1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 17(34)

Сельскохозяйственные модели

УДК 338.45:63:330.115

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПЛОЩАДИ ПОД РАЗНЫЕ КУЛЬТУРЫ НА БОГАРЕ И НА ЗАДАННОМ МАССИВЕ, ОРОШАЕМОМ ИЗ НЕЗАРЕГУЛИРОВАННОГО ИСТОЧНИКА ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ВОДНОСТИ

Ц.Е.Бочварова

Имеется хозяйственное подразделение с ограниченными ресурсами земли, труда, техники и других денежно-материальных средств. Ставится задача определения той структуры площади на богаре и при орошении, при которой получился бы максимум математического ожидания суммарного чистого дохода от выращиваемых культур с учетом агротехнических требований. Развитие орошаемого земледелия лимитируется ограниченностью воды в источнике орошения, который не зарегулирован, и водность которого подвержена случайным колебаниям. Пусть $Q(\omega)$ –случайная величина водности источника, где $\omega\in\Omega$ – набор случайных факторов, от которых она зависит, Ω – множество элементарных событий.

Введем следующие обозначения:

x_j – площадь j-й культуры на орошаемом массиве, $j=1,\dots,n$;

x_i – площадь i-й культуры на богаре, $i=n+1,\dots,n'$;

$c_j(\omega)$ – чистый доход с единицы площади под j-ю культуру на орошаемом массиве, $j=1,\dots,n$ (она зависит от реализации случайных факторов ω);

c_i – чистый доход с единицы площади под i-ю культуру на богаре, $i=n+1,\dots,n'$;

a_j - оптимальная норма орошения j-й культуры, $j=1,\dots,n$;

$y_j(\omega)$ - количество ирригационной воды, предназначенное для орошения площади x_j, $j=1,\dots,n$ (оно зависит от реализации случайных факторов).

Компоненты вектора $x=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n'})$ выбираются до наблюдения реализации случайной величины $Q(\omega)$, и поэтому вектор x назовём планом первого этапа.

Компоненты вектора $y(\omega)=(y_1(\omega),\dots,y_n(\omega))$ выбираются после наблюдения реализации случайной величины $Q(\omega)$, и поэтому назовём вектор $y(\omega)$ планом второго этапа.

Ограничения, в которых некоторые параметры зависят от случайных факторов и в которых участвуют компоненты плана второго этапа, являются следующими:

1) Количество ирригационной воды, используемое для орошения площади x_j, в среднем должно колебаться в какой-то окрестности оптимальной нормы полива,

$$(a_j-\xi_j')x_j\leq M[y_j(\omega)]\leq(a_j+\xi_j)x_j,\quad j=1,\dots,n,$$

где $M[\cdot]$-математическое ожидание, $0\leq\xi_j'\leq a_j,\xi_j\geq 0$ (ξ_j и ξ_j' определяются в зависимости от того, с какой точностью требуется выбрать норму полива, чтобы она была близка к оптимальной).

2) Количество ирригационной воды, используемое для орошения всех культур на орошаемом массиве должно быть ограничено водностью стока:

$$\sum_{j=1}^{n}y_j(\omega)\leq Q(\omega)$$

Ограничения задачи, в которые не входят параметры, зависящие от случая, и компоненты плана второго этапа, назовём фиксированными. Такими являются ограничения по земельным, трудовым, материальным и другим ресурсам, ограничения на объем некоторых видов сельскохозяйственной продукции, ограничения по севообороту и др. Они имеют следующий вид:

$$Ax\leq b,$$

где A - матрица размерности $m\times n'$, элементы которой являются экономико-техническими коэффициентами фиксированных ограничений задачи;

b – вектор размерности m, компоненты которого являются свободными членами фиксированных ограничений;

x – вектор размерности n', план первого этапа.

В качестве целевой функции задачи примем математическое ожидание суммарного чистого дохода от урожая культур как на богаре, так и на орошаемом массиве.

Тогда модель рассматриваемой задачи будет следующей:

$$M\left[\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j + \sum_{i=n+1}^{n'} c_i x_i\right] \to max,$$

при условиях:

$$(a_j - \xi_j')x_j \le M[y_j(\omega)] \le (a_j + \xi_j)x_j, \quad j=1,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j(\omega) \le Q(\omega),$$

$$Ax \le b,$$

$$x \ge 0,$$

$$y(\omega) \ge 0.$$

Чистый доход, получаемый с единицы площади j-й орошаемой культуры, $c_j(\omega)$ можно выразить следующим образом:

$$c_j(\omega) = d_j\alpha_j(\omega) - \beta_j(\omega), \qquad j=1,\dots,n,$$

где d_j – цена единицы продукции j-й культуры;

$\alpha_j(\omega)$ – урожайность j-й культуры, которая зависит от случая;

$\beta_j(\omega)$ – денежные затраты, которые зависят от случая.

Обозначим через $z_j(\omega)$ норму орошения единицы площади j-й культуры на орошаемом массиве и положим, что она равна нулю на нулевой площади:

$$z_j(\omega) = \begin{cases} \dfrac{y_j(\omega)}{x_j}, & \text{при } x_j > 0, \\ 0, & \text{при } x_j = 0. \end{cases}$$

Пусть $\alpha_j(\omega)$ и $\beta_j(\omega)$ можно выразить как линейные функции от нормы полива, т.е.

$$\alpha_j(\omega)=h_j+l_j z_j(\omega),$$

где h_j – урожайность j-й культуры на богаре (она от полива не зависит и принимается постоянной);

l_j – коэффициент пропорциональности, выражающий увеличение урожайности j-й культуры за счет орошения единицей ирригационной воды;

$$\beta_j(\omega)=h'_j+l'_j z_j(\omega),$$

где h'_j – материальные и другие затраты, связанные с выращиванием на единице площади j-й культуры на богаре;

l'_j – коэффициент пропорциональности, выражающий затраты при орошении, связанные с единицей ирригационной воды.

Следовательно,

$$c_j(\omega)=d_j[h_j+l_j z_j(\omega)]-[h'_j+l'_j z_j(\omega)]=H_j+\mathcal{D}_j z_j(\omega),$$

где $H_j=d_j h_j-h'_j$, $\mathcal{D}_j=d_j l_j-l'_j$.

$H_j\geq 0$ и $\mathcal{D}_j\geq 0$, что следует из их содержательного смысла.

При вышепринятых предположениях целевую функцию можно выразить следующим образом:

$$M\Big[\sum_{j=1}^{n}\mathcal{D}_j z_j(\omega)x_j\Big]+\sum_{j=1}^{n}H_j x_j+\sum_{i=n+1}^{n'}c_i x_i=$$
$$=\sum_{j=1}^{n'}H_j x_j+M\Big[\sum_{j=1}^{n}\mathcal{D}_j y_j(\omega)\Big],$$

где переобозначили c_i, $i=n+1,\dots,n'$, через H_j, $j=n+1,\dots,n'$.

Тогда модель рассматриваемой задачи будет следующей:

$$\sum_{j=1}^{n'}H_j x_j+M\Big[\sum_{j=1}^{n}\mathcal{D}_j y_j(\omega)\Big]\to max; \qquad (I.1)$$

$$(a_j-\xi'_j)x_j\leq M[y_j(\omega)]\leq(a_j+\xi_j)x_j; \qquad (I.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_j(\omega)\leq Q(\omega); \qquad (I.3)$$

$$Ax\leq b; \qquad (I.4)$$

$$x\geq 0,\quad y(\omega)\geq 0. \qquad (I.5)$$

Оказывается, что детерминированный эквивалент этой стохастической задачи является задачей линейного программирования, а компоненты плана второго этапа можно искать в виде решающего правила.

Перейдем от задачи (I.I) - (I.5) к следующей задаче, полученной из (I.I) - (I.5) интегрированием ограничений (I.3) и (I.5) :

$$\sum_{j=1}^{n'} H_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j M[y_j(\omega)] \to max; \tag{2.I}$$

$$(a_j - \xi_j')x_j \le M[y_j(\omega)] \le (a_j + \xi_j)x_j, \quad j = 1, \dots, n; \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} M[y_j(\omega)] \le M[Q(\omega)]; \tag{2.3}$$

$$Ax \le b; \tag{2.4}$$

$$x_j > 0, \quad M[y_j(\omega)] > 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Задача линейного программирования (2.I) - (2.5) является разрешимой, если разрешима исходная задача (I.I) - (I.5). Обозначим через x_j^* и $\bar{y}_j^*$, j=I,...,n, оптимальное решение задачи (2.I) - (2.5).

Нам надо найти случайные величины $y_j^*(\omega)$, которые являются оптимальными для задачи (I.I) - (I.5) и математические ожидания которых совпадают с найденными $\bar{y}_j^*$. Такими случайными величинами оказываются следующие:

$$y_j^*(\omega) = \bar{y}_j^* \frac{Q(\omega)}{M[Q(\omega)]},$$

где $M[Q(\omega)] > 0$ (из естественных соображений).

Из того, что достигается максимальное значение (2.I) и удовлетворяются условия (2.2), (2.3), (2.5) при $\bar{y}_j^*$, j = =I,..., n , следует достижение максимального значения линейной формы $M[\sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j y_j(\omega)]$ и удовлетворение условий (I.2), (I.3) и (I.5) при $y_j^*(\omega) = \bar{y}_j^* \frac{Q(\omega)}{M[Q(\omega)]}$, что очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно поставить аналогичную задачу, когда периоды орошения больше одного и водность стока-случайная величина для каждого периода. Проводя аналогичные рассуждения и принимая аналогичные предположения, можно построить также детерминированный эквивалент стохастической задачи, являющийся задачей линейного программирования, и искать планы второго и последующих этапов в виде аналогичных решающих правил.

Поступила в ред.-изд. отд.
28. II. 1975 г.