1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 17(34)

Модели динамики и равновесия

УДК 518.9 : 519.53

ВЕКТОР ШЕПЛИ ДЛЯ ИГР ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ВАРИАЦИИ

В.А.Васильев

Предлагаемые ниже аналоги вектора Шепли основаны на специальном представлении характеристической функции v конечной кооперативной игры $\Gamma=(N,v)$, в соответствии с которым гарантированный доход $v(\omega)$ коалиции $\omega\subseteq N$ исчисляется как суммарная прибыль, доставляемая ω всеми потенциально осуществимыми в рамках этой коалиции союзами. Используя аппарат, развитый в работах [1 - 3], удается построить аналоги вектора Шепли для некоторых классов игр $\Gamma=(Q,\Sigma,v)$ с бесконечным числом участников Q. Получены некоторые условия, обеспечивающие единственность и возможность конечномерной аппроксимации предлагаемого решения.

Работа состоит из четырех частей. В первой части приводится конечномерная интерпретация используемых в дальнейшем понятий и технических средств. Во второй и третьей частях формулируются и доказываются основные результаты, касающиеся бесконечномерных аналогов вектора Шепли для некоторых подпространств игр ограниченной полиномиальной вариации. В четвертом пункте изучаются свойства вектора Шепли для случая, когда Q представляет из себя метрический компакт с метрикой $\rho(t,t')$, характеризующей затраты, связанные с передачей единицы полезности игроком t игроку $t'(t,t'\in Q)$. Используя идеи, развитые в работах [4 - 5], удается построить соответствующую норму, позволяющую сводить нахождение вектора Шепли $\Phi(v)$ произвольной игры $\Gamma=(Q,\Sigma,v)$ к вычислению предела (по указанной норме) подходящей последовательности $\{\Phi(v_n)\}_{n=1}^{\infty}$, где v_n $(n=1,\ldots)$ – функции множеств с конечными носителями. Полученные результаты используются для формирования модифицированной аксиоматики функции Шепли, объединяющей случаи конечных и бесконечных (неатомических) игр, изученные в работах [6] и [7].

I. Пусть $\Gamma=(N,v)$ – произвольная кооперативная игра с конечным множеством игроков $N=\{1,\ldots,n\}$. Наряду с характеристической функцией v игры Γ рассмотрим функцию множеств $v_p: 2^N \to R$, значения которой определяются индукцией по числу элементов в $\omega\subseteq N$:

$$v_p(\emptyset)\triangleq 0,\quad v_p(\{i\})\triangleq v(\{i\}),$$
$$v_p(\{i_1,\ldots,i_k\})=v(\{i_1,\ldots,i_k\})-\sum_{\omega'\subset\{i_1,\ldots,i_k\}} v_p(\omega'). \tag{I.I}$$

Из формул (I.I) вытекает простое соотношение, связывающее функции v и v_p:

$$v(\omega)=\sum_{\omega'\subseteq\omega} v_p(\omega') \qquad (\omega\subseteq N). \tag{I.2}$$

Заметим, что величины $v_\omega \triangleq v_p(\omega)$ $(\omega=\{i_1,\ldots,i_k\})$ имеют смысл прибыли, возникающей в результате образования союза игроков $i_1,\ldots,i_k$, а формула (I.2) отражает тот факт, что гарантированный доход $v(\omega)$ коалиции $\omega\subseteq N$ совпадает с суммарной прибылью, доставляемой ω всеми потенциально осуществимыми в рамках этой коалиции союзами.

Использование тождества (I.2) дает следующую формулу компонент вектора Шепли игры Γ:

$$\Phi(v)(\{i\})=\sum_{\omega:\, i\in\omega} v_\omega/|\omega| \qquad (i\in N), \tag{I.3}$$

что, в свою очередь, позволяет интерпретировать последний как такой дележ, при котором прибыль, имеющаяся в распоряжении союза игроков $i_1,\ldots,i_k$, распределяется между ними поровну, при этом общий доход $\Phi(v)(\{i\})$ игрока $i\in N$ представляет из себя суммарную прибыль, получаемую им от всех союзов, членом которых он является.

Используя введенные выше величины v_ω $(\omega\in N)$, в пространстве $V(N)$ всех функций $v: 2^N\to R$ $(v(\emptyset)=0)$ можно определить норму $\|v\|_p \triangleq \sum_{\omega\subseteq N} |v_\omega|$ и конус положительных элементов $V_+(N)=\{v\in V(N): v_\omega \geqslant 0 \ (\omega\subseteq N)\}$, которые наделяют $V(N)$ структурой нормированного полуупорядоченного пространства. Наряду с пространством $V(N)$, важную роль в формировании предлагаемого бесконечномерного аналога вектора Шепли будет играть следующий функционал, определенный на пространстве $V(N)\times R^n$:

$$p(v,x)=\sum_{\omega\subseteq N} v_\omega \ (\sum_{i\in\omega} x_i/|\omega|).$$

Отметим простую связь функционала p с вектором Шепли, вытекающую из формулы (I.3) :

$$p(v,e_\omega)=\Phi(v)(\omega) \qquad (\omega\subseteq N), \qquad (I.4)$$

где

$$(e_\omega)_i=\begin{cases}1, & i\in\omega,\\ 0, & i\notin\omega\end{cases} \qquad (\omega\subseteq N).$$

В заключение этого пункта укажем способ построения аналога функции v_p для функций множеств ψ двух аргументов. Значения функции ψ_p $(\psi_p(\omega,\phi)=\psi_p(\phi,\omega')\triangleq 0 \ (\omega,\omega'\subseteq N))$ определим индукцией по числу элементов в $\omega,\omega'\subseteq N$: если $|\omega|=1$, $|\omega'|=1$, то $\psi_p(\omega,\omega')\triangleq\psi(\omega,\omega')$; если $\psi_p(\omega,\omega')$ уже определены для всех $\omega,\omega'\subseteq N$ таких, что $|\omega|\leqslant K$, $|\omega'|\leqslant K$, то полагаем:

$$\psi_p(\omega_1,\omega_2)\triangleq\psi(\omega_1,\omega_2)-\sum_{\substack{\omega_1'\subset\omega_1\\ \omega_2'\subseteq\omega_2}}\psi_p(\omega_1',\omega_2') \quad (|\omega_1|=K+1,\ |\omega_2|=K), \qquad (I.5)$$

$$\psi_p(\omega_1,\omega_2)\triangleq\psi(\omega_1,\omega_2)-\sum_{\omega_1'\times\omega_2'\subset\omega_1\times\omega_2}\psi_p(\omega_1',\omega_2') \quad (|\omega_1|=|\omega_2|=K+1).$$

Отметим еще, что из определения величин $\psi_{\omega,\omega'}\triangleq\psi_p(\omega,\omega')$ вытекает формула, аналогичная (I.2):

$$\psi(\omega_1,\omega_2)=\sum_{\omega_1'\subseteq\omega_1,\,\omega_2'\subseteq\omega_2}\psi_{\omega_1',\omega_2'} \qquad (\omega_1,\omega_2\subseteq N). \qquad (I.6)$$

2. Рассмотрим бесконечномерные аналоги некоторых понятий, введенных в п. I. Пусть (Q,Σ) – произвольное измеримое пространство. Через $\Xi(Q)$ обозначим совокупность всех конечных Σ-измеримых разбиений $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}$ множества Q. Для $v:\Sigma\longrightarrow R$ и $\eta\in\Xi(Q)$, $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}$, введем функ-

цию v^{η}, определенную на подмножествах из $N^{\eta}=\{1,\dots,m\}$ по формуле:

$$v^{\eta}(\omega)\triangleq v(\bigcup_{i\in\omega} e_i) \qquad (\omega\subseteq N^{\eta}).$$

Аналогично, для $\psi:\Sigma\times\Sigma\longrightarrow R$ и $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi(Q)$ через ψ^{η} обозначим функцию, определенную на $2^{N^{\eta}}\times 2^{N^{\eta}}$ в соответствии с формулой $\psi^{\eta}(\omega,\omega')\triangleq\psi(\bigcup_{i\in\omega}e_i,\bigcup_{j\in\omega'}e_j)(\omega,\omega'\subseteq N^{\eta})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I [3]. Будем говорить, что функция $v:\Sigma\to R$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если величина

$$\|v\|_0\triangleq\sup\{\|v^{\eta}\|_p:\ \eta\in\Xi(Q)\} \qquad (2.I)$$

конечна.

Совокупность всех функций v ограниченной полиномиальной вариации обозначим через $V=V(Q,\Sigma)$. Нетрудно видеть, что пространство V с нормой $\|\cdot\|_0$, определяемой правой частью (2.I) и частичным порядком $\geqslant_0$, определяемым конусом

$V_+=V_+(Q,\Sigma)=\{v\in V: v^{\eta}\in V^+(N^{\eta})\ (\eta\in\Xi(Q))\}$ $(v_2\geqslant_0 v_1\Leftrightarrow v_2-v_1\in V_+)$, является нормированным полуупорядоченным пространством.

Элементы подпространства $V^n=V^n(Q,\Sigma)=\{v\in V: v^{\eta}_{\omega}=0$ $(\eta\in\Xi(Q),\ |\omega|>n)\}$ будем, как и в [I], называть полиномиальными функциями множеств порядка n. Под пространством однородных функций множеств порядка m (см. [2]) будем понимать совокупность $V^{(m)}=V^{(m)}(Q,\Sigma)$ всех функций $v\in V^m(Q,\Sigma)$, для которых справедливо соотношение ж):

$$\lim_{\eta\in\Xi(Q)}\sum_{|\omega|=r}|v|^{\eta}_{\omega}=0 \qquad (r=1,\dots,m-1),$$

где $|v|=\max\{v,-v\}$ в полуупорядоченном пространстве $(V,\geqslant_0)$. Приведем необходимые для дальнейшего топологические и структурные свойства пространства V и его подпространств V^n, $V^{(n)}$.

ж) Под $\lim a(\eta)$ здесь и далее понимается предел обобщенной последовательности $\{a(\eta)\}_{\eta\in\Xi(Q)}$ по направлению $\Xi(Q)$. ($\Xi(Q)$ упорядочено по степени измельчения η.)

ТЕОРЕМА 2.I [3]. Нормированное полуупорядоченное пространство $(V(Q,\Sigma), \geq_0, \|\cdot\|_0)$ является KB -пространством.

ТЕОРЕМА 2.2 [3]. Для каждого $n \geq 1$ $V^n(Q,\Sigma)$-компонента пространства $V(Q,\Sigma)$, являющаяся прямой суммой подпространств $V^{(m)}(Q,\Sigma)$ $(m=1,\dots,n)$.

Переходя к формулировке аксиоматики предлагаемого аналога вектора Шепли, напомним (см. [7]), что пространство $W \subseteq R^{\Sigma}$ называется симметричным, если $\theta \cdot v \in W$ для всех $\theta \in \mathcal{T}$ и всех $v \in W$, где $\mathcal{T}$ - группа всех автоморфизмов измеримого пространства (Q,Σ), $\theta \circ v(e) \triangleq v(\theta(e))$ $(e \in \Sigma, \theta \in \mathcal{T})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функцией Шепли на симметричном подпространстве $W \subseteq V$ будем называть линейный оператор $\Phi: W \to V^1$, удовлетворяющий условиям:

$$\text{A1.}\quad \Phi(v) \geq_0 \mathbb{0} \qquad (v \in W \cap V_+),$$

$$\text{A2.}\quad \Phi(\theta \circ v) = \theta \circ \Phi(v) \qquad (\theta \in \mathcal{T}),$$

$$\text{A3.}\quad \Phi(v)(R) = v(Q) \qquad (R \in \operatorname{Supp} v),$$

где $\operatorname{Supp} v = \{R \in \Sigma : v(e \cap R) = v(e) \quad (e \in \Sigma)\}$ - совокупность всех носителей v.

Значение функции Шепли $\Phi(v)$ для элемента $v \in W$ будем называть вектором Шепли игры $\Gamma = (Q, \Sigma, v)$.

Прежде всего, следует отметить, что оператор, удовлетворяющий условиям определения 2.2, невозможно определить на всем пространстве $V(Q,\Sigma)$, не накладывая дополнительных ограничений на (Q,Σ) и функции из V. Так, например, если в качестве (Q,Σ) рассмотреть единичный отрезок I с борелевской σ-алгеброй B, то, допуская существование оператора Φ на всем пространстве $V(I,B)$, получим, следуя [7], что для элемента $\varepsilon_I \in V(I,B)$:

$$\varepsilon_I(e) = \begin{cases} 1, & e = I \\ 0, & e \neq I \end{cases} \qquad (e \in B),$$

существует мера $\mu = \Phi(\varepsilon_I)$, удовлетворяющая условиям AI - A3. Из A2, A3 и определения ε_I вытекает, что μ - ненулевая $\mathcal{T}$-инвариантная мера. Но это противоречит известному утверждению о том, что единственной $\mathcal{T}$-инвариантной мерой на (I, B) является нулевая мера.

Вместе с тем, не накладывая дополнительных ограничений на (Q,Σ), кроме естественного условия, что все точки из Q содержатся в Σ, можно выделить достаточно широкие симметричные подпространства W, допускающие существование указанного оператора. К последним, наряду с введенными выше подпространствами V^n, $V^{(n)}$ $(n=1,\dots)$, можно отнести также подпространства финитных, полиномиальных и аналитических функций множеств ([3]):

$$
\begin{aligned}
&fV=\{v\in V: \exists R\in \operatorname{Supp} v \ (|R|<\infty)\},\\
&pV=\{v\in V: \exists n \ (v\in V^n)\},\\
&aV=\{v\in V: \exists v_m\in V^{(m)} \ (m=1,\dots) \ (v=\sum_{m=1}^{\infty} v_m)\}.
\end{aligned}
$$

Именно, справедливы следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 2.3. Функция Шепли на подпространстве fV финитных функций на (Q,Σ) существует, единственна и ее значения вычисляются по формуле: $\Phi(v)=\sum_{t\in\tau} \alpha_t^v\cdot\varepsilon_t$ $(v\in fV)$, где $\tau=\{t_1,\dots,t_m\}$ - носитель v, $\varepsilon_t \ (t\in Q)$ - меры Дирака, а коэффициенты $\alpha_t^v \ (t\in\tau)$ определяются в соответствии с формулой (I.2), примененной к функции $v^\tau(\omega)=v(\bigcup_{i\in\omega}\{t_i\}) \ (\omega\subseteq\{1,\dots,m\})$.

ТЕОРЕМА 2.4. Функция Шепли на V^n существует при любом $n\geqslant 1$.

ТЕОРЕМА 2.5. Функция Шепли на подпространстве аналитических функций на (Q,Σ) существует и представима в виде:

$$\Phi(v)=\sum_{m=1}^{\infty} \Phi(v_m) \qquad (v\in aV),$$

где v_m - слагаемые в разложении $v=\sum_{m=1}^{\infty} v_m \quad (v_m \in V^{(m)}, \ m=1,\dots)$.

Ввиду очевидных включений $V^{(m)} \subseteq pV \quad (m=1,\dots)$ и $pV \subseteq uV$, из теоремы 2.5 вытекает, что функция Шепли определена и на подпространствах pV, $V^{(n)} \quad (n=1,\dots)$.

Используя специфику рассматриваемого класса функций, в ряде случаев удается уточнить свойства оператора Φ. В качестве примера можно привести выпуклые [ж)], монотонные и непрерывные в теоретико-множественном смысле функции множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $v \in aV$. Если v - выпуклая функция множеств, то $\Phi(v)$ принадлежит C-ядру [жж)] функции v.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если v - монотонная функция множеств из aV, то $\Phi(v)$ - неотрицательная мера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $v \in aV$. Если v - непрерывная в теоретико-множественном смысле функция, то $\Phi(v)$ - счетно-аддитивная мера.

Накладывая дополнительные ограничения не только на функции множеств из $V(Q,\Sigma)$, но и на измеримое пространство (Q,Σ), можно выделить подпространства $V(Q,\Sigma)$, элементы которых в соответствующей норме допускают сколь-угодно точную аппроксимацию финитными функциями множеств. Последнее обстоятельство, в случае непрерывности функции Шепли в такой норме, позволяет сводить нахождение вектора Шепли любой функции из этого подпространства к решению аналогичной задачи для близких к ней

ж) Напомним (см. [I], [9]), что функция $v:\Sigma \to R$ называется выпуклой, если $v(e_1)+v(e_2) \leq v(e_1 \cap e_2)+v(e_1 \cup e_2)$ для всех $e_1, e_2 \in \Sigma$.

жж) Под C-ядром функции $v:\Sigma \to R$ понимается совокупность всех аддитивных функций множеств $\mu:\Sigma \to R$, удовлетворяющих условиям: $\mu(Q)=v(Q)$, $\mu(e) \geq v(e) \ (e \in \Sigma)$.

финитных функций множеств. Простой иллюстрацией сказанного является пространство $cV(Z)$ всех непрерывных в теоретико-множественном смысле функций из $V(Z,\Omega)$, где Z – некоторое счетное множество, а Ω – алгебра всех его подмножеств. В этом случае, как нетрудно проверить, финитные функции плотны в нормированном пространстве $(cV(Z), \|\cdot\|_0)$, а оператор Φ непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_0$ (последнее, как и в общей ситуации, вытекает непосредственно из определения нормы $\|\cdot\|_0$). Используя соотношение $cV(Z) \subseteq aV(Z,\Omega)$, следующее из непрерывности функций из $cV(Z)$, имеем, на основании теоремы 2.5 и предложения 2.3 :

ТЕОРЕМА 2.6. Функция Шепли на $cV(Z)$ существует, единственна и значениями ее являются счетно-аддитивные меры на (Z,Ω). При этом $\Phi(v) = \lim_{n\to\infty} \Phi(v_n)$ (по норме $\|\cdot\|_0$) для любой последовательности $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ финитных функций из $cV(Z)$ таких, что

$$v_n(e) = v(e \cap R_n) \quad (e \in \Omega),\quad n = 1, \dots,$$

где $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность конечных подмножеств Z, сходящаяся (в теоретико-множественном смысле) к Z.

Другим примером является пространство $rV(Q)$ регулярных[ж)] функций множеств ограниченной полиномиальной вариации, определенных на борелевской алгебре $\Sigma = B(Q)$ метрического компакта Q. В отличие от $cV(Z)$, финитные функции не плотны в пространстве $(rV(Q), \|\cdot\|_0)$. В п. 4 будет показано, как ввести надлежащую норму $\|\cdot\|_1$ в пространстве $rV(Q)$, в которой

ж) Функция $v \in V(Q, B(Q))$ называется регулярной (см. [3]), если $|v|_n(e_1,\dots,e_n) = \sup\{|v|_n(f_1,\dots,f_n) : f_i \subseteq e_i,\ f_i \in F\ (i=1,\dots,n)\}$ для всех n и $\eta = \{e_1,\dots,e_{n+1}\} \in \Xi(Q)$, где $v_n(e_1,\dots,e_n) \triangleq \triangleq v^{\eta}_{\{1,\dots,n\}}$, а F – совокупность всех замкнутых подмножеств из Q.

$^{f}V(Q,\Sigma)$ будет всюду плотно в $({}^{\mathcal{U}}V(Q), \|\cdot\|_1)$, а оператор Φ непрерывен в $({}^{\mathcal{U}}V(Q), \|\cdot\|_1)$. Здесь мы лишь отметим, что ввиду непрерывности и аналитичности регулярных функций множеств, установленных в работе [3], справедлива

ТЕОРЕМА 2.7. *Функция Шепли на ${}^{\mathcal{U}}V(Q)$ существует и значениями ее являются счетно-аддитивные меры.*

3. Приведем доказательства основных результатов, сформулированных в п. 2. Пусть (Q,Σ) – произвольное измеримое пространство, удовлетворяющее условию $Q \subseteq \Sigma$, $Q^{(N)}$ – совокупность всех конечных подмножеств множества Q, $\alpha : Q^{(N)} \to R$, $\beta : Q^{(N)} \times Q^{(N)} \to R$, $v : \Sigma \to R$, $\psi : \Sigma \times \Sigma \to R$. Рассмотрим $\eta = \{e_1, \ldots, e_m\} \in \Xi(Q)$, $\tau = \tau^{\eta} = \{t_1, \ldots, t_m\}$ $(t_i \in e_i)$ и положим

$$S_v^{\alpha}(\eta,\tau) \triangleq \sum_{\omega \subseteq N^{\eta}} \alpha(\tau_\omega) \cdot v_\omega^{\eta},$$
$$S_\psi^{\beta}(\eta,\tau) \triangleq \sum_{\omega,\omega' \subseteq N^{\eta}} \beta(\tau_\omega, \tau_{\omega'}) \cdot \psi_{\omega,\omega'}^{\eta} \qquad (\tau_\omega \triangleq \{t_i : i \in \omega\}).$$

Пределы обобщенных последовательностей $\{S_v^{\alpha}(\eta,\tau)\}_{\eta \in \Xi(Q)}$, $\{S_\psi^{\beta}(\eta,\tau)\}_{\eta \in \Xi(Q)}$, если они существуют и не зависят от выбора τ^{η} $(\eta \in \Xi(Q))$, будем обозначать через $v(\alpha) = \int_Q \alpha(\tau) v(de)$, $\psi(\beta) = \int_Q\int_Q \beta(\tau,\tau')\psi(de, de')$, соответственно.

Пусть теперь $f \in B(Q,\Sigma)$, где $B(Q,\Sigma)$ – совокупность всех ограниченных Σ-измеримых функций. На $Q^{(N)}$ определим вещественнозначную функцию

$$f_p(\tau) \triangleq \sum_{t \in \tau} f(t)/|\tau| \qquad (\tau \in Q^{(N)}).$$

Бесконечномерный аналог функционала p из п.I в принятых обозначениях имеет вид:

$$p(v,f) = \int_Q f_p(\tau)\, v(de) \qquad (f \in B(Q\Sigma),\ v \in pV). \quad (3.I)$$

ЛЕММА 3.I. *Функционал p определен для всех $v \in pV$, $f \in B(Q,\Sigma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in B(Q,\Sigma)$, $v \in V^n$ (n – произвольное натуральное число). Покажем, что обобщенная последовательность $\{S_v^{f_p}(\eta,\tau)\}_{\eta\in\Xi(Q)}$ фундаментальна. Используя линейность $S_v^{f_p}(\eta,\tau)$ по v и теорему 2.2, можно, не уменьшая общности, считать, что $v\in V_+^{(n)}$. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и положим $M=\|f\|$. Так как $v\in V^{(n)}$, то найдется $\eta^\circ\in\Xi(Q)$ такое, что $\sum_{\omega:|\omega|<n} v_\omega^\eta < \varepsilon/6M$ для всех $\eta\geqslant\eta^\circ$. Поскольку f ограничена и измерима, то можно считать, что η° удовлетворяет требованию:

$$\omega(f,e_i^\circ)\leqslant\varepsilon/2\,v(Q)\qquad (i\in N^\eta),$$

где, как обычно, $\omega(f,e)\triangleq\sup\{|f(t)-f(t')|: t,t'\in e\}$.

Для установления фундаментальности $\{S_v^{f_p}(\eta,\tau)\}_{\eta\in\Xi(Q)}$ достаточно показать, что для любого $\eta\geqslant\eta^\circ$ имеет место неравенство:

$$\Delta_{\eta,\eta^\circ}=|S_v^{f_p}(\eta,\tau^\eta)-S_v^{f_p}(\eta^\circ,\tau^{\eta^\circ})|<\varepsilon .$$

Используя лемму I.I из [2] и очевидное неравенство $|f_p(\tau)|\leqslant M$, получим следующую оценку для Δ_{η,η°:

$$\Delta_{\eta,\eta^\circ}\leqslant 3M\Big(\sum_{\omega:|\omega|<n} v_\omega^{\eta^\circ}\Big)+\sum_{\omega:|\omega|=n}\omega(f,\eta)\,v_\omega^\eta, \tag{3.2}$$

где $\omega(f,\eta)=\max\{\omega(f,e_i): i\in N^\eta\}$.

Учитывая выбор η° и оценку (3.2), получаем нужное неравенство: $\Delta_{\eta,\eta^\circ}<\varepsilon$ $(\eta\geqslant\eta^\circ)$. Итак, предел обобщенной последовательности $\{S_v^{f_p}(\eta,\tau^\eta)\}_{\eta\in\Xi(Q)}$ существует и, в силу очевидного неравенства:

$$|f_p(\tau^\eta)-f_p(\bar\tau^\eta)|\leqslant\omega(f,\eta)\quad (f\in B(Q,\Sigma),\ \eta\in\Xi(Q)),$$

не зависит от выбора τ^η $(\eta\in\Xi(Q))$, ч.т.д.

Функционал p билинеен, как это вытекает непосредственно из определения частных сумм $S_v^{f_p}(\eta,\tau^\eta)\ (\eta\in\Xi(Q))$. Поэтому функция $p_v(f)\triangleq p(v,f)$ $(f\in B(Q,\Sigma))$ линейна при всех $v\in pV(Q,\Sigma)$.

ТЕОРЕМА 3.I. Для всякого $v\in pV(Q,\Sigma)$ линейный функционал p_v непрерывен на $B(Q,\Sigma)$ и обладает следующими свойствами:

1. $\|p_v\| \leq \|v\|_0$ $\quad (v \in pV)$,

2. $p_v(f) \geqslant 0$ $\quad (v \in pV \cap V_+,\ f \in B_+(Q,\Sigma))$,

3. $p_v(x_R) = v(Q)$ $\quad (v \in pV,\ R \in \mathrm{Supp}\ v)$,

4. $p_{\theta \circ v}(f) = p_v(\theta^{-1} \circ f)$ $\quad (\theta \in \mathcal{T},\ f \in B(Q,\Sigma))$,

где $\theta \circ f(t) \hat{=} f(\theta(t))$ $(t \in Q,\ \theta \in \mathcal{T})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство I вытекает из двух очевидных неравенств:

$$|f_p(\tau)| \leq \sup\{|f(t)| : t \in \tau\} \quad (\tau \in Q^{(N)}),$$
$$|v^\eta_\omega| \leq |v|^\eta_\omega \quad (\eta \in \Xi(Q),\ \omega \subseteq N^\eta).$$

Свойство 2 есть непосредственное следствие определения p_v. Переходя к доказательству свойства 3, установим сначала справедливость включения:

$$\mathrm{Supp}\ v \subseteq \mathrm{Supp}\ v_+ \cap \mathrm{Supp}\ v_- \quad (v \in pV), \qquad (3.3)$$

где $v_+ = \max\{v, 0\}$, $v_- = \max\{-v, 0\}$ в полуупорядоченном пространстве pV. Пусть $R \in \mathrm{Supp}\ v$. Рассматривая функции $v_1, v_2 \in pV$, определенные в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} v_1(e) &= v_+(e \cap R), \\ v_2(e) &= v_-(e \cap R) \end{aligned} \qquad (e \in \Sigma),$$

имеем:

$$v_+ \geqslant_0 v_1, \quad v_- \geqslant_0 v_2, \quad v = v_1 - v_2. \qquad (3.4)$$

Допуская, что в одном из первых соотношений из (3.4) выполняется строгое неравенство, получаем противоречие с тем, что v_+, v_- являются наименьшими элементами из V_+, осуществляющими разложение $v = u - w$ $(u, w \in V_+)$.

Учитывая соотношение (3.3) и линейность функционала p по первому аргументу, в проверке свойства 3 достаточно ограничиться случаем $v \in pV \cap V_+$. Итак, пусть $v \in V^\pi \cap V_+$, $R \in \mathrm{Supp}\ v$. Рассматривая разбиения $\eta \in \Xi(Q)$, элементы которых содержатся либо в R, либо в $Q \setminus R$, получаем следующие выражения для $S^{(x_R)_p}_v(\eta, \tau^\eta)$:

$$S^{(x_R)_p}_v(\eta, \tau^\eta) = v(R) + \delta(\eta, \tau^\eta),$$

где

$$|\delta(\eta,\tau^\eta)|\leq v(Q\setminus R)+v_2(R,Q\setminus R).$$

Так как $v(Q\setminus R)+v_2(R,Q\setminus R)=v(Q)-v(R)$ и $R\in \mathrm{Supp}\, v$, имеем

$$p_v(x_R)=\lim_{\eta\in\Xi(Q)} S_v^{(x_R)_p}(\eta,\tau^\eta)=v(Q),$$

что и требовалось установить.

Проверим, наконец, выполнение условия 4. Пусть $f\in B(Q,\Sigma)$, $\theta\in\mathcal{T}$. Рассмотрим частную сумму для $p_{\theta\circ v}(f)$, отвечающую разбиению $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi(Q)$ и набору $\tau^\eta=\{t_1,\dots,t_m\}$:

$$S_{\theta\circ v}^{f_p}(\eta,\tau^\eta)=\sum_{\omega\in N^\eta} f_p(\tau_\omega^\eta)\cdot(\theta\circ v)_\omega^\eta .$$

Учитывая определение $\mathcal{T}$, величину $S_{\theta\circ v}^{f_p}(\eta,\tau^\eta)$ можно записать в виде суммы $\sum_{\omega\in N^\eta}(\theta^{-1}\circ f)_p(\tau_\omega^{\theta\cdot\eta})\cdot v_\omega^{\theta\cdot\eta}$, где $\theta\cdot\eta=\{\theta(e_1),\dots,\theta(e_m)\}$, $\tau^{\theta\cdot\eta}=\{\theta(t_1),\dots,\theta(t_m)\}$. Поскольку для любого $\eta\in\Xi(Q)$ существует $\eta'\in\Xi(Q)$ такое, что $\eta=\theta\cdot\eta'$, то, используя указанное выражение для $S_{\theta\circ v}^{f_p}(\eta,\tau^\eta)$, получаем: $p_{\theta\circ v}(f)=p_v(\theta^{-1}\circ f)$.

Рассмотрим теперь отображение $\Phi: pV(Q,\Sigma)\longrightarrow V^1(Q,\Sigma)$, задаваемое в соответствии с формулой $\Phi(v)=\mu_v$ $(v\in pV(Q,\Sigma))$, где μ_v – мера, отвечающая непрерывному линейному функционалу p_v, определенному на $B(Q,\Sigma)$. Так как функционал p билинеен, то Φ – линейный оператор. Опираясь на теорему 3.I, покажем, что Φ удовлетворяет всем требованиям из определения 2.2. В самом деле, положительность Φ (A1) вытекает из положительности функционала p_v при $v\in pV\cap V_+$ (свойство 2 из теоремы 3.I), сохранение носителей (A2) – из того, что $p_v(x_R)=v(Q)$ $(R\in \mathrm{Supp}\, v)$ (свойство 4 из теоремы 3.I). Наконец, перестановочность Φ с элементами $\theta\in\mathcal{T}$ (A3) вытекает из цепочки равенств:

$$\Phi(\theta\circ v)=p_v(\theta^{-1}\circ x_e)=p_v(x_{\theta(e)})=\theta\circ\Phi(v)(e)\qquad(e\in\Sigma),$$

являющейся следствием определения μ_v, $\theta\circ f$ и свойства 3 функционала p_v, фигурирующего в формулировке теоремы 3.I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.5. В качестве претендента на роль функции Шепли в этом случае рассматривается отображение:

$$\Phi(v)(e)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{v_n}(e) \qquad (v\in aV,\ e\in\Sigma), \qquad (3.6)$$

где $v_n\ (n=1,\dots)$ – составляющие в разложении $v=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $(v_n\in V^{(n)}, n=1,\dots)$, μ_{v_n} – меры, отвечающие непрерывным линейным функционалам $\rho_{v_n}: B(Q,\Sigma)\to R$. Поскольку, в силу определения подпространств $V^{(n)}$ $(n=1,\dots)$, разложение $v=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ определяется единственным образом, то для установления корректности формулы (3.6) достаточно показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{v_n}$ сходится в $V^1(Q,\Sigma)$. Последнее является следствием соотношения $\sum_{n=1}^{\infty}\|v_n\|_0<\infty$, вытекающего из определения $aV(Q,\Sigma)$ и неравенств $\|\mu_{v_n}\|_0\leq\|v_n\|_0$ $(n=1,\dots)$, справедливость которых установлена в теореме 3.I.

Линейность и положительность оператора Φ вытекает из соответствующих свойств функционалов ρ_{v_n} $(n=1,\dots)$. Перестановочность Φ с элементами $\theta\in\mathcal{T}$ следует из линейности операторов $T_\theta: v\longmapsto\theta\circ v$ $(\theta\in\mathcal{T})$ и отмечавшейся ранее перестановочности Φ с T_θ $(\theta\in\mathcal{T})$ на подпространстве $pV(Q,\Sigma)$. Как и в доказательстве теоремы 3.I, сохранение носителей достаточно проверить для элементов $v\in aV\cap V_+$. Поскольку в этом случае элементы разложения $v=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ также принадлежат положительному конусу V_+, то любой носитель $R\in \mathrm{Supp}\, v$ является, очевидно, носителем каждого из элементов $v_n\ (n=1,\dots)$. Таким образом, выполнение условия A3 для оператора Φ вытекает из предшествующих настоящему доказательству замечаний, в силу которых $\Phi(v)(R)=v(Q)$ для всех $v\in pV$, $R\in\mathrm{Supp}\, v$.

Переходя к уточнению свойств оператора Φ, заметим, что определенный выше функционал $\rho: pV\times B(Q,\Sigma)\longrightarrow R$ можно задать по той же формуле (3.I) и на более широком пространстве $aV\times B(Q,\Sigma)$. Нетрудно проверить, что для любого $v\in aV(Q,\Sigma)$ мера μ_v, отвечающая в этом случае непрерывному линейному функционалу $\rho_v(f)=\rho(v,f)$ $(f\in B(Q,\Sigma))$, совпадает со значением функции Шепли $\Phi(v)$, построенной в процессе доказательства теоремы 2.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2.I. Пусть $v\in aV$ – монотонно возрастающая функция множеств, $f\in B(Q,\Sigma)$. Рассмотрим произвольные $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi(Q)$, $\tau^\eta=\{t_1,\dots,t_m\}$ и отвечающую им частную сумму $S_v^{f_\rho}(\eta,\tau^\eta)$. Последнюю можно переписать в виде:

$$S_v^{f_\rho}(\eta,\tau^\eta)=\sum_{i\in N^\eta} f(t_i)\Big[\sum_{\omega: i\in\omega} v_\omega^\eta/|\omega|\Big].$$

В силу формулы (I.3), коэффициенты при $f(t_i)$ $(i\in N^\eta)$ представляют из себя значения компонент $\Phi(v^\eta)(\{i\})$ $(i\in N^\eta)$ вектора Шепли конечной игры $\Gamma^\eta=(N^\eta, v^\eta)$. Используя формулу

$$\Phi(v^\eta)(\{i\})=\sum_{\omega: i\in\omega}\frac{(|\omega|-1)!\,(n-|\omega|)!}{n!}\left[v^\eta(\omega)-v^\eta(\omega\setminus\{i\})\right](i\in N^\eta),$$

полученную в работе [6], и монотонность, имеем: $S_v^{f_\rho}(\eta,\tau^\eta)\geq 0$. Последнее соотношение справедливо для любого набора $f\in B_+(Q,\Sigma)$, τ^η; $\eta\in\Xi(Q)$. Поэтому $\rho_v(f)\geq 0$ для всех $f\in B_+(Q,\Sigma)$, что и означает неотрицательность $\Phi(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2.2. Так же, как и в доказательстве предложения 2.I, рассмотрим произвольные $\eta\in\Xi(Q)$, $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}$, $\tau^\eta=\{t_1,\dots,t_m\}$ и отвечающие им конечномерную игру $\Gamma^\eta=(N^\eta, v^\eta)$ и частную сумму $S_v^{(\chi_e)_\rho}(\eta,\tau^\eta)$, где χ_e – характеристическая функция некоторого множества $e\in\Sigma$. Не уменьшая общности, можно считать, что каждый элемент разбиения η содержится либо в e, либо в $Q\setminus e$. Пусть $\omega_e=\{i\in N^\eta : e_i\subseteq e\}$. Тогда, в силу определения v^η, $S_v^{(\chi_e)_\rho}(\eta,\tau^\eta)$, справедливо соотношение:

$$\Phi(v^\eta)(\omega_e)=S_v^{(\chi_e)_\rho}(\eta,\tau^\eta).$$

Поскольку в конечном случае $\Phi(v^\eta)(\omega_e)\geq v^\eta(\omega_e)$ (см. [9]), то, используя соотношение $v^\eta(\omega_e)=v(e)$ и переходя к пределу по $\eta\in\Xi(Q)$, получаем: $\rho_v(\chi_e)\geq v(e)$, ч.т.д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2.3. Нетрудно проверить, что $v\in V$ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывны функции v_+, v_-. Поскольку Φ – линейный оператор, то, в силу равенства $v=v_+-v_-$, для доказательства предложения 2.3 достаточно убедиться в счетной аддитивности меры $\Phi(v)$ для непрерывных функций множеств $v\in aV\cap V_+$. Итак, пусть $v\in aV\cap V_+$ непрерывна. Поскольку $v\in V_+$, то, как легко видеть, v выпуклая. Поэтому, в силу предложения 2.2., имеем:

$$\Phi(v)(e) \geqslant v(e) \qquad (e \in \Sigma). \tag{3.7}$$

Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - возрастающая последовательность элементов из Σ, сходящаяся к Q. Из (3.7) вытекает соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(v)(e_n) \geqslant v(Q)$, что вместе с очевидным неравенством $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(v)(e_n) \leqslant v(Q)$ и дает требуемое:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(v)(e_n) = \Phi(v)(Q) = v(Q).$$

4. В этом пункте рассматривается аналог функции Шепли для случая, когда совокупность игроков образует метрический компакт (Q, ρ) с метрикой $\rho(t,t')$, характеризующей расходы, связанные с передачей единицы полезности игроком t игроку t'. Будем предполагать также, что каждому конечному набору $\tau = \{t_1, \dots, t_m\}$ поставлено в соответствие распределение $\alpha^{\tau} = (\alpha^{\tau}_{t_1}, \dots, \alpha^{\tau}_{t_m})$ $(\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha^{\tau}_{t_i} = 1,\ \alpha^{\tau}_{t_i} \geqslant 0\ (t_i \in \tau))$, отвечающее долям участия игроков $t \in \tau$ в прибыли образуемого ими союза τ. Величину расходов $R(\tau, \tau')$, связанных с передачей единицы полезности союзом τ союзу τ', естественно принять равной минимуму значений функционала $\sum\limits_{t\in\tau, t'\in\tau'} \rho(t,t') \cdot \psi_{tt'}$ при условиях:

$$\sum_{t'\in\tau'} \psi_{tt'} = \alpha^{\tau}_{t}, \quad \sum_{t\in\tau} \psi_{tt'} = \alpha^{\tau'}_{t'}, \quad \psi_{tt'} \geqslant 0 \quad (t\in\tau,\ t'\in\tau').$$

Легко проверить, что определенная таким образом функция $R(\tau,\tau')$ $(\tau,\tau' \in Q^{(N)})$ в случае, когда $\alpha^{\tau}_{t} > 0$ для всех $t \in \tau$ $(\tau \in Q^{(N)})$, является метрикой на $Q^{(N)}$. Кроме наличия механизма перераспределения полезности между игроками, предполагается возможность получения последней извне, причем затраты $P(\tau)$, связанные с получением единицы полезности союзом τ, характеризуются функцией $P: Q^{(N)} \to R$, удовлетворяющей требованиям:

$$|P(\tau) - P(\tau')| \leqslant R(\tau,\tau') \qquad (\tau,\tau' \in Q^{(N)}), \tag{4.1}$$

$$P(\tau) > \sup\{R(\tau,\tau') : \tau' \in Q^{(N)}\} \quad (\tau \in Q^{(N)}). \tag{4.2}$$

Рассмотрим игру $\Gamma=(Q,\Sigma,v)$ $(v\in \tau V(Q))$. Получение каждой коалицией $e\in\Sigma$ дохода $v(e)$ можно представить как результат перераспределения полезности между участниками игры и приобретения последней извне:

$$v(e)=w(e)+\psi(Q,e)-\psi(e,Q) \quad (e\in\Sigma), \tag{4.3}$$

где w - регулярная функция множеств из $V(Q,\Sigma)$, характеризующая количество полезности $w(e)$, приобретаемое коалицией e извне, а ψ - регулярная по каждому аргументу функция $\psi:\Sigma\times\Sigma\longrightarrow R$ из $\Psi_+(Q,\Sigma)=\{\psi:\psi^{\eta}_{\omega,\omega'}>0 \ (\eta\in\Xi(Q),$ $\omega,\omega'\subseteq N^{\eta})\}$, характеризующая количество полезности $\psi(e,e')$, передаваемое коалицией e коалиции e'. Затраты, связанные с перераспределением полезности и получением её извне, вычисляются по формулам:

$$c_1(\psi)=\int_Q\int_Q \mathcal{R}(\tau,\tau')\,\psi(de,de'), \tag{4.4}$$

$$c_2(w)=\int_Q P(\tau)\,|w|(de). \tag{4.5}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\alpha^{\tau}_{t}=1/|\tau|$ для всех $\tau\in Q^{(N)}$, $t\in\tau$, а $P(\tau)=\sum\limits_{t\in\tau}p(t)/|\tau|$ $(\tau\in Q^{(N)})$, где $p:Q\longrightarrow R$ - некоторая функция, удовлетворяющая условиям:

$$|p(t)-p(t')|\leqslant\rho(t,t') \qquad (t,t'\in Q),$$

$$p(t)>\sup\{\rho(t,t'):t'\in Q\} \qquad (t\in Q).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.I. Величину $\|v\|_1=\inf\{e_1(\psi)+e_2(w)\}$, где инфимум берется по всем ψ, w, удовлетворяющим условию (4.3), будем называть Φ-нормой функции $v\in\tau V(Q)$.

Как это явствует из определения, в принятых нами предположениях Φ-норма функции v имеет смысл минимальных расходов, связанных с реализацией игры $\Gamma=(Q,\Sigma,v)$.

ЛЕММА 4.I. Функция $\|\cdot\|_1:\tau V(Q)\longrightarrow R$ - норма на $\tau V(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неотрицательность, симметричность, положительная однородность и субаддитивность функции $\|\cdot\|_1$ вытекают непосредственно из ее определения. Покажем, что $\|v\|_1=0$ тогда и только тогда, когда $v=\mathbb{O}$. В самом деле, если $v\neq\mathbb{O}$

и $v(Q)=\alpha>0$, то, как это вытекает из свойств функции $\rho(\tau)$ $(\tau\in Q^{(N)})$, справедлива оценка $\|v\|_1\geq \alpha/2\cdot \mathrm{diam}\, Q$. Если же $v\in rV_0(Q)=\{v\in rV(Q): v(Q)=0\}$ и $v\neq 0$, то неравенство $\|v\|_1>0$ вытекает из существования непрерывного линейного функционала $l\neq 0$, определенного на локально-выпуклом пространстве $(rV_0(Q), \|\cdot\|_1)$ и принимающего ненулевое значение на v .

Переходя к построению последнего, заметим, что для всякой функции $\alpha: Q^{(N)}\to R$, удовлетворяющей условию:

$$|\alpha(\tau)-\alpha(\tau')|\leq R(\tau,\tau') \qquad (\tau,\tau'\in Q^{(N)}), \tag{4.6}$$

линейный функционал l_α , определенный в соответствии с формулой $l_\alpha(v)=\int_Q \alpha(\tau)v(de)$ $(v\in rV(Q))$, непрерывен на $(rV_0(Q), \|\cdot\|_1)$. Действительно, поскольку сужение Ф-нормы на подпространство $rV_0(Q)$ имеет вид:

$$\|v\|_1=\inf\{\psi(R):\psi\in\Psi_v\}, \tag{4.7}$$

где Ψ_v – совокупность всех регулярных по каждому аргументу функций множеств из $\Psi_+(Q,\Sigma)$, удовлетворяющих условию

$$\psi(Q,e)-\psi(e,Q)=v(e) \qquad (e\in\Sigma), \tag{4.8}$$

то, используя неравенство

$$|l_\alpha(v)|\leq\psi(R) \qquad (\psi\in\Psi_v), \tag{4.9}$$

вытекающее непосредственно из определения Ψ_v , получаем: $|l_\alpha(v)|\leq\|v\|_1$ $(v\in rV_0(Q))$, откуда и вытекает интересующая нас непрерывность l_α .

Таким образом, нужный нам функционал будет построен, если найдется функция $\alpha_0: Q^{(N)}\to R$, удовлетворяющая условию (4.6), такая, что $\int_Q \alpha_0(\tau)v(de)\neq 0$. Используя регулярность функции v , найдем замкнутое подмножество $f\subseteq Q$, для которого $v(f)=\alpha\neq 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\alpha>0$. Далее, так как v – аналитическая функция множеств (см.[3]), то существуют $n\geq 1$, $v_n\in rV^n(Q)$ $(rV^n(Q)=V^n\cap rV(Q))$, такие, что $\|v-v_n\|_0<\alpha/4$. Ясно, что $v_n(f)>3\alpha/4$ и, кроме того,

$$\left|\int_Q \alpha(\tau)\,v(de) - \int_Q \alpha(\tau)\,v_n(de)\right| < \alpha/4 \qquad (4.10)$$

для любой функции $\alpha : Q^{(N)} \to R$, удовлетворяющей условию (4.6). Используя теоретико-множественную непрерывность функции v_n, установленную в работе [3], найдем такую δ-окрестность f_δ множества f в пространстве (Q, ρ), что $|v_n|(f_\delta \setminus f) < \alpha/8$ и $|v_n|_2(f_\delta \setminus f,\ Q \setminus (f_\delta \setminus f)) < \alpha/8$. Если теперь для $\delta' < \delta/n$ через $F_{\delta'}$ обозначить δ'-окрестность множества $F = \{\tau : \tau \subseteq f,\ \tau \in Q^{(N)}\}$ в пространстве $(Q^{(N)}, \mathcal{R})$, то, в силу определения $\mathcal{R}$, справедливы соотношения:

$$F_{\delta'} \cap \{\tau \in Q^{(N)} : \tau \subseteq Q \setminus f_\delta\} = \emptyset, \qquad (4.11)$$

$$F_{\delta'} \cap \{\tau \in Q^{(N)} : |\tau| \le n,\ \tau \cap f \ne \emptyset,\ \tau \cap (Q \setminus f_\delta) \ne \emptyset,\ \tau \subseteq Q \setminus (f_\delta \setminus f)\} = \emptyset. \quad (4.12)$$

Рассмотрим функцию $\alpha_0 : Q^{(N)} \to R$, определенную по формуле

$$\alpha_0(\tau) = \begin{cases} 1 - \mathcal{R}(\tau, F)/\delta', & \tau \in F_{\delta'}, \\ 0, & \tau \notin F_{\delta'}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что α_0 удовлетворяет условию (4.6) и при этом, в силу соотношений (4.11) и (4.12), справедливы неравенства:

$$\int_Q \alpha_0(\tau)\,v(de) \ge 3\alpha/4 - \left[|v_n|(f_\delta \setminus f) + |v_n|_2(f_\delta \setminus f,\ Q \setminus (f_\delta \setminus f))\right] \ge \alpha/2.$$

Учитывая соотношение (4.10), имеем $\int_Q \alpha_0(\tau)\,v(de) > \alpha/4$, откуда и вытекает, что функция α_0 – искомая. Итак, $|v|_1 = 0 \Longleftrightarrow v = \mathbf{0}$, что и требовалось установить.

Одно из важнейших свойств нормированного пространства $({}^{q}V(Q), \|\cdot\|_1)$ выражается в следующем:

ТЕОРЕМА 4.1. *Совокупность элементов с конечными носителями всюду плотна в $({}^{q}V(Q), \|\cdot\|_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ${}^{q}V_0(Q)$ – гиперподпространство ${}^{q}V(Q)$, то соответствующий результат достаточно установить для ${}^{q}V_0(Q)$. Из теоремы об аналитичности регулярных функций множеств и из очевидных неравенств

$$\|v\|_1 \leq \int_Q\int_Q R(\tau,\tau')\,\frac{v_+(de)\cdot v_-(de')}{v_+(Q)} \leq 1/2\cdot \mathrm{diam}\,Q\cdot\|v\|_0 \quad (v\in {}^{\tau}V_0(Q)) \tag{4.13}$$

вытекает, что доказательство интересующего нас результата сводится к установлению плотности элементов с конечными носителями в подпространствах ${}^{\tau}V_0^{(n)}(Q)=V^{(n)}\cap{}^{\tau}V_0(Q) \quad (n=1,\ldots)$.

Итак, пусть $v\in{}^{\tau}V_0^{(n)}(Q)$, $\varepsilon>0$. В силу однородности v существует $\eta=\{e_1,\ldots,e_m\}\in\Xi(Q)$, такое, что для всех $\eta'\geq\eta$ справедливо неравенство

$$\sum_{\omega:|\omega|<n} |v|_\omega^\eta < \varepsilon/2\cdot\mathrm{diam}\,Q. \tag{4.14}$$

Рассмотрим вписанное в η разбиение $\eta^\circ=\{e_1^\circ,\ldots,e_{m_0}^\circ\}\in\Xi(Q)$, каждый элемент которого имеет диаметр, меньший $\varepsilon/\|v\|_0$. Выберем произвольные точки $t_i\in e_i^\circ$ $(i\in N=\{1,\ldots,m_0\})$ и построим элемент $v_1=\sum_{\omega\subseteq N} v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$, где

$$\varepsilon_{\tau_\omega}(e)\triangleq\begin{cases}1, & \tau_\omega\subseteq e,\\ 0, & \tau_\omega\not\subseteq e\end{cases} \qquad (\omega\subseteq N),$$

$$\tau_\omega\triangleq\{t_i\in\tau: i\in\omega\}.$$

Из построения v_1 ясно, что $\tau\in\mathrm{Supp}\,v_1$. Покажем, что $\|v-v_1\|_1<\varepsilon$. Ввиду того, что $v=\sum_{\omega\subseteq N} v_{\eta,\omega}$, где $v_{\eta,\omega}(e)=$ $=v_{|\omega|}(e\cap e_{i_1},\ldots,e\cap e_{i_k})$ $(e\in\Sigma,\ \omega=\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq N)$, то, полагая $w_\omega=v_{\eta,\omega}-v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$ $(\omega\subseteq N)$, имеем:

$$\|v-v_1\|_1\leq\sum_{\omega\subseteq N}\|w_\omega\|_1. \tag{4.15}$$

В силу неравенств (4.13) и (4.14) и соотношений:

$$\begin{aligned}&(w_\omega)_+\underset{\circ}{\leq}(v_+)_{\eta,\omega}+(v_+)_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega},\\ &(w_\omega)_-\underset{\circ}{\leq}(v_-)_{\eta,\omega}+(v_-)_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega},\\ &\|(v_+)_{\eta,\omega}+(v_-)_{\eta,\omega}+(v_+)_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}+(v_-)_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}\|_0=2|v|_\omega^\eta,\end{aligned} \tag{4.16}$$

вытекающих из леммы 3.1 из [3] и определения w_ω , получаем оценку: $\sum_{\omega:|\omega|<n}\|w_\omega\|_1<\varepsilon/2$. Оценивая оставшиеся слагаемые в правой части неравенства (4.15), заметим, что если $v\in V^n(Q,\Sigma)$, w – одна из функций $v_{\eta,\omega}$ или $v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$

и $\eta' \geq \eta$, то $v^{\eta'}_{\omega'}$ может отличаться от нуля только в том случае, когда $|\omega'| = n$ и каждый элемент e_{i_k} из $\eta_\omega = \{e_{i_1},\dots,e_{i_k}\}$ содержит ровно один элемент $e'_{j(i_k)}$ из $\eta'_{\omega'} = \{e'_{j_1},\dots, e'_{j_l}\}$.

Рассмотрим частные суммы для выражения

$$\int_Q\int_Q R(\tau,\tau') \frac{(w_\omega)_+ (de)\cdot(w_\omega)_- (de')}{(w_\omega)_+ (Q)}$$

при $\eta' \geq \eta$. Учитывая предыдущее замечание и соотношения (4.13), (4.14) и (4.16), получаем:

$$\|w_\omega\|_1 \leq \varepsilon/\|v\|_0 \cdot (v_+)^\eta_\omega \qquad (\omega \subseteq N) .$$

Отсюда $\sum_{\omega:|\omega|=n} \|w_\omega\|_1 < \varepsilon/2$, что и завершает доказательство теоремы. Если линейное подпространство всех элементов $v \in {}^{q}V(Q)$, имеющих конечные носители, обозначать через ${}^{q}V^f(Q)$, то нетрудно видеть, что ${}^{q}V^f(Q) \subseteq pV(Q)$, где $pV(Q) = pV \cap {}^{q}V(Q)$. Из теоремы 4.I вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.I. Подпространство $pV(Q)$ всюду плотно в нормированном пространстве $({}^{q}V(Q), \|\cdot\|_1)$.

Метрика R и Φ-норма $\|\cdot\|_1$ тесно связаны с функцией Шепли на ${}^{q}V(Q)$, как это показывает следующая

ТЕОРЕМА 4.2. Функция Шепли $\Phi: {}^{q}V(Q) \longrightarrow {}^{q}V^1(Q)$ непрерывна в пространстве $({}^{q}V(Q), \|\cdot\|_1)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение метрики R и соотношения (4.1), (4.2), характеризующие функцию ρ_f , можно показать, что $\|\Phi(v)\|_1 \leq \|v\|_1$ для всех $v \in {}^{q}V^f(Q)$.

При доказательстве аналогичного неравенства для общей ситуации достаточно ограничиться случаем $v \in {}^{q}V^n(Q)$, поскольку $pV(Q)$ всюду плотно в $({}^{q}V(Q), \|\cdot\|_0)$ и оператор Φ , как это вытекает из теоремы 3.I, непрерывен в ${}^{q}V(Q)$ по норме $\|\cdot\|_0$. Итак, пусть $v \in {}^{q}V^n(Q)\ (n \geq 1)$, $w = \Phi(v)$, $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует разбиение $\eta' = \{e'_1,\dots, e'_{m_1}\} \in \Xi(Q)$, такое, что $\|w - \Phi(v_{\eta'})\|_1 < \varepsilon$, где $v_\eta \triangleq \sum_{\omega \subseteq N^\eta} v^\eta_\omega \cdot \varepsilon_{\tau_\omega}$ $(\eta \in \Xi(Q))$. Так как элементы

$w_\eta = \sum_{i\in N^\eta} w(e_i)\cdot\varepsilon_{t_i}$ $(\eta\in\Xi(Q))$ сходятся к w в пространстве $({}^q V(Q), \|\cdot\|_1)$, то существует разбиение $\eta^\circ = \{e^\circ_1, \dots, e^\circ_{m_0}\}$, для которого

$$\|w_\eta - w\|_1 \leqslant \varepsilon/2 \qquad (\eta \geqslant \eta^\circ). \tag{4.17}$$

При этом без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{diam} e^\circ_i \leqslant \varepsilon/4\|v\|_0$ $(i\in N^{\eta^\circ})$. Далее, если $w_{\eta^\circ} = \sum_{i\in N^{\eta^\circ}} w(e^\circ_i)\cdot\varepsilon_{t^\circ_i}$, то, полагая $P_0 = \max_{i\in N^{\eta^\circ}} p(t^\circ_i)$, выберем $\eta' = \{e'_1, \dots, e'_{m_1}\}\in\Xi(Q)$ так, чтобы $\eta' > \eta^\circ$ и для всех $\eta \geqslant \eta'$ выполнялось неравенство:

$$|w(e^\circ_i) - \sum_{\omega: i\in\omega} v^\eta_\omega/|\omega|| \leqslant \varepsilon/4m_0P_0 \qquad (i\in N^{\eta^\circ}). \tag{4.18}$$

Последнее возможно в силу определения $\Phi(v)$ (теорема 3.I). Разбиение η' и является искомым. Действительно, учитывая, что $\Phi(v_\eta)(\{t_i\}) = \sum_{\omega: i\in\omega} v^\eta_\omega/|\omega|$ $(i\in N^\eta)$ (теорема 2.3), имеем:

$$\|\Phi(v_{\eta'}) - w_{\eta^\circ}\|_1 \leqslant \sum_{i\in N^{\eta^\circ}} \|\sum_{j\in N'_i} \gamma'_j \varepsilon_{t'_j} - w(e^\circ_i)\cdot\varepsilon_{t^\circ_i}\|_1, \tag{4.19}$$

где

$$\gamma'_j = \sum_{\omega': j\in\omega'} v^{\eta'}_{\omega'}/|\omega'| \qquad (j\in N^{\eta'}),$$

$$N'_i = \{j\in N^{\eta'} : t'_j \in e^\circ_i\} \qquad (i\in N^{\eta^\circ}).$$

Используя неравенство (4.18), оценку (4.19) и ограничения на диаметр элементов e°_i $(i\in N^{\eta^\circ})$, получим:

$$\|\sum_{j\in N'_i} \gamma'_j\cdot\varepsilon_{t'_j} - w(e^\circ_i)\cdot\varepsilon_{t^\circ_i}\|_1 \leqslant (\varepsilon/2\|v\|_0)\cdot(\sum_{j\in N'_i}|\gamma'_j|) + \varepsilon/4m_0 \qquad (i\in N^{\eta^\circ}).$$

Далее, так как $\|\Phi(v)\|_0 \leqslant \|v\|_0$, то из определения v_η, γ'_j и оценки (4.18) вытекает неравенство $\|\Phi(v_{\eta'}) - w_{\eta^\circ}\|_1 \leqslant \varepsilon/2$, что в соединении с (4.17) и доказывает нужное нам утверждение. Поскольку $\Phi(v_\eta)$ сходится к w в пространстве $({}^q V(Q), \|\cdot\|_1)$ при $\varepsilon\to 0$, то, в силу $\|\Phi(v_{\eta'})\|_1 \leqslant \|v_{\eta'}\|_1$, имеем: $\|\Phi(v)\|_1 \leqslant \|v\|_1$, ч.т.д.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Для каждой функции $v\in{}^q V(Q)$ существует последовательность $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ финитных функций из*

${}^{r}V(Q)$, такая, что $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ и $\Phi(v) = \lim_{n\to\infty} \Phi(v_n)$ (по норме $\|\cdot\|_1$).

Результаты этого пункта позволяют предложить следующую модификацию аксиоматики AI – A4 для функции Шепли на ${}^{r}V(Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Функцией Шепли на ${}^{r}V(Q)$ будем называть непрерывный линейный оператор $\Phi^{r}: {}^{r}V(Q) \longrightarrow {}^{r}V^{1}(Q)$ $(\sup_{\|v\|_1 \le 1} \|\Phi^{r}(v)\|_1 < \infty)$, удовлетворяющий требованиям:

A_1^r. $\Phi^r(\theta \circ v) = \theta \circ \Phi^r(v)$ $\quad (\theta \in \mathcal{T}, v \in {}^{r}V(Q))$,

A_2^r. $\Phi^r(v)(R) = v(Q)$ $\quad (R \in \mathrm{Supp}\, v, v \in {}^{r}V(Q))$.

На основании теорем 4.I, 4.2, и 2.3 имеем:

ТЕОРЕМА 4.3. Существует единственный непрерывный линейный оператор Φ^r, действующий из $({}^{r}V(Q), \|\cdot\|_1)$ в $({}^{r}V^1(Q), \|\cdot\|_1)$ и удовлетворяющий условиям A_1^r, A_2^r. При этом Φ^r совпадает с оператором Φ, фигурирующим в теореме 4.2 и тем самым удовлетворяет всем условиям AI – A4.

Отметим, что в случае, когда Q конечно, определение 4.2 (без требования непрерывности Φ^r, выполняющегося автоматически) совпадает с первоначальной аксиоматикой вектора Шепли, предложенной в работе [6]. В случае же с континуумом участников ((Q,Σ) – единичный отрезок с борелевской σ-алгеброй) приведенная выше аксиоматика отличается от предложенной в работе [7] прежде всего тем, что требование неотрицательности значений оператора Φ на монотонных функциях множеств (имеющее, как указывается в [7], по существу, топологический характер) заменяется условием непрерывности оператора Φ^r относительно нормы $\|\cdot\|_1$. Другое отличие состоит в том, что определение 4.2, обеспечивающее единственность оператора Φ^r, не предполагает неатомичности ж) функций мно-

ж) v называется неатомической (см. [7], [9]), если $v(Q \setminus \{t\}) = v(Q)$ для всех $t \in Q$.

жеств из $\tau V(Q)$. В связи с этим следует отметить, что попытки избавиться от неатомичности, сохраняя без существенных изменений аксиоматику из [7], приводят к появлению бесконечного множества операторов, удовлетворяющих такой аксиоматике (см. [9]). Что касается условий A_1^{τ} , A_2^{τ} , то первое из них совпадает с соответствующей аксиомой из [7], а второе (для неатомических функций) - является следствием более слабого требования $\varphi(v)(Q) = v(Q)$ из [7]. В заключение остается добавить, что в силу предложений 2.I, 2.3 и теоремы о единственности φ , полученной в [7] для изученного там подпространства неатомических функций множеств, операторы φ^{τ} и φ (из [7]) совпадают на общей области определения из $\tau V(Q)$.

Литература

I. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. 9, Новосибирск, 1973, с. 157-165.

2. ВАСИЛЬЕВ В.А. Общая характеристика полиномиальных функций множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. I4, Новосибирск, 1974, с. 103-123.

3. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об одном пространстве неаддитивных функций множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. I6, Новосибирск, 1975, с.99-120.

4. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Несколько примеров двойственных экстремальных задач. - В сб.: Математическое программирование , М., 1966, с. 9-39.

5. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций.- "Вестник ЛГУ", серия матем., мех. и астр., 1958, в.7, № 2, с. 52-59.

6. SHAPLEY L.S. A value for n-person games. - "Contribution to the theory of games", vol. I, Ann. Math. Studies, №24, Princeton Univ. Press, 1950, p.307-317.

7. AUMANN R.I., SHAPLEY L.S. Value of non-atomic games, pt.1: The Axiomatic Approach. RAND Corporation, RM-5468-PR, 1968.

8. SHAPLEY L.S. Cores of convex games. - "International Journal of game theory", 1971, vol.1, issue 1, p. 11-26.

9. HURT S. Values of mixed games. -"International Journal of game theory", 1973, vol.2, issue 2, p. 69-86.

Поступила в ред.-изд. отд.
II. II. 1975 г.