Численные методы

УДК 518 : 517.948

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ И СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Б.А.Вертгейм

В статье предлагается единый подход к определению области существования решения в схеме приближенных методов типа способа Ньютона-Канторовича для решения нелинейных операторных уравнений; на основе этого подхода получены обобщения и усиления ряда результатов работ [1-4]. Указанный общий подход связан с составлением вспомогательного функционального уравнения, отчасти подобного тому, которое получается в теории динамического программирования.

1. Рассматриваем приближенное решение нелинейного операторного уравнения вида

$$f(x)=0, \tag{1}$$

здесь $f:\mathcal{D}\longrightarrow Y$ - нелинейный оператор, определенный на открытом множестве $\mathcal{D}\subset X$, где X и Y - пространства Банаха. Будем предполагать, что существует производная Фреше $f'(x)$ и выполнено условие:

$$\exists K>0,\ \exists\alpha,\ 0<\alpha\leq 1:\forall x_1,\ x_2\in\mathcal{D},$$

$$\|f'(x_1)-f'(x_2)\|\leq K\|x_1-x_2\|^{\alpha}. \tag{2}$$

Пусть выбран элемент $x_0\in\mathcal{D}$ в качестве начального приближения и строится последовательность приближений по формулам вида

$$x_{n+1} = F_n(x_n), \qquad \text{где } F_n : A_n \longrightarrow \mathcal{D},\ n = 0,1,2,\ldots;$$

некоторые операторы, определенные, вообще говоря, на подмножествах $A_n \subset \mathcal{D}$, $F_n(A_n) \subset A_{n+1}$; так, применение основного метода [I] состоит в вычислении итераций по такому правилу:

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n). \tag{3}$$

При этом условия сходимости итераций и область расположения решения выражаются в терминах оценок норм некоторых векторов и операторов; так, для процесса (3) требуются следующие оценки:

а) оценка B_0 нормы оператора $\Gamma_0 = [f'(x_0)]^{-1} : \|\Gamma_0\| \leq B_0$;

предполагается, что этот оператор существует; б) оценка начальной невязки $\eta_0 \geq \|\Gamma_0 f(x_0)\| = \|x_1 - x_0\|$; в) константа K в условии (2). Из этих величин составляется некоторая константа h_0, играющая роль, вполне аналогичную роли известных безразмерных чисел, возникающих в теории физического подобия: эти величины служат критерием существования интересующего нас явления. Так, в работе [I] установлены условия, когда неравенство $h_0 = B_0 K \eta_0 \leq \frac{1}{2}$ гарантирует существование решения и сходимость итераций (3) (в предположении, что существует вторая производная $f''(x)$); в работе [3] для класса операторов с условием Гёльдера (2) получен аналогичный критерий в виде $h_0 = B_0 K \eta_0^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha}$ (для модифицированного процесса, в частности, при $\alpha = 1$ снова $h_0 \leq \frac{1}{2}$). Отметим, что в недавно появившейся статье [4], автор которой, очевидно, не был знаком с работой [3], последний результат был повторен в ослабленном виде - со знаком $<$ (см. теорему 3 из [4]).

2. Переходим к мотивировке упомянутого выше функционального уравнения. Мы строим шаг за шагом приближения x_n. Допустим, что уже найдена конечная последовательность $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ и получены оценки B_n, η_n, h_n, аналогичные B_0, η_0, h_0 (для определённости мы будем иметь в виду процесс (3)). Во многих случаях, следуя методике работы [I], получаем указанные оценки с помощью рекуррентных соотношений вида:

$$\eta_{n+1} = \lambda(h_n)\eta_n, \quad h_{n+1} = \Phi(h_n), \quad n = 1,2,\ldots. \tag{4}$$

Область расположения решения задаётся радиусом сферы $R_0 > \varphi(h_0)\eta_0$ (его мы и собираемся получить возможно точнее), где φ – ещё одна функция, которую на данном этапе считаем искомой. В качестве одного из условий сходимости процесса применяется включение $S_0 = S(x_0, \varphi(h_0)\eta_0) \subset \mathcal{D}$. В этой сфере S_0 должны оставаться все приближения x_n. При этом мы приходим к естественному требованию

$$S(x_{n+1}, \varphi(h_{n+1})\eta_{n+1}) \subset S(x_n, \varphi(h_n)\eta_n). \tag{5}$$

При конструировании теорем о достаточных условиях применимости приближенного метода мы при заданных функциях Φ и λ можем по-разному строить функцию φ, удовлетворяющую соотношениям (5); при этом, в силу принципа вложенных сфер, из (5) и $\lim\limits_n \varphi(h_n)\eta_n = 0$ будет следовать, что $\exists \lim\limits_n x_n = x^*$. Включения (5) вместе с оценкой $\eta_n > \| x_{n+1} - x_n \|$ приводят к неравенствам (здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\varphi(h_n)\eta_n > \eta_n + \varphi(h_{n+1})\eta_{n+1} = \eta_n [1 + \lambda(h_n)\varphi(\Phi(h_n))]. \tag{6}$$

Для получения возможно более точных оценок следует здесь рассмотреть предельный случай равенства, и мы приходим к функциональному уравнению для неизвестной функции φ:

$$\varphi(h) = 1 + \lambda(h)\varphi(\Phi(h)). \tag{7}$$

Это уравнение решаем с помощью теоремы о сжатии, применённой к полному пространству $C_{[0,K]}$ (точнее, к шару $V \subset C$, см. ниже), где $k > 0$ считаем известным.

ЛЕММА. Пусть заданные функции $\Phi, \lambda \in C_{[0,K]}$ удовлетворяют условию $\|\lambda\| = q < 1$, $\Phi([0,K]) \subset [0,K]$. Тогда в области $V = \{\varphi \in C_{[0,K]} : \|\varphi\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\lambda\|}\}$ существует единственное решение уравнения (7), равное

$$\varphi(h) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n} \lambda(h_i), \quad h_0 = h, \quad \varphi(h) \leqslant \frac{1}{1 - \lambda(h)}. \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрев оператор $F : \varphi(h) \longmapsto 1 + \lambda(h)\varphi(\Phi(h))$, проверяем, что F является сжатием шара

V : если $\varphi, \quad \varphi_i \in V$, то

$$\|F(\varphi)\| \leq 1 + \|\lambda\| \|\varphi\| \leq \frac{1}{1-\|\lambda\|},$$

$$\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\| \leq \|\lambda\| \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Поэтому, определив итерации $\varphi_{n+1} = F(\varphi_n)$, $\varphi_0 \equiv 1$, мы получим, что $\lim\limits_n \varphi_n = \varphi$, где φ - решение уравнения (7). Найдя в явном виде φ_n, приходим к формуле (8).

3. Переходим к применениям указанного способа определения области расположения решения задачи (I). Начнём с процесса (3) в классе Гёльдера (2). В этом случае оказывается, что

$$\lambda(h) = \frac{1}{1+\alpha} \frac{h}{1-h}, \quad \Phi(h) = (1+\alpha)[\lambda(h)]^{1+\alpha}. \tag{9}$$

Эти соотношения выведем при доказательстве теоремы I; там же показано, что уравнение $h = \Phi(h)$, $0<h<1$, имеет единственный корень $Q = Q(\alpha) \leq \frac{1}{2}$. Условия доказанной выше леммы выполняются, если взять $k = Q$, так как при $0 \leq h \leq k \leq \frac{1}{2}$ имеем $0 \leq \Phi(h) \leq h$, $0 \leq \lambda(h) \leq \lambda(k) = \|\lambda\| < 1$. Поэтому функциональное уравнение (7) при выполнении (9) имеет решение, которое мы обозначим буквой φ^*. Эти рассуждения завершают подготовку изложения следующей теоремы.

ТЕОРЕМА I. Пусть для уравнения (I) и некоторой начальной точки x_0 выполнены следующие условия:

1. $\exists [f'(x_0)]^{-1} = \Gamma_0$, $\|\Gamma_0\| \leq B_0 < \infty$; 2. $\|\Gamma_0 f(x_0)\| \leq \eta_0$;

3. $\exists f'(x)$ и выполнено условие (2) в сфере S с центром в точке x_0 и радиусом $R \geq \varphi^*(h_0)\eta_0$, где функция φ^* - решение уравнения (7), причем функции λ и Φ определены соотношениями (9);

4. $h_0 = B_0 K \eta_0^{\alpha} \leq Q(\alpha)$.

Тогда уравнение (I) имеет решение x^* в сфере S и приближения (3) сходятся к x^*, причем

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \varphi^*(h_n)\eta_n, \quad \eta_n = \prod_{i=0}^{n} \lambda(h_i), \quad h_{n+1} = \Phi(h_n), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем конструкцию, применённую в теореме о методе Ньютона в работе [I]. Сначала доказываем, что существует оператор $\Gamma_1 = [f'(x_1)]^{-1}$ и что $\|\Gamma_1\| \leqslant$ $\leqslant B_1 = \frac{B_0}{1-h_0}$. С этой целью рассматриваем оператор $P = \Gamma_0[f'(x_0) - f'(x_1)]$ и проверяем, что $\|P\| \leqslant h_0 = B_0 K \eta_0^{\alpha} < 1$, $\Gamma_1 = [I - P]^{-1}\Gamma_0$. Далее используем равенство $f(x_1) = f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0)$, применив которое вместе с оценкой (5) статьи [3], находим, что

$$\|\Gamma_1 f(x_1)\| \leqslant \frac{h_0 \eta_0}{(1+\alpha)(1-h_0)} = \lambda(h_0)\eta_0 .$$

Теперь определяем

$$h_1 = B_1 K \eta_1^{\alpha} = (1+\alpha)^{-\alpha}\left(\frac{h_0}{1-h_0}\right)^{1+\alpha} = \Phi(h_0).$$

Переход от номера n к $n+1$ проходит аналогично. Введённая функция Φ непрерывна, монотонно возрастает и выпукла на множестве $E = [0,1)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 0$, $\lim\limits_{h\to 1} \Phi(h) = \infty$, поэтому уравнение $h = \Phi(h)$, $h \in E$, имеет единственное решение $Q = Q(\alpha) > 0$ (кроме $h = 0$). Подстановкой значений $h = \frac{1}{2}$ и $h = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ убеждаемся, что $\frac{\alpha}{1+\alpha} < Q(\alpha) < \frac{1}{2}$; далее, $0 \leqslant \lambda(h) \leqslant \lambda(Q) \leqslant \frac{1}{2}$ для $h \in [0, Q]$.

Таким образом получены функции (9). Для завершения доказательства мы показываем с помощью метода математической индукции, что построение по формулам (3) последовательности $\{x_n\}$ возможно, что имеют место включения (5), являющиеся, на наш взгляд, некоторым аналогом принципа инвариантности из теории динамического программирования. Наконец, поскольку $(\forall n)\, h_{n+1} \leqslant h_n$, $\lambda(h_n) < \lambda(h_0) < 1$, $\lim\limits_n \varphi^*(h_n)\eta_n = 0$, то с помощью принципа вложенных шаров находим, что $\exists \lim\limits_n x_n = x^*$ и что $f(x^*) = 0$ (последнее получается переходом к пределу в соотношении (3)).

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть выполнены условия теоремы I и $h_0 < Q(\alpha)$. Тогда скорость сходимости итераций имеет порядок $1+\alpha$, точнее $\exists m>0$:

$$\|x_{m+n} - x^*\| \leqslant (1+\alpha)^{-\frac{n}{\alpha}} \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0\right]^{[(1+\alpha)^n - 1]/\alpha} (1-h_0)^{-1} \eta_0 . \quad (10)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. При выполнении условий теоремы I и при $\alpha = 1$ имеем $\varphi^*(h) = h^{-1}(1-\sqrt{1-2h})$, и выполнена оценка (10), где $m=1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следствие 2 повторяет результат теоремы Л.В. Канторовича о методе Ньютона из [I] с заменой условия о f'' на условие Липшица для f' при $\alpha = 1$. Далее, теорема I даёт более сильный результат, чем теорема 5 работы [4]: в последней ограничение на h_0 жестче, а именно: $h_0 < 1-(1+\alpha)^{-\alpha} < \alpha/(1+\alpha) < Q(\alpha)$ (в [4] роль h_0 играет $K\eta_0^\alpha$, так как константа B_0 включена в K); кроме того, основная область имеет в [4] размер $\rho \geqslant \frac{(1+\alpha)\eta_0}{2+\alpha-(1+\alpha)^\alpha} = \frac{1}{1-\lambda(h_0)}\eta_0 > \varphi^*(h_0)\eta_0$ (здесь использованы соотношения (8), (9)), что указывает более высокую точность оценки основной области в теореме I данной работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы I, измененные следующим образом: $h_0 = B_0 K \eta_0^\alpha < 1+\alpha$,

$$R \geqslant \varphi_1^*(h_0)\eta_0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h_0}{1+\alpha}\right)^{p_n} \eta_0, \qquad p_n = [(1+\alpha)^n - 1]/\alpha ;$$

здесь φ_1^* - решение функционального уравнения (7), в котором $\lambda(h) = \frac{h}{1+\alpha}$, а функция Φ выражается через λ так же, как в формуле (9). Пусть

$$\forall x \in S \quad \exists [f'(x)]^{-1} = \Gamma, \quad \|\Gamma\| \leqslant B_0 .$$

Тогда в сфере $S = S(x_0, R)$ уравнение

(I) и м е е т р е ш е н и е x^* , к к о т о р о м у с х о д я т с я п о с л е д о в а т е л ь н ы е п р и б л и ж е н и я о с н о в н о г о м е т о д а (3), п р и ч ё м

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \left(\frac{h_0}{1+\alpha}\right)^{\beta_n} \eta_0 \left[1 - \left(\frac{h_0}{1+\alpha}\right)^{(1+\alpha)^n}\right]^{-1} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО подобно тому, что было для теоремы I. На этот раз в силу предложенной оценки для $\|\Gamma\|$ функция λ оказывается более простой, чем в случае (9), и уравнение (7) решается проще (функция φ_1^* выражается явно через h, как это указано в формулировке теоремы 2; подробные вычисления опускаем).

Теорема 2 обобщает известный результат работы [2], получаемый здесь при $\alpha = 1$ (см. также статью [3]).

Л и т е р а т у р а

I. КАНТОРОВИЧ Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. - УМН, т. II, вып. 6, I948, с. 99-185.

2. МЫСОВСКИХ И.П. О сходимости метода Л.В.Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений и его применениях. -"Вестник Ленинградского университета", № II, 1953, с. 25-48.

3. ВЕРТГЕЙМ Б.А. Об условиях применения метода Ньютона. - "Докл. АН СССР", 1956, т.IIO, № 5, с. 719-722.

4. KELLER H.B. Newton's Method under Mild differential conditions.- "Journal of Comput. and System Science", I970,vol. 4, N I,p.I5 - 28.

Поступила в ред.-изд. отд.
5. II. 1975 г.