Выпуклый анализ

УДК 513.88:519.35

КВАЗИВЫПУКЛЫЕ ПРЕДПОРЯДКИ

Г.Ш.Рубинштейн, Франсуаз Фише

Настоящая статья посвящена изучению квазивыпуклых предпорядков, которые получаются в результате обобщения понятия квазивыпуклых функций. При этом мы следуем, в основном, работе [1], в которой были рассмотрены строго квазивыпуклые предпорядки. Для исследования соответствующих экстремальных задач предлагается схема двойственности, которую можно рассматривать как обобщение на случай предпорядков схемы, предложенной в [2] (см. также [3 , 4]).

§ 1. Основные определения

Напомним, что заданная на выпуклом множестве B аффинного пространства E функция $f: B \longrightarrow R$ называется квазивыпуклой, если она обладает следующими двумя свойствами:

1. Отвечающие функции f лебеговы множества

$$L_c(f) = \{x \in B \mid f(x) \leq c\}$$

являются выпуклыми при любом $c \in R$.

2. Если функция f в точке x_0 выпуклого множества $B' \subset B$ достигает локального минимума на пересечении B' с любой прямой, проходящей через x_0 , то функция f в этой точке достигает глобального минимума на B' .

Если же квазивыпуклая функция $f: B \longrightarrow R$ на любом отрезке $[x,y] \subset B$ достигает минимума не более чем в одной точке, то она называется строго квазивыпуклой.

Известно, что функция $f: B \longrightarrow R$ в том и только том случае является квазивыпуклой, если при любых $x \neq y$ из B эта функция на $[x,y]$ является постоянной или же для всех $z \in]x,y[$ имеют место строгие неравенства

$$f(z) < \max\{f(x), f(y)\}. \qquad (I)$$

Строго квазивыпуклые функции характеризуются тем, что для них при любых $x \neq y$ из B имеет место всегда второй из отмеченных случаев.

Заметим, что строго квазивыпуклые функции могут не достигать минимума на замкнутых отрезках. Таковой является, например, функция

$$f(t) = \begin{cases} -t-1 & \text{при } t \in [-1,0[, \\ t & \text{при } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Однако если квазивыпуклая функция непрерывна на $[x,y]$, то она, очевидно, на этом отрезке всегда достигает минимума в точках некоторого замкнутого отрезка $[x_1, y_1] \subset [x,y]$.

Приведенные понятия естественным образом переносятся на случай предпорядков.

Пусть на выпуклом множестве B произвольного аффинного пространства E (конечной или бесконечной размерности) задан некоторый (не обязательно совершенный) предпорядок, т.е. отношение минорирования $\preccurlyeq$. Соответствующие отношения мажорирования, предшествования, следования и эквивалентности, как обычно, будут обозначаться символами $\succcurlyeq$, $\prec$, $\succ$ и $\sim$. Если при этом для точек $x_t = x + t(y-x)$ отрезка $[x,y] \subset B$ при любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$ справедливы соотношения $x_{t_1} \prec x_{t_2}$ (соответственно $x_{t_1} \succ x_{t_2}$), то будем говорить, что точки рассматриваемого отрезка упорядочены по возрастанию (по убыванию). Далее, элемент $\hat{x}$ множества $B' \subset B$ называется наименьшим, если он мажорируется всеми другими элементами $x \in B'$ и, следовательно, сравним со всеми этими элементами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Заданный на выпуклом множестве B предпорядок $\preccurlyeq$ называется квазивыпуклым (короче, квп. п.), если при любых $x \neq y$ из B все точки отрезка $[x,y]$ эквивалентны, или же каждая внутренняя точка $z \in]x,y[$ предшествует, по крайней мере, одному из концов рассматриваемого отрезка $[x,y]$. Если же при любых $x \neq y$ имеет место второй из указанных случаев, то рассматриваемый предпорядок $\preccurlyeq$ называется строго квазивыпуклым (короче, строго квп. п.).

Заметим теперь, что каковы бы ни были квп. п. $\preccurlyeq$ на выпуклом множестве B и точки x, y из B, то найдутся (и притом однозначно) такие x_1 и y_1 из $[x,y]$, что точки отрезков $]x_1,x[$ и $]y_1,y[$ упорядочены по возрастанию, а открытый отрезок $]x_1,y_1[$ (если он не пустой, т.е. $x_1 \neq y_1$) состоит из эквивалентных точек, которые являются наименьшими элементами на $[x,y]$.

Относительно самих точек x_1 и y_1 в общем случае можно утверждать лишь следующее:

(а) Если $x_1 \neq y_1$, то при любых $x' \in]x_1,x]$, $y' \in]y_1,y]$ и $z \in]x_1,y_1[$, справедливы соотношения

$$z \preccurlyeq x_1 \prec x', \quad z \preccurlyeq y_1 \prec y'. \tag{2}$$

(б) Если же $x_1 = y_1 = u$, то эта точка является наименьшей, по крайней мере, на одном из отрезков $[u,x]$ или $[u,y]$.

Однако если рассматриваемый предпорядок $\preccurlyeq$ на $[x,y]$ может быть задан непрерывной квазивыпуклой функцией, то соотношения (2) в пункте (а) заменяются более сильными

$$z \sim x_1 \prec x', \quad z \sim y_1 \prec y',$$

а в пункте (б) точка u — предшествует всем отличным от неё точкам отрезка $[x,y]$. В связи с этим квп. п. $\preccurlyeq$ на B мы назовем непрерывным, если указанным более жестким требованиям удовлетворяют точки x_1 и y_1, отвечающие любым x и y из B.

Другими словами, непрерывный квп.п. $\preccurlyeq$ на B характеризуется тем, что при любых x и y из B найдутся такие точки x_1 и y_1 из $[x,y]$, что точки отрезков $[x_1,x]$ и $[y_1,y]$ упорядочены по возрастанию, а отрезок $[x_1,y_1]$ является множеством наименьших точек на $[x,y]$.

В дальнейшем нас будут интересовать, в основном, только непрерывные квп. п. $\preccurlyeq$ на B. Для каждого такого предпорядка рассмотрим отображение $\tau_{\preccurlyeq} : B \times B \longrightarrow B \times B$, сопоставляющее точкам x, y из B соответствующие точки x_1, y_1 отрезка $[x,y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Заданные на одном и том же выпуклом множестве B непрерывные квп.п. $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ называются эквивалентными, если отвечающие им отображения $\tau_{\preccurlyeq_1}$ и $\tau_{\preccurlyeq_2}$ совпадают.

С введенным отношением эквивалентности согласуется следующее понятие сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть на выпуклом множестве B задано направленное семейство непрерывных квп.п. $\preccurlyeq_\alpha$ и некоторый фиксированный непрерывный квп.п. $\preccurlyeq_0$. Про семейство квп.п. $\preccurlyeq_\alpha$ говорят, что оно сходится к квп.п. $\preccurlyeq_0$, если при любых x и y из B направленное семейство пар $\tau_{\preccurlyeq_\alpha}(x,y)$ сходится к паре $\tau_{\preccurlyeq_0}(x,y)$ (в двумерном пространстве $[x,y]\times[x,y]$).

Каждый класс эквивалентных непрерывных квп.п. на B , очевидно, характеризуется некоторым отображением $\tau: B\times B \longrightarrow B\times B$. Нетрудно проверить, что в каждом таком классе имеется единственный минимальный предпорядок, при котором $x\preccurlyeq y$ в том и только том случае, если при некоторых $z_1=x$, $z_2,\dots,z_r=y$ точки z_s совпадают с первыми элементами в парах $\tau(z_s, z_{s+1})$, $s=1,2,\dots,r-1$. Далее, каждый непрерывный квп.п. $\preccurlyeq$ на B является сужением некоторого эквивалентного ему совершенного квп.п. $\preccurlyeq'$.

Учитывая сказанное, в дальнейшем можно ограничиться, в основном, рассмотрением совершенных непрерывных квп.п. $\preccurlyeq$. Совокупность таких предпорядков, определенных на одном и том же выпуклом множестве B , мы будем обозначать через $P(B)$, а совокупность строгих предпорядков $\preccurlyeq$ из $P(B)$ - через $P_0(B)$.

При установлении сходимости конкретных семейств предпорядков из $P(B)$ оказывается полезным приводимый ниже признак.

Условимся говорить, что направленное семейство квп.п. $\preccurlyeq_\alpha$ из $P(B)$ обладает свойством установления, если для любых x и y из B найдется α_0 , удовлетворяющее одному из следующих взаимоисключающих условий:

а) $x\prec_\alpha y$ при всех $\alpha>\alpha_0$,

б) $y\prec_\alpha x$ при всех $\alpha>\alpha_0$,

в) $x\sim_\alpha y$ при всех $\alpha>\alpha_0$.

ЛЕММА I. Пусть направленное семейство квп. п. $\preccurlyeq_\alpha$ из $P(B)$ обладает свойством установления. Тогда определяемый этим семейством совершенный предпорядок

$$x \preccurlyeq_0 y \Longleftrightarrow x \preccurlyeq_\alpha y, \quad \forall \alpha > \alpha_0$$

является квазивыпуклым. Если он непрерывный, то исходное семейство к нему сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение проверяется непосредственно на основании определения квазивыпуклых предпорядков, а второе – на основании определения сходимости квп.п. $\preccurlyeq_\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Нетрудно проверить, что если фигурирующие в лемме I квп.п. $\preccurlyeq_\alpha$ строгие, то таковым является также квп.п. $\preccurlyeq_0$.

Сопоставим теперь каждому квп.п. $\preccurlyeq$ из $P(B)$ совершенно упорядоченное множество $\Xi(B,\preccurlyeq)$, которое получается путем факторизации исходного предупорядоченного множества B по соответствующему отношению эквивалентности $\sim$. При этом отображение множества B на $\Xi(B,\preccurlyeq)$, сопоставляющее каждому $x \in B$ соответствующий класс эквивалентности из $\Xi(B,\preccurlyeq)$, мы будем обозначать через $\sigma_\preccurlyeq$, а отношение порядка в $\Xi(B,\preccurlyeq)$ – символом $\leqslant$.

Таким образом, каждый квп. п. $\preccurlyeq$ из $P(B)$ порождает некоторое отображение σ выпуклого множества B в какое-то совершенно упорядоченное множество $(\Xi,\leqslant)$. Это отображение, в свою очередь, определяет исходный квп. п. $\preccurlyeq$ на B . А это означает, что каждый квп. п. $\preccurlyeq$ из $P(B)$ может быть задан с помощью некоторого отображения σ выпуклого множества B в какое-то совершенно упорядоченное множество $(\Xi,\leqslant)$.

Нетрудно проверить, что отображение $\sigma: B \longrightarrow (\Xi,\leqslant)$ в том и только том случае порождает на выпуклом множестве B квп.п. $\preccurlyeq_\sigma$, если выполнено следующее условие:

Каковы бы ни были $x \neq y$ из B , либо σ-образом отрезка $[x,y]$ является одна точка $\xi \in \Xi$, либо же для всех $z \in]x,y[$ имеют место строгие неравенства

$$\sigma(z) < \max\{\sigma(x), \sigma(y)\},$$

аналогичные неравенствам (I) для случая квазивыпуклых функций.

Однако это условие, естественно, не гарантирует непрерывности квп. п. $\preccurlyeq_\sigma$.

Изучаемые ниже конкретные квп. п. $\preccurlyeq$ из $P(B)$ задаются с помощью соответствующих отображений $\sigma: B \longrightarrow (\Xi, \leqslant)$. При этом в качестве совершенно упорядоченных множеств $(\Xi, \leqslant)$ принимаются, как правило, лексикографически упорядоченные $\vec{R}^m$. Другими словами, каждому $x \in B$ сопоставляется m-мерный вектор

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots, \sigma_m(x)),$$

где $\sigma_i: B \longrightarrow R$ – заданные функции. Для того чтобы получаемые при этом совершенные квп.п. $\preccurlyeq_\sigma$ являлись непрерывными, т.е. принадлежали интересующему нас классу $P(B)$, очевидно, достаточно, чтобы функции $\sigma_i: B \longrightarrow R$ были квазивыпуклыми и непрерывными на любом отрезке $[x, y] \subset B$.

В заключение этого параграфа заметим, что, как и в случае функций, наряду с квазивыпуклыми предпорядками рассматриваются квазивогнутые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Заданный на выпуклом множестве B предпорядок $\preccurlyeq$ называется квазивогнутым (короче, квг. п.), если противоположный предпорядок $\preccurlyeq'$, при котором

$$x \preccurlyeq' y \Longleftrightarrow y \preccurlyeq x,$$

является квазивыпуклым.

Все рассмотренные понятия, касающиеся квазивыпуклых предпорядков, естественным образом переформулируются для случая квазивогнутых предпорядков. Соответствующие классы совершенных непрерывных квг.п. $\preccurlyeq$ будут обозначаться через $P^-(B)$ и $P_0^-(B)$.

§ 2. Некоторые примеры сходящихся семейств квазивыпуклых и квазивогнутых предпорядков

В качестве исходных рассмотрим три семейства предпорядков, определяемых обычными функциями.

Предпорядки $\preccurlyeq_p$ первого семейства задаются на $B = R^n$ и определяются функциями

$$\sigma_p(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p, \quad p \in]1, +\infty[. \qquad (3)$$

Предпорядки $\preccurlyeq_p$ второго и третьего семейств задаются на $B=\mathring{R}^n_+=\{x\in R^n \mid x_i>0,\ i=1,2,\dots,n\}$ и определяются функциями:

$$\sigma_p(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^p, \quad p\in\,]0,1[, \tag{4}$$

$$\sigma_p(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^p, \quad p\in\,]-\infty,0[. \tag{5}$$

Функции (3) и (5) в соответствующих областях, как известно, являются строго квазивыпуклыми, а функции (4) - строго квазивогнутыми. При этом на любом отрезке $[x,y]\subset B$ все эти функции непрерывны. Следовательно, первое семейство содержится в $P_o(R^n)$, второе в $P_o^-(\mathring{R}^n_+)$, а третье в $P_o(\mathring{R}^n_+)$.

В [I] было показано, что первое семейство предпорядков из $P_o(R^n)$ при $p\uparrow+\infty$ и $p\downarrow 1$ обладает свойством установления. Порождаемые при этом строго квп.п. $\preccurlyeq_{+\infty}$ и $\preccurlyeq_{1^+}$ могут быть заданы с помощью отображений $\sigma_{+\infty}: R^n \longrightarrow \vec{R}^n$ и $\sigma_{1^+}: R^n \longrightarrow \vec{R}^2$, определяемых следующим образом:

$$\sigma_{1^+}(x)=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\ \sum_{i=1}^{n}|x_i|\ln|x_i|\Big), \tag{6}$$

$$\sigma_{+\infty}(x)=(|x_{i_1}|,|x_{i_2}|,\dots,|x_{i_n}|), \tag{7}$$

где $i_1,i_2,\dots,i_n$ характеризует перестановку компонент вектора $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, при которой

$$|x_{i_1}|\geq|x_{i_2}|\geq\dots\geq|x_{i_n}|.$$

Легко проверяется, что предпорядки $\preccurlyeq_{+\infty}$ и $\preccurlyeq_{1^+}$ являются непрерывными и, следовательно, исходные направленные семейства квп. п. $\preccurlyeq_p$, в силу леммы I, к ним сходятся.

Можно проверить, что второе семейство предпорядков из $P_o^-(\mathring{R}^n_+)$ при $p\uparrow 1$ и $p\downarrow 0$ также обладает свойством установления. Порождаемые при этом строго квг. п. $\preccurlyeq_{1^-}$ и $\preccurlyeq_{0^+}$ могут быть заданы с помощью отображений $\sigma_{1^-}: \mathring{R}^n_+ \longrightarrow \vec{R}^2$ и $\sigma_{0^+}: \mathring{R}^n_+ \longrightarrow \vec{R}$, определяемых следующим образом:

$$\sigma_{1^-}(x)=\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i,\ -\sum_{i=1}^{n} x_i\ln x_i\Big), \tag{8}$$

$$\sigma_{0^+}(x)=\prod_{i=1}^{n} x_i\,. \tag{9}$$

Так как получаемые квг. п. $\preccurlyeq_{1^-}$ и $\prec_{0^+}$ являются непрерывными, то соответствующие направленные семейства квг. п. $\preccurlyeq_p$ в силу леммы I к ним сходятся.

Точно так же можно проверить свойство установления для предпорядков из $P_0(\mathring{R}^n_+)$ при $p\uparrow 0$ и $p\downarrow -\infty$. Порождаемые при этом строго квп.п. $\preccurlyeq_{0^-}$ и $\preccurlyeq_{-\infty}$ могут быть заданы с помощью следующих отображений $\sigma_{0^-}: \mathring{R}^n_+ \longrightarrow \vec{R}$ и $\sigma_{-\infty}: \mathring{R}^n_+ \longrightarrow \vec{R}^n$:

$$\sigma_{0^-}(x) = -\prod_{i=1}^{n} x_i, \tag{10}$$

$$\sigma_{-\infty}(x) = (-x_{i_1}, -x_{i_2}, \dots, -x_{i_n}), \tag{11}$$

где

$$x_{i_1} \leqslant x_{i_2} \leqslant \dots \leqslant x_{i_n}.$$

Так как полученные здесь квп. п. $\preccurlyeq_{0^-}$ и $\preccurlyeq_{-\infty}$ также являются непрерывными, то соответствующие направленные семейства квп. п. $\preccurlyeq_p$ в силу леммы I к ним сходятся.

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА I. Определенные функциями (3)-(5) предпорядки $\preccurlyeq_p$ при $p\uparrow+\infty$, $p\downarrow 1$, $p\uparrow 1$, $p\downarrow 0$, $p\uparrow 0$, $p\downarrow -\infty$ сходятся к предпорядкам $\preccurlyeq_{+\infty}$, $\preccurlyeq_{1^+}$, $\preccurlyeq_{1^-}$, $\preccurlyeq_{0^+}$, $\preccurlyeq_{0^-}$, $\preccurlyeq_{-\infty}$, которые задаются на соответствующих B отображениями (7) - (II) в лексикографически упорядоченные $\vec{R}^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Классы строгих предпорядков $P_0(B)$ и $P_0^-(B)$, как мы видели, являются замкнутыми относительно рассмотренного предельного перехода. В то же время в классических рассмотрениях, при которых используется более грубый предельный переход, в качестве пределов семейств строгих квазивыпуклых и квазивогнутых предпорядков часто получаются нестрогие предпорядки.

Включая в исходные семейства найденные предельные предпорядки, мы получаем предпорядки $\preccurlyeq_p$, определенные на соответствующих $B \subset R^n$ уже при любых p из $\check{R} = [-\infty, 0^-] \cup \cup [0^+, 1^-] \cup [1^+, +\infty]$.

Рассмотрим теперь совокупность $\mathfrak{M}(R^n)$ всех непустых замкнутых выпуклых множеств $M \subset R^n$ и совокупность $\mathfrak{M}(\mathring{R}^n_+)$ всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств $M \subset \mathring{R}^n_+$. Нетрудно проверить, что каждое $M \in \mathfrak{M}(R^n)$ при любом $p \in [1^+, +\infty]$ содержит (естественно, единственный) наименьший элемент в соответствующем квп. п. $\preccurlyeq_p$ из $P_0(R^n)$, а каждое $M \in \mathfrak{M}(\mathring{R}^n_+)$ при любом $p \in [0^+, 1^-]$ и любом $p \in [-\infty, 0^+]$ содержит (единственный) наибольший элемент в соответствующем квг. п. $\preccurlyeq_p$ из $P_0^-(\mathring{R}^n_+)$ и (единственный) наименьший элемент в соответствующем квп. п. $\preccurlyeq_p$ из $P_0(\mathring{R}^n_+)$. Указанные элементы условимся обозначать через $x(p, M)$.

В [I] было показано, что если $M \in \mathfrak{M}(R^n)$ – выпуклый многогранник (пересечение конечного числа замкнутых полупространств), то его наименьшие элементы $x(p, M)$ при $p \uparrow +\infty$ сходятся к наименьшему элементу $x(+\infty, M)$ в квп. п. $\preccurlyeq_{+\infty}$. Однако этот результат не переносится на произвольные $M \in \mathfrak{M}(R^n)$. В то же время при $p \downarrow 1$ элементы $x(p, M)$ сходятся к $x(1^+, M)$, каково бы ни было $M \in \mathfrak{M}(R^n)$.

Можно проверить, что для рассмотренных в настоящей работе двух других семейств предпорядков справедливы аналогичные результаты.

Для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathring{R}^n_+)$ имеют место равенства:

$$\lim_{p\uparrow 1} x(p, M) = x(1^-, M), \quad \lim_{p\downarrow 0} x(p, M) = x(0^+, M),$$
$$\lim_{p\uparrow 0} x(p, M) = x(0^-, M).$$

Однако равенство $\lim_{p\downarrow -\infty} x(p, M) = x(-\infty, M)$ мы можем гарантировать лишь в случае, когда $M \in \mathfrak{M}(\mathring{R}^n_+)$ является выпуклым многогранником. Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Наименьшие элементы $x(p, M)$ выпуклых многогранников $M \in \mathfrak{M}(R^n)$ и $M \in \mathfrak{M}(\mathring{R}^n_+)$ при $p \uparrow +\infty$ и $p \downarrow -\infty$ сходятся к наименьшим элементам $x(+\infty, M)$ и $x(-\infty, M)$ в предельных квп. п. $\preccurlyeq_{+\infty}$ и $\preccurlyeq_{-\infty}$. В то же время для любых $M \in \mathfrak{M}(R^n)$ и $M \in \mathfrak{M}(\mathring{R}^n_+)$ наименьшие элементы $x(p,M)$ при $p\downarrow 1$ и $p\uparrow 0$ сходятся к наименьшим элементам $x(1^+,M)$ и $x(0^-,M)$ в предельных квп. п. $\preccurlyeq_{1^+}$ и $\preccurlyeq_{0^-}$. Аналогично, для любого $M\in\mathfrak{M}(\mathring{R}^n_+)$ его наибольшие элементы $x(p,M)$ при $p\uparrow 1$ и $p\downarrow 0$ сходятся к наибольшим элементам $x(1^-,M)$ и $x(0^+,M)$ в предельных квп. п. $\preccurlyeq_{1^-}$ и $\preccurlyeq_{0^+}$.

§ 3. Схема двойственности для экстремальных задач относительно предпорядков

Пусть в вещественном векторном пространстве E выделено выпуклое множество B, на котором задан непрерывный квп.п. $\preccurlyeq$. Для упрощения мы будем считать, что этот предпорядок является совершенным, т.е. принадлежит $P(B)$. Кроме того, будем предполагать, что соответствующее совершенно упорядоченное множество $\Xi=\Xi(B,\preccurlyeq)$ является непрерывным и не содержит наибольшего элемента. Исключая из этого множества наименьший элемент (если таковой имеется), получаем открытое совершенно упорядоченное непрерывное множество $\mathring{\Xi}$.

Для каждого $\xi\in\mathring{\Xi}$ положим

$$B_\xi=\{x\in B\mid \sigma_{\preccurlyeq}(x)\preccurlyeq\xi\}.$$

Допустим теперь, что в E выделена некоторая совокупность E^* выпуклых множеств x^*. Тогда для каждого $\xi\in\mathring{\Xi}$ через B^*_ξ мы обозначим совокупность таких $x^*\in E^*$, что $x^*\cap B\neq\emptyset$, но $x^*\cap B_{\xi'}=\emptyset$ при всех $\xi'<\xi$. Далее, через B^* обозначим объединение B^*_ξ по всем $\xi\in\mathring{\Xi}$.

При фиксированном E^* заданный квп. п. $\preccurlyeq$ из $P(B)$ порождает некоторый предпорядок $\preccurlyeq^*$ на B^*, который мы будем называть двойственным к исходному. Интересующий нас предпорядок $\preccurlyeq^*$ задаётся отображением $\sigma^*: B^*\longrightarrow\mathring{\Xi}$, при котором для каждого $x^*\in B^*$

$$\sigma^*(x^*)=\inf_{x\in x^*\cap B}\sigma_{\preccurlyeq}(x).$$

Заметим, что в классических случаях в качестве E^* принимается совокупность всех замкнутых полупространств исходного пространства E, в которой естественным образом определяется понятие отрезка. При этом двойственный предпорядок на B^* оказывается квазивогнутым.

В частности, если $B=E$, $\Xi = R_+$, $\sigma_{\preccurlyeq}(x) = \|x\|$, то B^* состоит из полупространств $x^* \subset E$, которые могут быть заданы неравенствами

$$y_{x^*}(x) \geqslant 1,$$

где y_{x^*} - непрерывные линейные функционалы, однозначно определяемые соответствующими полупространствами x^*. При этом

$$\sigma^*(x^*) = 1/\|y_{x^*}\|',$$

где $\|\cdot\|'$ - норма в пространстве E', сопряженном к E.

Рассмотренные двойственные предпорядки позволяют наметить общую схему для исследования экстремальных задач относительно квазивыпуклых (а также квазивогнутых) предпорядков.

Основная задача ставится следующим образом. В вещественном векторном пространстве E заданы выпуклые множества A и B. Кроме того, имеется отображение σ выпуклого множества B на некоторое совершенно упорядоченное непрерывное множество Ξ, не содержащее наибольшего элемента, причем порождаемый этим отображением предпорядок $\preccurlyeq_\sigma$ или, короче, $\preccurlyeq$ принадлежит $P(B)$. Требуется определить элемент $x \in A \cap B$, для которого $\sigma(x) \in \Xi$ достигает минимума. Поставленную задачу мы будем называть квазивыпуклой программой и обозначать через $(E, A, B, \preccurlyeq)$.

Для построения двойственной программы, исходя из некоторой фиксированной совокупности E^* выпуклых множеств $x^* \subset E$, рассмотрим, как это делалось выше, соответствующее $B^* \subset E^*$ и отображение $\sigma^*: B^* \longrightarrow \Xi$. Далее, положим

$$A^* = \{x^* \in E^* \mid A \subseteq x^*\}$$

и рассмотрим задачу, состоящую в разыскании элемента $x^* \in A^* \cap B^*$, для которого $\sigma^*(x^*)$ достигает максимума, т.е. наибольшего элемента множества $A^* \cap B^*$ в двойственном предпорядке $\preccurlyeq^*$. Эту задачу мы будем называть двойственной программой и обозначать через $(E^*, A^*, B^*, \preccurlyeq^*)$.

Элементы $x \in A \cap B$ и $x^* \in A^* \cap B^*$ называются допустимыми в соответствующих программах, а искомые допустимые элементы в этих программах называются оптимальными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в рассмотренной квазивыпуклой программе $(E, A, B, \preccurlyeq)$ имеется допустимый элемент x, для которого $\sigma(x)$ совпадает с наименьшим элементом множества Ξ, то эта программа тривиальна. Поэтому мы будем предполагать в дальнейшем, что $\sigma(A \cap B) \subset \overset{\circ}{\Xi}$.

Наряду с множеством $\overset{\circ}{\Xi}$ нам будет удобно рассматривать также расширенное совершенно упорядоченное множество $\tilde{\Xi} = \overset{\circ}{\Xi} \cup \{\xi_0, \xi_{00}\}$, полагая при этом, что для любого $\xi \in \overset{\circ}{\Xi}$

$$\xi_0 < \xi < \xi_{00}.$$

Рассмотрим теперь некоторую квазивыпуклую программу $(E, A, B, \preccurlyeq)$ и двойственную программу $(E^*, A^*, B^*, \preccurlyeq^*)$. Для любых допустимых элементов $x \in A \cap B$ и $x^* \in A^* \cap B^*$ с учетом замечания 3 имеем:

$$\sigma(x) > \xi_0, \quad \sigma^*(x^*) < \xi_{00}.$$

Кроме того, для этих элементов, как нетрудно проверить, всегда выполняется следующее соотношение двойственности:

$$\sigma(x) \geqslant \sigma^*(x^*). \tag{12}$$

Из приведенного соотношения двойственности непосредственно следует:

а) Если для допустимых элементов x и x^* в (12) достигается равенство, то эти элементы являются оптимальными в рассматриваемых программах $(E, A, B, \preccurlyeq)$ и $(E^*, A^*, B^*, \preccurlyeq^*)$.

б) Имеют место неравенства *)

$$\xi_0 \leqslant \sup_{x^* \in A^* \cap B^*} \sigma^*(x^*) \leqslant \inf_{x \in A \cap B} \sigma(x) \leqslant \xi_{00}, \tag{13}$$

причем в крайних неравенствах достигаются равенства в том и только том случае, если в соответствующих программах нет допустимых элементов.

Двойственная программа, как мы видели, однозначно определяется выбором соответствующего семейства E^* выпуклых мно-

*) Под супремумом и инфимумом пустого множества здесь понимаются, как обычно, величины ξ_0 и ξ_{00}.

жеств $x^* \subset E$. В приложениях рассматриваемой схемы эти семейства желательно выбирать настолько широкими, чтобы было выполнено следующее условие:

1^0. За исключением тривиального случая, когда ни в одной из рассматриваемых програм $(E, A, B, \preccurlyeq)$ и $(E^*, A^*, B^*, \preccurlyeq^*)$ нет допустимых элементов, из соотношения $A \cap B_\xi = \emptyset$ для некоторого $\xi \in \overset{\circ}{\Xi}$ следует, что $A^* \cap B^*_{\xi'} \neq \emptyset$ для всех $\xi' \in]\xi_0, \xi[$.

Нетрудно проверить, что при выполнении этого условия из наличия допустимых элементов по крайней мере в одной из програм рассматриваемой пары вытекает достижение равенства в среднем неравенстве соотношений (13).

Допустим теперь, что помимо условия 1^0 выполнены также следующие условия:

2^0. Если $A \cap B_{\xi'} \neq \emptyset$ при всех $\xi' > \xi > \xi_0$, то $A \cap B_\xi \neq \emptyset$.

3^0. Если $A^* \cap B^*_{\xi'} \neq \emptyset$ при всех $\xi' < \xi < \xi_{00}$, то $A^* \cap B^*_\xi \neq \emptyset$.

Тогда для рассматриваемых програм, как нетрудно проверить, справедлива следующая

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. Для указанных програм возможен лишь один из следующих четырех взаимоисключающих случаев:

$$\xi_0 = \sup_{x^* \in A^* \cap B^*} \sigma^*(x^*) < \inf_{x \in A \cap B} \sigma(x) = \xi_{00}, \tag{14}$$

$$\xi_0 < \sup_{x^* \in A^* \cap B^*} \sigma^*(x^*) = \inf_{x \in A \cap B} \sigma(x) = \xi_{00}, \tag{15}$$

$$\xi_0 = \sup_{x^* \in A^* \cap B^*} \sigma^*(x^*) = \inf_{x \in A \cap B} \sigma(x) < \xi_{00}, \tag{16}$$

$$\xi_0 < \sup_{x^* \in A^* \cap B^*} \sigma^*(x^*) = \inf_{x \in A \cap B} \sigma(x) < \xi_{00}, \tag{17}$$

причем в последнем случае знаки супремума и инфимума можно заменить на максимум и минимум, т. е. в обеих программах существуют оптимальные элементы.

Из приведенной теоремы двойственности непосредственно вытекают важные следствия.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ. Следующие утверждения относительно рассмотренных программ равносильны:

1) В обеих программах существуют оптимальные элементы.

2) В одной из программ существует оптимальный элемент.

3) В обеих программах существуют допустимые элементы.

4) В программе $(E, A, B, \preccurlyeq)$ существуют допустимые элементы, причем $\inf_{x \in A \cap B} \sigma(x) > \xi_0$.

5) В двойственной программе существуют допустимые элементы, причем $\sup_{x^* \in A^* \cap B^*} \sigma^*(x^*) < \xi_{00}$.

ПРИЗНАК ОПТИМАЛЬНОСТИ. Для оптимальности допустимого элемента в одной из рассматриваемых программ необходимо и достаточно существование допустимого элемента во второй программе такого, что для соответствующих допустимых элементов в неравенстве (12) достигается равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для исходной квазивыпуклой программы $(E, A, B, \preccurlyeq)$ приведенный признак оптимальности (в сторону необходимости), очевидно, совпадает со следующим требованием:

4^0. Если $x_0 \in A \cap B$ и при этом $A \cap B_\xi = \emptyset$ для всех $\xi < \sigma(x_0)$, то $A^* \cap B^*_{\sigma(x_0)} \neq \emptyset$.

Важно отметить, что для некоторых конкретных квазивыпуклых программ теорема двойственности не справедлива, но условие 4^0 выполняется, т.е. для любого оптимального элемента $x_0 \in A \cap B$ найдется допустимый элемент $x_0^* \in A^* \cap B^*$ такой, что $\sigma^*(x_0^*) = \sigma(x)$.

В заключение параграфа остановимся на важном вопросе о выборе семейства E^*, а также на общей характеристике рассмотренной схемы.

Если в качестве E^* принять совокупность всех выпуклых множеств $x^* \subset E$, то приведенная схема становится бессодержательной. Если же выбрать очень бедное семейство E^*, то тогда опять-таки содержательной теории не получится, так как при этом будут нарушаться условия 1^0, 3^0 и 4^0. Вместе с тем, семейство E^* должно состоять из достаточно простых выпуклых множеств $x^* \subset E$, при которых вспомогательные квазивыпуклые программы $\langle E, x^*, B, \prec \rangle$, фигурирующие при определении двойственного предпорядка $\prec^*$, являются не очень сложными.

В классических случаях, как уже отмечалось, в качестве E^* принимается совокупность всех замкнутых полупространств. При рассмотрении квазивыпуклых программ такие семейства уже часто оказываются слишком узкими. Достаточно универсальными в этом случае являются семейства E^*, состоящие из выпуклых множеств

$$x^* = \{x \in E \mid (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \overset{\text{лг.}}{\geq} (0, 0, \ldots, 0)\}, \qquad (18)$$

где $f_1, f_2, \cdots, f_z$ - некоторые аффинные функционалы, а неравенства понимаются в лексикографическом смысле. При этом в качестве основного инструмента для проверки выполнения рассмотренных условий $1^0 - 4^0$, как и в классических случаях, используются различные теоремы отделимости выпуклых множеств, включая обобщения этих теорем на случай лексикографической отделимости.

Описанная схема двойственности очевидным образом модифицируется для случая квазивогнутых программ. Такая модификация будет использоваться в некоторых примерах следующего параграфа.

Заметим еще, что при использовании рассмотренной схемы двойственности для исследования различных оптимизационных моделей в качестве E обычно принимается не пространство управлений (искомых переменных), а фазовое пространство значений интересующих нас функционалов.

§ 4. Некоторые примеры квазивыпуклых и квазивогнутых программ

Мы ограничимся здесь рассмотрением простейших программ относительно квазивыпуклых и квазивогнутых предпорядков, о которых шла речь в § 2. Таким образом, в соответствующих программах будут использоваться предпорядки $\preccurlyeq_p$, определяемые при любых p из $\bar{R}=[-\infty,0^-]\cup[0^+,1^-]\cup[1^+,+\infty]$ на соответствующих $B\subset R^n$ функциями (3-5) и отображениями (6-II).

Рассмотрим оптимизационную модель, в которой управление определяется выбором l-мерного вектора с неотрицательными компонентами, т.е. вектора $u=(u_1,u_2,\ldots,u_l)$ из $U=R^l_+$. При этом интересующие нас результаты характеризуются $(m+n)$-мерным вектором $x(u)$ с компонентами

$$x_j(u)=a_{j0}+\sum_{k=1}^{l} a_{jk}u_k,\quad j=\overline{1,m+n},$$

где a_{jk} - заданные вещественные числа.

Множество U_0 допустимых управлений состоит из тех $u\in U$, при которых

$$x_j(u)=0,\quad j=\overline{1,m},$$

и, кроме того,

$$x_{m+i}(u)>0,\ i=\overline{1,n},$$

если фигурирующий в критерии оптимальности параметр $p\in\bar{R}$ меньше 1^+.

Качество допустимого управления $u\in U_0$ определяется значением $\theta_p(u)=\sigma_p(x_{m+1}(u),x_{m+2}(u),\ldots,x_{m+n}(u))$ из $\Xi(B,\preccurlyeq_p)$ и, естественно, зависит от фиксации параметра $p\in\bar{R}$. При $p\in[-\infty,0^-]\cup[1^+,+\infty]$ соответствующие предпорядки принадлежат классу $P_0(B)$ и, следовательно, для получения квазивыпуклых программ при указанных p управления $u\in U_0$ следует считать оптимальными, если

$$\theta_p(u)=\min_{u'\in U_0}\theta_p(u').$$

Аналогично, при $p\in[0^+,1^-]$, так как соответствующие предпорядки принадлежат классу $P_0^-(B)$, мы получаем квазивогнутые программы, если оптимальными считать управления, для которых

$$\theta_p(u) = \max_{u' \in U_0} \theta_p(u').$$

Так как при $p \in \bar{R} \setminus \{-\infty, 1^-, 1^+, +\infty\}$ отображения $\mathcal{T}_p$ являются обычными функциями, то при исследовании соответствующих программ в рассмотренной схеме двойственности в качестве E^* можно принимать совокупность замкнутых полупространств $x^* \subset R^{m+n}$. В результате для указанных программ устанавливаются следующие признаки оптимальности.

ТЕОРЕМА 3. При $p \in]-\infty, 0^-] \cup [0^+, 1^-[$ для оптимальности допустимого управления $u^\circ = (u_1^\circ, u_2^\circ, \ldots, u_l^\circ)$ необходимо и достаточно, чтобы нашелся $(m+n)$-мерный вектор $y^\circ = (y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_{m+n}^\circ)$, удовлетворяющий условиям:

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{j0} y_j^\circ > 0, \quad \sum_{j=1}^{m+n} a_{jk} y_j^\circ \leq 0, \quad k = \overline{1, l},$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{jk} y_j^\circ = 0, \quad \text{если } u_k^\circ > 0,$$

$$y_{m+i}^\circ = \lambda (x_{m+i}(u^\circ))^{p-1}, \quad i = \overline{1, n},$$

где λ – некоторое положительное число.

ТЕОРЕМА 4. При $p \in]1^+, +\infty[$ для оптимальности допустимого управления $u^\circ = (u_1^\circ, u_2^\circ, \ldots, u_l^\circ)$ необходимо и достаточно[ж)], чтобы нашелся $(m+n)$-мерный вектор $y^\circ = (y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_\circ^{m+n})$, удовлетворяющий условиям:

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{j0} y_j^\circ > 0, \quad \sum_{j=1}^{m+n} a_{jk} y_j^\circ \geq 0, \quad k = \overline{1, l}, \tag{19}$$

ж) При этом мы исключаем тривиальный случай, когда для $u^\circ \in U_0$ имеет место равенство $x(u^\circ) = 0$.

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{jk} y_j^\circ = 0, \text{ если } u_k^\circ > 0, \tag{20}$$

$$y_{m+i}^\circ = \lambda \cdot |x_{m+i}(u^\circ)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} x_{m+i}(u^\circ), \quad i = \overline{1,n},$$

где λ - некоторое положительное число.

Перейдем теперь к рассмотрению более сложных програми, отвечающих $p \in \{-\infty, 1^-, 1^+, +\infty\}$. При исследовании этих програми на основе описанной схемы двойственности уже нельзя ограничиться замкнутыми полупространствами. Здесь в качестве E^* приходится принимать более широкие совокупности, состоящие из выпуклых множеств $x^* \subset R^{m+n}$, задаваемых лексикографическими неравенствами (I8). Для характеристики устанавливаемых при этом результатов приведем признак оптимальности для квазивыпуклой программы, которая получается при $p = 1^+$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть при $p = 1^+$ управление $u^\circ = (u_1^\circ, u_2^\circ, \dots, u_l^\circ)$ является допустимым и ему отвечает вектор[ж)] $x(u^\circ) = (x_1(u^\circ), x_2(u^\circ), \dots, x_{m+n}(u^\circ))$. Выделим множества

$$I_0(u^\circ) = \{i \mid x_{m+i}(u^\circ) = 0\}, \quad I_1(u^\circ) = \{i \mid x_{m+i}(u^\circ) \neq 0\}$$

и рассмотрим два случая:

а) отвечающие всем $i \in I_1(u^\circ)$ величины $|x_{m+i}(u^\circ)|$ являются равными;

б) среди указанных величин имеются, по крайней мере, две не совпадающие.

В случае а) для оптимальности рассматриваемого управления $u^\circ \in U_0$ необходимо и достаточно, чтобы нашелся $(m+n)$-мерный вектор $y^\circ = (y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_{m+n}^\circ)$, удовлетворяющий соотношениям (I9) и (20), а также ус-

---

ж) См. предыдущую сноску.

ловию

$$y^{\circ}_{m+i} = \operatorname{sign}\, x_{m+i}(u^{\circ}),\ i \in I_1(u^{\circ}),\ |y^{\circ}_{m+i}| < 1,\ i \in I_0(u^{\circ}). \qquad (21)$$

Если же имеет место случай б), то для оптимальности рассматриваемого управления $u^{\circ} \in U_0$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие $(m+n)$-мерные векторы $y^{\circ} = (y^{\circ}_1, y^{\circ}_2, \ldots, y^{\circ}_{m+n})$ и $z^{\circ} = (z^{\circ}_1, z^{\circ}_2, \ldots, z^{\circ}_{m+n})$, что выполнены условия (19)-(21) и, кроме того,

$$z^{\circ}_{m+i} = \lambda \cdot y^{\circ}_{m+i}(1 + \ln|x_{m+i}(u^{\circ})|),\quad i \in I_1(u^{\circ}),\quad \lambda > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{jk} z^{\circ}_j \geq 0, \text{ если } \sum_{j=1}^{m+n} a_{jk} y^{\circ}_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{jk} z^{\circ}_j = 0, \text{ если } u^{\circ}_k > 0.$$

В заключение отметим, что квазивыпуклые и квазивогнутые предпорядки можно рассматривать как формализацию понятия выпуклого предпочтения, которое возникло в математической экономике в связи с изучением моделей обмена и экономического равновесия. Основные результаты теории таких моделей относятся к случаю, когда соответствующие предпочтения могут быть заданы с помощью обычных функций. Перенесение некоторых из этих результатов на более общие предпорядки нам представляется весьма интересным.

Изученные классы предпорядков представляют также интерес для некоторых других вопросов, в частности, связанных с построением естественных регуляризаций для некорректных выпуклых задач. Простейшие примеры такого рода были рассмотрены в § 2.

Литература

1. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном обобщении понятия строго квазивыпуклых функций.- В сб.: Оптимальное планирование. Вып. 14, Новосибирск, 1969, с. 130-136.

2. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственные экстремальные задачи.-"Докл. АН СССР", 1963, т. 152, № 2, с.188-291.

3. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Несколько примеров двойственных экстремальных задач. - В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 9-39.

4. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. -"Успехи мат. наук", 1970, т. 25, вып.5, с. 171-201.

Поступила в ред.-изд. отд.

30. IУ. 1975 г.