниже лемма.

Рассмотрим произвольный элемент Q

$$x(t)=\sum_{j=1}^{r} a_j w_j(t) \quad (a_j \geq 0).$$

Так как на промежутке $(2^{-i-1}, 2^{-i})$

$$w_j(t)=\begin{cases} -1, & j<i, \\ 1, & j \geq i, \end{cases}$$

то

$$x(t)=-\sum_{j=1}^{i-1} a_j+\sum_{j=i}^{r} a_j=2\sum_{j=i}^{r} a_j-\sum_{j=1}^{r} a_j \quad (2^{-i-1}<t<2^{-i}). \qquad (3)$$

I^0. Покажем, что для пары конусов $\mathcal{P}$ и Q не выполнено соотношение Ш, так что эти конусы неотделимы существенно (и, следовательно, неотделимы).

Положим

$$q_n(t)=\sum_{j=1}^{n} w_j(t) \qquad (n \text{ четное}).$$

В силу формулы (3) на промежутке $(2^{-i-1}, 2^{-i})$ будет

$$q_n(t)=\begin{cases} 2(n-i+1)-n=n-2i+2, & i \leq n, \\ -n, & i>n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$q_n(t)>0 \quad \text{для} \quad 2^{-\frac{n}{2}-1}<t<1,$$

$$-n \le q_n(t) \le 0 \quad \text{для} \quad 0<t<2^{-\frac{n}{2}-1}.$$

Введем функции

$$x_n(t) = \max\,[q_n(t), 1], \quad x_n \in \mathcal{P}.$$

Ясно, что x_n есть псевдоединица в $\mathcal{P}$. Докажем, что $x_{n+2}(t) > x_n(t)$. Действительно, на $(2^{-n-3}, 1)$ $x_{n+2}(t) - x_n(t) = w_{n+1}(t) + w_{n+2}(t) \ge 0$, а на $(0, 2^{-n-3})$ $x_{n+2}(t) - x_n(t) = 1$. Таким образом, $\{x_n\}$ есть возрастающая последовательность псевдоединиц в $\mathcal{P}$.

С другой стороны,

$$\|x_n - q_n\|^2 = \int_0^{2^{-\frac{n}{2}-1}} (1+|q_n|)^2\,dt < 2^{-\frac{n}{4}}(1+n)^2 \to 0,$$

так что $\{x_n\}$ неограниченно приближается к Q.

Установлено, что Ⅲ неверно.

2°. Покажем теперь, что $\mathcal{P} \cap \bar{Q} \subset \{0\}$ (конус $\mathcal{P}$ замкнут, так что замыкать его нет нужды). Допустим, рассуждая от противного, что существуют элемент $x_0 \in \mathcal{P}$, $x_0 \ne 0$, и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$, так что $x_0 = \lim x_n$.

Любой элемент $v = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i \in Q$ сохраняет на $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ постоянное значение $\sum_{i=1}^{r} a_i$. Каждая из функций x_n постоянна на $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, и это же верно для функции x_0. Пусть

$$x_0(t) = d \qquad (\tfrac{1}{4} < t < \tfrac{3}{4}),$$

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{r_n} a_i^n w_i(t) \qquad (a_i^n \ge 0).$$

Тогда $d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{r_n} a_i^n$. Если бы оказалось, что $d = 0$, т.е. $\sum_{i=1}^{r_n} a_i^n \to 0$, то, как нетрудно видеть, $x_n(t) \to 0$ п.в. и $x_0(t) = 0$ п.в., что противоречит предположению $x_0 \ne 0$.

Следовательно, $d \ne 0$, и, не нарушая общности, можно принять $d = 1$, $\sum_{i=1}^{r_n} a_i^n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

ЛЕММА. Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i, \quad a_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{r} a_i = 1$$

и пусть x^- означает отрицательную часть x.

Тогда

$$\| x^- \| \geq \frac{1}{36\sqrt{2}} \frac{1}{\| x \|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Заметим прежде всего, что

$$\| x \|^2 \geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} x^2 \, dt - \frac{1}{2} \Big(\sum_{i=1}^{r} a_i \Big)^2 - \frac{1}{2}.$$

Далее, имеем для любого $i \leq r$

$$\| x \|^2 \geq \sum_{\nu=i}^{r} \int_{1-2^{-\nu-1}}^{1-2^{-\nu-2}} x^2 \, dt \geq \sum_{\nu=i}^{r} \int_{1-2^{-\nu-1}}^{1-2^{-\nu-2}} a_\nu^2 w_\nu^2 \, dt =$$

$$= \sum_{\nu=i}^{r} 2^{-\nu-2} \, 2^{2\nu} a_\nu^2 = \frac{1}{4} \sum_{\nu=i}^{r} 2^{\nu} a_\nu^2.$$

Отсюда известными приемами получается, что

$$\sum_{\nu=i}^{r} a_\nu \leq 2^{\frac{3}{4}} \| x \| \, 2^{-\frac{1}{2} i}.$$

Пусть i_0 — первый индекс i, для которого

$$2^{\frac{3}{4}} \| x \| 2^{-\frac{1}{2} i} \leq \frac{1}{3}.$$

Так как $2 \| x \| \geq \sqrt{2}$, то $i_0 > 1$. Не нарушая общности, можно принять также, что $i_0 < r$.

В силу формулы (3) на промежутке $(2^{-i_0-1}, 2^{-i_0})$ будет

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} a_j w_j(t) = -\sum_{j=1}^{i_0-1} a_j + \sum_{j=i_0}^{r} a_j = 2 \sum_{j=i_0}^{r} a_j - 1 <$$

$$< 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \| x \| 2^{-\frac{1}{2} i_0} - 1 \leq -\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\| x^- \|^2 \geq \int_{2^{-i_0-1}}^{2^{-i_0}} (x^-)^2 \, dt \geq 2^{-i_0-1} \frac{1}{9}.$$

По определению i_0, справедливо неравенство

$$2^{\frac{3}{2}}\|x\|\,2^{-\frac{1}{2}(i_0-1)} > \frac{1}{3},$$

так что

$$\|x^-\| > \frac{1}{3\sqrt{2}}\,2^{-\frac{1}{2}i_0} \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{\|x\|}.$$

Лемма доказана.

Теперь уже легко привести к противоречию предположение о существовании элемента $x_0 \in \mathcal{P}$, $x_0 \neq 0$, и последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$, такой что $x_0 = \lim x_n$, причем $x_n = \sum_{i=1}^{l_n} a_i^n w_i$, $\sum_{i=1}^{l_n} a_i^n = 1$. Действительно, в этом случае существует $M > 0$, так что $\|x_n\| \leq M$. В силу леммы

$$\|x_n - x_0\| \geq \|x_n^-\| \geq \frac{1}{36\sqrt{2}}\,\frac{1}{M},$$

вопреки тому, что $x_n \to x_0$.

Поступила в ред.-изд. отд.
28. II. 1975 г.