Выпуклый анализ

УДК 513.88:519.53

ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ

В.А.Васильев

В настоящей заметке изучается кольцо $V(Q,\Sigma)$ неаддитивных функций множеств ограниченной полиномиальной вариации, являющееся естественным расширением кольца $pV(Q,\Sigma)$ полиномиальных функций множеств, введенных в работе [1]. Устанавливается ряд структурных и топологических свойств пространства $V(Q,\Sigma)$, позволяющих привести достаточно полное описание некоторых его подпространств.

Работа состоит из четырех пунктов. В первом пункте совокупность всех функций множеств ограниченной полиномиальной вариации наделяется структурой полуупорядоченного нормированного кольца и доказывается, что получающееся пространство является KB-кольцом. Следующие три пункта относятся к исследованию регулярных функций множеств – неаддитивного аналога регулярных борелевских мер. Содержанием второго пункта является изложение конструкции представления регулярных полиномиальных функций множеств в виде мер на соответствующих σ-алгебрах и установление на этой основе некоторых свойств непрерывности регулярных функций. В третьем пункте предлагается один способ продолжения нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ Канторовича-Рубинштейна [2, 3] с подпространства $rV^1(Q)$ регулярных борелевских мер на пространство $rV(Q)$ всех регулярных функций множеств. Соответствующая модификация аргументов, используемых в работе [2], позволяет перенести ряд важных свойств подпространства $rV^1(Q)$

на все пространство $r V(Q)$. В настоящей заметке приводятся два таких свойства нормированного пространства $(r V(Q), \|\cdot\|_{(p)})$: компактность единичной сферы $r V(Q)$ (по норме полной вариации) в норме $\|\cdot\|_{(p)}$ и плотность в $(r V(Q), \|\cdot\|_{(p)})$ элементов с конечными носителями. Один из основных результатов четвертого пункта - теорема об аналитичности регулярных функций множеств с вытекающей из нее плотностью регулярных полиномиальных функций множеств в KB-пространстве $r V(Q)$.

I. Пусть $(Q \Sigma)$ - некоторое измеримое пространство, W - совокупность всех функций $v : \Sigma \longrightarrow R$, удовлетворяющих дополнительному условию: $v(\emptyset) = 0$. Для $v \in W$ определим по индукции последовательные полиномиальные разности относительно конечных наборов попарно-непересекающихся элементов $e_i \in \Sigma \, (i \in N)$

$$v_1(e_1) \triangleq v(e_1),$$

$$v_{n+1}(e_1, \dots, e_{n+1}) \triangleq v_n(e_1, \dots, e_n \cup e_{n+1}) - v_n(e_1, \dots, e_n) - v_n(e_1, \dots, e_{n+1}). \quad (1.1)$$

Обозначая через $\Xi(e)$ совокупность всех конечных Σ -измеримых разбиений элемента $e \in \Sigma$, положим:

$$v_\omega^\eta \triangleq v_m(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \quad (\eta = \{e_1, \dots, e_n\} \in \Xi(e), \ \omega = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq N^\eta = \{1, \dots, n\}).$$

Из определения последовательных разностей, применяя индукцию по числу элементов в разбиении $\eta = \{e_1, \dots, e_n\} \in \Xi(e)$, получаем следующее тождество:

$$v(e) = \sum_{\omega \subseteq N^\eta} v_\omega^\eta \qquad (e \in \Sigma, \ \eta \in \Xi(e)). \qquad (1.2)$$

Последнее можно положить в основу другой схемы индуктивного определения последовательных разностей $v_n(e_1, \dots, e_n)$ $(\eta = \{e_1, \dots, e_n\} \in \Xi(e))$:

$$v_1(e_i) = v_{\{i\}}^\eta \triangleq v(e_i) \qquad (i \in N^\eta),$$

$$v_m(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) = v_{\{i_1, \dots, i_m\}}^\eta \triangleq v\Big(\bigcup_{k=1}^m e_{i_k}\Big) - \sum_{\omega' \subset \omega} v_{\omega'}^\eta \ (\omega = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq N^\eta). \quad (1.3)$$

Наконец, отметим, что оба эти определения совпадают с предложенным ранее в работе [I], где величина $v_n(e_1, \dots, e_n)$ вводилась по формуле:

$$v_n(e_1, \dots, e_n) \triangleq \sum_{\omega \subseteq N^\eta} (-1)^{n - |\omega|} \, v\Big(\bigcup_{i \in \omega} e_i\Big). \qquad (1.4)$$

В дальнейшем будем пользоваться тем из определений, которое наиболее удобно в рассматриваемой ситуации.

Приведем некоторые тождества, вытекающие из определения последовательных разностей.

Пусть η , $\eta' \in \Sigma(e)$, $\eta = \{e_1, \dots, e_m\}$, $\eta' = \{e_{11}, \dots, e_{1\tau_1}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{m\tau_m}\}$, причем $\bigcup_{\tau=1}^{\tau_i} e_{i\tau} = e_i$ ($i = 1, \dots, m$), $\sum_{i=1}^{m} \tau_i = n$. Через $S_m^{\eta'}$ обозначим совокупность всех подмножеств множества $N^{\eta'} = \{11, \dots, 1\tau_1, \dots, m1, \dots, m\tau_m\}$, проекция которых на первую координату совпадает со всем множеством $N^{\eta} = \{1, \dots, m\}$. Тогда для всякой функции $v \in W$ имеет место тождество:

$$v_m(e_1, \dots, e_m) = \sum_{\omega \subseteq S_m} v_\omega^{\eta'} . \tag{I.5}$$

Доказательство последнего получается индукцией по $n - m$; в качестве базисного можно взять тождество:

$$v_m(e_1, \dots, e_{m1} \cup e_{m2}) = v_m(e_1, \dots, e_{m1}) + v_m(e_1, \dots, e_{m2}) + v_{m+1}(e_1, \dots, e_{m1}, e_{m2}), \tag{I.6}$$

вытекающее из первого определения последовательных полиномиальных разностей.

Второе тождество характеризует последовательные разности для произведения двух функций из W . Итак, пусть $\eta = \{e_1, \dots, e_m\}$, $v = v_1 \cdot v_2$ $(v(e) \triangleq v_1(e) \cdot v_2(e) \quad (e \in \Sigma))$.
Тогда справедливо тождество:

$$v_m(e_1, \dots, e_m) = \sum_{\omega_1, \omega_2 : \omega_1 \cup \omega_2 = N^\eta} (v_1)_{\omega_1}^{\eta} \cdot (v_2)_{\omega_2}^{\eta} . \tag{I.7}$$

Проверка (I.7) легко осуществляется на основании второго определения последовательных разностей и тождества (I.2).

Перейдем к выделению интересующего нас класса функций множеств из W . Пусть $v \in W$. Через $\|v\|_0$ обозначим величину:

$$\|v\|_0 = \sup \{ \sum_{\omega \subseteq N^\eta} |v_\omega^\eta| : \eta \in \Sigma(Q) \} . \tag{I.8}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Будем говорить, что функция $v \in W$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если $\|v\|_0 < \infty$. Совокупность всех функций ограниченной полиномиальной вариации из W будем обозначать через $V = V(Q, \Sigma)$.

В силу очевидных соотношений $(v_1+v_2)^\eta_\omega=(v_1)^\eta_\omega+(v_2)^\eta_\omega$, $(\lambda v)^\eta_\omega = \lambda v^\eta_\omega$ и определения величины $\|\cdot\|_0$, совокупность $V(Q,\Sigma)$ является линейным пространством относительно операций поточечного сложения и умножения на скаляр, а функция $\|\cdot\|_0 : V \longrightarrow R$ удовлетворяет всем требованиям нормы на $V(Q,\Sigma)$.

Используя тождество (I.2), имеем: $\sum_{\omega\subseteq N^\eta} |(v_1\cdot v_2)^\eta_\omega| \leq \leq (\sum_{\omega\subseteq N^\eta} |(v_1)^\eta_\omega|)\cdot(\sum_{\omega\subseteq N^\eta}|(v_2)^\eta_\omega|)$, откуда

$$\|v_1\cdot v_2\|_0 \leq \|v_1\|_0\cdot\|v_2\|_0 \qquad (v_1, v_2\in V(Q,\Sigma)). \tag{I.9}$$

Таким образом, введение операции поточечного умножения наделяет пространство $(V(Q,\Sigma), \|\cdot\|_0)$ структурой коммутативного нормированного кольца.

Рутинная проверка показывает, что $(V(Q,\Sigma), \|\cdot\|_0)$ - полное пространство. Суммируя сказанное, имеем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. $(V(Q,\Sigma), \|\cdot\|_0)$ - *банахово кольцо.*

Выделим конус вполне положительных функций множеств (надмер в терминологии [I]):

$$V_+ = V_+(Q,\Sigma)=\{v\in V : v^\eta_\omega \geq 0 (\eta\in \Xi(Q),\ \omega\subseteq N^\eta)\}$$

и определим частичный порядок в $V(Q,\Sigma)$, полагая

$$v_1 \geq_0 v_2 \Longleftrightarrow v_1 - v_2 \in V_+ \quad (v_1, v_2\in V).$$

Используя определение последовательных разностей и тождество (I.7), легко убедиться в том, что $V_+ + V_+ \subseteq V_+$, $V_+\cdot V_+\subseteq V_+$, откуда вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. $V(Q,\Sigma)$ *является полуупорядоченным кольцом относительно частичного порядка, порожденного конусом* $V_+(Q,\Sigma)$.

Определяя полную вариацию $|v|$ для функции $v\in V(Q,\Sigma)$ в соответствии с формулой

$$|v|(e) = \sup\{\sum_{\omega\subseteq N^\eta}|v^\eta_\omega| : \eta\in\Xi(e)\} \qquad (e\in\Sigma),$$

непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $|v|\in V(Q,\Sigma)$

и $|v|=v\vee -v$ ж). Далее, используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теоремы 2.I из [4], можно показать, что ($V, \|\cdot\|_0, \geq_0$) – KN-линеал. Последнее, в сочетании с аддитивностью нормы $\|\cdot\|_0$ и полнотой пространства ($V, \|\cdot\|_0$), приводит нас к следующему утверждению

ТЕОРЕМА I.I. П о л у у п о р я д о ч е н н о е н о р м и р о в а н н о е к о л ь ц о $V(Q,\Sigma)$ я в л я е т с я KB - п р о с т р а н с т в о м (KB -кольцом).

Важную роль в дальнейших рассмотрениях будут играть подпространства однородных, полиномиальных и аналитических функций множеств, введенные в работах [I], [4]. Напомним соответствующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2 [I] . Функция $v\in V(Q,\Sigma)$ называется полиномиальной порядка n , если $v_{n+1}(e_1,\dots,e_{n+1})=0$ для всех $\eta=\{e_1,\dots,e_n,e_{n+1}\}\in \mathcal{E}(e)$ и $e\in\Sigma$.

Совокупность всех таких функций будем обозначать через $V^n(Q,\Sigma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.3 ([4]). Функция $v\in V^n(Q,\Sigma)$ называется однородной порядка n , если выполняется условие жж)

$$\lim_{\eta\in \mathcal{E}(e)} \sum_{\omega\subseteq N^\eta:|\omega|=k} v^\eta_\omega=0 \qquad (e\in\Sigma,\ k=1,\dots,n-1). \quad (I.10)$$

Совокупность всех однородных функций порядка n будем обозначать через $V^{(n)}(Q,\Sigma)$ ($V^{(1)}(Q,\Sigma)\triangleq V^1(Q,\Sigma)$).

Из результатов работы [4] (теоремы 2.2., 3.I.) вытекает следующая характеристика подпространств $V^n(Q,\Sigma), V^{(n)}(Q,\Sigma)$:

ТЕОРЕМА I.2. Д л я к а ж д о г о $n\geq 1$ п о д п р о с т р а н с т в а $V^n(Q,\Sigma)$, $V^{(n)}(Q,\Sigma)$ я в л я ю т с я к о м п о н е н т а м и п р о с т р а н с т в а $V(Q,\Sigma)$.

Там же отмечалось, что для каждого $n\geq 1$ подпространство $V^n(Q,\Sigma)$ представляет из себя прямую сумму попарно-дизъюнкт-

---

ж) $\vee$, $\wedge$ – операции взятия максимума и минимума соответственно в пространстве $V(Q,\Sigma)$, упорядоченном конусом $V_+(Q,\Sigma)$. В дальнейшем используются обычные сокращения: $v_+=v\vee 0$, $v_-=-v\vee 0$.

жж) $\mathcal{E}(e)$ упорядоченно по степени измельчения разбиений.

ных подпространств $V^{(m)}(Q,\Sigma)$ ($m=1,\ldots,n$); именно, каждый элемент $v\in V^n(Q,\Sigma)$ единственным образом представим в виде суммы однородных функций множеств:

$$v=\sum_{m=1}^{n} v_m \qquad (v_m\in V^{(m)}(Q,\Sigma),\ m=1,\ldots,n). \tag{I.II}$$

Формула (I.II), характеризующая строение полиномиальных функций множеств $v\in V^n(Q,\Sigma)$, является основой для выделения подпространства аналитических функций множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.4. Функция $v\in V(Q,\Sigma)$ называется аналитической, если она представима в виде

$$v=\sum_{m=1}^{\infty} v_m \qquad (v_m\in V^{(m)}(Q,\Sigma), m=1,\ldots), \tag{I.I2}$$

где под суммой ряда (I.I2) понимается $(o)-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n} v_m$ в полуупорядоченном пространстве $(V(Q,\Sigma),\geqslant_o)$.

Совокупность всех аналитических функций множеств из $V(Q,\Sigma)$ будем обозначать через $aV(Q,\Sigma)$.

Аналитические функции множеств представляют из себя наименьшую компоненту пространства $V(Q,\Sigma)$, содержащую нормальный подлинеал полиномиальных функций множеств $pV(Q,\Sigma)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n(Q,\Sigma)$, как это вытекает из следующей теоремы (доказательство опускаем):

ТЕОРЕМА I.3. $aV(Q,\Sigma)$ - замкнутое кольцо, являющееся компонентой пространства $V(Q,\Sigma)$. При этом справедливо соотношение*)

$$aV(Q,\Sigma)=(pV(Q,\Sigma))^{dd} \ . \tag{I.I3}$$

2. Начиная с этого пункта всюду в дальнейшем в качестве Q рассматривается метрический компакт с метрикой ρ , в качестве Σ - борелевская σ-алгебра компакта Q . Совокупность всех замкнутых подмножеств f пространства (Q,ρ) будем обозначать через $\hat{Q}$.

---

*) E^d - дизъюнктное дополнение E в $V(Q,\Sigma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Функция множеств $v \in V(Q,\Sigma)$ называется регулярной, если для любых $n \geq 1$, $\eta = \{e_1,\ldots,e_n\} \in E(e)$, $e \in \Sigma$ выполняется условие

$$|v|_n(e_1,\ldots,e_n) = \sup\{|v|_n(f_1,\ldots,f_n) : f_i \in \hat{Q},\ f_i \subseteq e_i\ (i=1,\ldots,n)\}.$$

Множество всех таких функций обозначим через $\tau V(Q)$.

Нетрудно проверить, что $\tau V(Q)$ - нормальное подпространство $V(Q,\Sigma)$. Отметим также, что $\tau V(Q)$ замкнуто относительно операции умножения, введенной в $V(Q,\Sigma)$. В самом деле, если $v_1, v_2 \in \tau V_+(Q)$, то регулярность $v_1 \cdot v_2$ вытекает непосредственно из определения 2.I и тождества (I.7). Общий случай получается из предыдущего на основании неравенства $|v_1| \cdot |v_2| \geq_0 |v_1 \cdot v_2|$ и нормальности подпространства $\tau V(Q)$.

Суммируя вышесказанное с очевидной замкнутостью $\tau V(Q)$ в пространстве $(V(Q,\Sigma), \|\cdot\|_c)$, имеем, на основании теоремы I.I :

ТЕОРЕМА 2.I. Полуупорядоченное нормированное пространство $(\tau V(Q), \geq_0, \|\cdot\|_0)$ является KB-кольцом.

Полиномиальные функции множеств из $\tau V(Q)$ непрерывны относительно теоретико-множественной сходимости, как это будет следовать из возможности представления их в виде мер на соответствующих σ-алгебрах подмножеств множества $\hat{Q}$.

Перейдем к рассмотрению указанного представления. Пусть n - произвольное натуральное число. Положим $Q^{(n)} = \{\tau \in \hat{Q} : |\tau| \leq n\}$ и для $\eta = \{e_1,\ldots,e_m\} \in E(e)$ $(e \in \Sigma)$ через $\eta^{(n)} = \{e_1,\ldots,e_m\}^{(n)}$ обозначим совокупность всех элементов $\tau \in Q^{(n)}$, удовлетворяющих условиям: $\tau \subseteq e$, $\tau \cap e_i \neq \emptyset$ $(i = 1,\ldots,m)$. При $m=1$ множество $\eta^{(n)}$ будем обозначать также через $e^{(n)}$. Рассмотрим алгебру $\Sigma^{(n)}$ подмножеств из $Q^{(n)}$, порожденную семейством $\mathcal{E} = \{e^{(n)} : e \in \Sigma\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Алгебра $\Sigma^{(n)}$ состоит из всевозможных конечных объединений множеств вида $\eta^{(n)}$ $(\eta \in E(e), e \in \Sigma)$. При этом для каждого $E \in \Sigma^{(n)}$ существует разбиение $\eta \in E(Q)$, такое, что $E = \bigcup_{\omega \in \Omega_\eta(E)} \eta_\omega^{(n)}$, где $\eta_\omega \triangleq \{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\}$, $(\omega = \{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq N^{(\eta)})$, а $\Omega_\eta(E)$ - подмножеств о $\Omega_\eta^n=\{\omega\subseteq N^\eta : |\omega|<n\}$, зависящее от E и η.

Представления множества $E\in\Sigma^{(n)}$, указанные во второй части предложения 2.I., будем называть каноническими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2.I. Прежде всего покажем, что всякое множество $E=\bigcup_{s\in S(E)}\eta_s^{(n)}$ представимо в каноническом виде. С этой целью заметим, что если e_o, e_o^1, $e_o^2\in\Sigma$, $e_o=e_o^1\cup e_o^2$, $e_o^1\cap e_o^2=\varnothing$, $\eta_o=\{e_o,e_1,\dots,e_m\}\in E(e)(e\in\Sigma)$, $\eta=\{e_o^1,e_1,\dots,e_m\}\in E(e\setminus e_o^2)$, $\eta_2=\{e_o^2,e_1,\dots,e_m\}\in E(e\setminus e_o^1)$, $\eta_{12}=\{e_o^1,e_o^2,e_1,\dots,e_m\}$, $\eta_{12}\in E(e)$, то справедливо тождество

$$\eta_o^{(n)}=\eta_1^{(n)}\cup\eta_2^{(n)}\cup\eta_{12}^{(n)}. \tag{2.I}$$

Взяв в качестве $\eta\in E(Q)$ произведение разбиений $\bar\eta_s\in E(Q)$ ($s\in S(E)$), $\bar\eta_s=\{e_1^s,\dots,e_{m_s}^s,Q\setminus e_s\}$ и используя последовательно соотношение (2.I), приходим к искомому каноническому представлению $E=\bigcup_{\omega\in\Omega_\eta(E)}\eta_\omega^{(n)}$. Так как совокупность $\mathcal{J}$ всех множеств вида $E=\bigcup_{s\in S(E)}\eta_s^{(n)}$ замкнута относительно операции объединения, то для доказательства первой части предложения 2.I достаточно показать, что $\mathcal{J}$ замкнута относительно операции дополнения. Итак, пусть $E\in\mathcal{J}$. Воспользовавшись его каноническим представлением $E=\bigcup_{\omega\in\Omega_\eta(E)}\eta_\omega^{(n)}$ и очевидным тождеством

$$Q^{(n)}=\bigcup_{\omega\in\Omega_\eta^n}\eta_\omega^{(n)}, \tag{2.2}$$

имеем (ввиду того, что $\eta_\omega^{(n)}\cap\eta_{\omega'}^{(n)}=\varnothing$ при $\omega\neq\omega'$): $Q^{(n)}\setminus E=\bigcup_{\omega\in\Omega_\eta^n\setminus\Omega_\eta(E)}\eta_\omega^{(n)}$, откуда и вытекает требуемый результат.

Используя канонические представления для элементов алгебры $\Sigma^{(n)}$, построим вложение $\imath V^n(Q)=V^n(Q,\Sigma)\cap\imath V_1(Q)$ в $V^1(Q^{(n)},\Sigma^{(n)})$. Именно, если $v\in\imath V^n(Q)$, то через μ_v обозначим функцию множеств, определенную для каждого $E\in\Sigma^{(n)}$ в соответствии с формулой

$$\mu_v(E)=\sum_{\omega\in\Omega_\eta(E)}v_\omega^\eta, \tag{2.3}$$

где $\eta \in \Xi(Q)$, $\Omega_\eta(E)$ определяются из некоторого канонического представления E. Построение функции μ_v корректно, поскольку величина, определяемая правой частью формулы (2.3), как нетрудно проверить, не зависит от выбора канонического представления для $E \in \Sigma^{(n)}$.

Применяя канонические представления для элементов $E \in \Sigma^{(n)}$ и формулу (2.2), нетрудно убедиться в том, что μ_v представляет из себя конечно-аддитивную меру ограниченной вариации на $(Q^{(n)}, \Sigma^{(n)})$.

Пусть $\sigma\Sigma^{(n)}$ - наименьшая σ-алгебра, содержащая $\Sigma^{(n)}$.

Функцию μ_v можно распространить до счетно-аддитивной меры на $\sigma\Sigma^{(n)}$, как это вытекает из следующих ниже рассуждений.

Рассмотрим семейство $\mathcal{K}$, состоящее из всевозможных конечных объединений множеств вида $\eta^{(n)}=\{f_1,\dots,f_m\}^{(n)}$ ($f_i \in Q$, $i = 1,\dots, m$). Каждое множество из $\mathcal{K}$ компактно в топологии, порожденной метрикой Хаусдорфа $\mathcal{R}(f_1,f_2)=\max\{\max\limits_{t\in f_1}\min\limits_{t'\in f_2}\rho(t,t'),\ \max\limits_{t'\in f_2}\min\limits_{t\in f_1}\rho(t',t)\}$ $(f_1,f_2\in \hat{Q})$. В самом деле, указанная топология совпадает с экспоненциальной топологией в $\hat{Q}$ (см. [5]), открытая база которой задается совокупностью $\mathcal{G}$ всех подмножеств вида $G(g_0,g_1,\dots,g_m)=\{f\in \hat{Q}: f\subseteq g_0,\ f\cap g_i\neq\emptyset \ (i=1,\dots,m)\}$, где g_0, $g_1,\dots, g_m$ - произвольные открытые подмножества из (Q,ρ). Следовательно, множества $G(f,\hat{Q})$, $G(G,f)$ $(f\in\hat{Q})$ замкнуты в $(\hat{Q},\mathcal{R})$. Компактность множеств $E\in\mathcal{K}$ вытекает теперь из компактности множества $Q^{(n)}$, являющегося непрерывным образом декартовой степени Q^n метрического компакта (Q,ρ) при отображении $(t_1,\dots,t_n)\longmapsto\{t_1,\dots,t_n\}$ $((t_1,\dots,t_n)\in Q^n)$, и из очевидного соотношения $\{f_1,\dots,f_n\}^{(n)}=Q^{(n)}\cap G(\bigcup\limits_{i=1}^{m} f_i, Q)\cap\bigcap\limits_{i=1}^{m} G(Q,f_i)$.

Пусть теперь $v\in r V_+^n(Q)$. Непосредственно из построения μ_v и из регулярности v вытекают равенства $\mu_v(E) = \sup\{\mu_v(E'): E'\subseteq E, E'\in\mathcal{K}\}$. Таким образом, $\Sigma^{(n)}$, $\mathcal{K}$, μ_v удовлетворяют всем условиям известной теоремы о продолжении мер (см. [6], а также [7]), откуда и вытекает возможность счетно-аддитивного продолжения μ_v на $\sigma\Sigma^{(n)}$.

Алгебра $\sigma\Sigma^{(n)}$ допускает простое описание, именно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Алгебра $\sigma\Sigma^{(n)}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(Q^{(n)})$ метрического компакта $(Q^{(n)}, \mathcal{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства включения $\sigma\Sigma^{(n)} \subseteq B(Q^{(n)})$ воспользуемся следующим известным представлением Σ (см. например, [5]): $\Sigma = \bigcup_{\xi<\Omega} G_\xi$, где G_0 – семейство всех открытых подмножеств множества G, G_ξ – семейство всех подмножеств из G, являющихся объединениями или пересечениями счетных последовательностей множеств из $G_{\xi'}$ $(\xi'<\xi)$ в зависимости от того, четно ξ или нечетно (предельные числа рассматриваются как четные).

Так как для любого $g \in G_0$ множество $g^{(n)} = G(g_0, Q) \cap Q^{(n)}$ открыто в $(Q^{(n)}, R)$, то справедливо включение $G_0^{(n)} = \{g^{(n)} : g \in G_0\} \subseteq B(Q^{(n)})$. Пусть теперь $G_{\xi'}^{(n)} = \{g^{(n)} : g \in G_{\xi'}\} \subseteq B(Q^{(n)})$ для $\xi' < \xi$. Используя очевидное соотношение*)

$$e_m \xrightarrow[m\to\infty]{} e \Longleftrightarrow e_m^{(n)} \xrightarrow[m\to\infty]{} e^{(n)} \tag{2.4}$$

и предположение индукции, убеждаемся в том, что $G_\xi^{(n)} \subseteq B(Q^{(n)})$. Таким образом, для любого $e \in \Sigma$ имеет место включение $e^{(n)} \in B(G^{(n)})$, откуда, в силу определения $\sigma\Sigma^{(n)}$, и вытекает требуемое: $\sigma\Sigma^{(n)} \subseteq B(Q^{(n)})$.

Для доказательства обратного включения воспользуемся тем фактом, что пространство $(G^{(n)}, R)$, будучи метрическим компактом, обладает счетной открытой базой. Подобрав эту базу таким образом, чтобы каждый ее элемент содержался в $\sigma\Sigma^{(n)}$, мы и докажем тем самым, что $B(Q^{(n)})$ содержится в $\sigma\Sigma^{(n)}$.

Пусть Δ – некоторая счетная открытая база пространства (Q, ρ). Семейство $\Delta^{(n)}$, состоящее из всех множеств вида $G(\bigcup_{s=1}^{n} g_{0s}, g_1, \dots, g_e) \cap Q^{(n)}$ $(g_{01}, \dots, g_{0n}, g_1, \dots, g_e \in \Delta)$, содержит, очевидно, не более чем счетное число элементов, причем каждый из них является открытым множеством в $(Q^{(n)}, R)$. Поскольку открытая база $(Q^{(n)}, R)$ может быть задана семейством

$\mathcal{G}^{(n)} = \{G^{(n)}(g_0, g_1, \dots, g_m) : G(g_0, g_1, \dots, g_m) \in \mathcal{G}\}$ $(G^{(n)}(g_0, g_1, \dots, g_m) \triangleq G(g_0, g_1, \dots, g_m) \cap G^{(n)})$, то для того чтобы доказать, что $\Delta^{(n)}$ – открытая счетная база $(G^{(n)}, R)$, достаточно проверить, что

---

*) Имеется в виду сходимость в теоретико-множественном смысле.

каждое множество вида $G^{(n)}(g_0, g_1, \dots, g_m)$ вместе с любой из своих точек содержит некоторую окрестность вида $G^{(n)}_{\tau}(\bigcup_{s=1}^{n} g_{0s}, g_1, \dots, g_e)$ $(g_{01}, \dots, g_{0n}, g_1, \dots, g_e \in \Delta)$. Итак, пусть $\tau \in G^{(n)}(g_0, \dots, g_m)$. Т. к. $g_i = \bigcup_{j=1} g_i^j$ $(g_i^j \in \Delta,\ i=0, \dots, m,\ j=1, \dots)$, то существуют множества $g_o^{j(s)}, g_1^{j(1)}, \dots, g_m^{j(m)}$, такие, что $\tau \subseteq \bigcup_{s=1}^{|\tau|} g_o^{j(s)}$, $\tilde{\tau} \cap g_i^{j(i)} \neq \emptyset$ ($i = 1, \dots, m$). Таким образом, $\tau \in G^{(n)}(\bigcup_{s=1} g_o^{j(s)}, g_1^{j(1)}, \dots, g_m^{j(m)})$, что в сочетании с очевидным включением $G^{(n)}(\bigcup_{s=1} g_o^{j(s)}, g_1^{j(1)}, \dots, g_m^{j(m)}) \subseteq G^{(n)}(g_0, g_1, \dots, g_m)$, и дает требуемое. Поскольку $G^{(n)}(g_0, g_1, \dots, g_m) = \bigcap_{i=1}^{m} G^{(n)}(g_0, g_i)$ и $G^{(n)}(g_0, g_i) = \{g_0', g_i'\}^{(n)} \cup g_i'^{(n)}$, где $g_0' = g_0 \setminus g_i$, $g_i' = g_0 \cap g_i$, то $\Delta^{(n)} \subseteq \sigma \Sigma^{(n)}$. Последнее замечание и завершает доказательство предложения 2.2.

Используя предложение 2.2 и отмечавшуюся ранее счетную аддитивность μ_v на $\sigma \Sigma^{(n)}$ (мы отождествляем продолжение μ_v на $\sigma \Sigma^{(n)}$ с μ_v), имеем:

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть n - произвольное натуральное число. Для каждого элемента $v \in \tau V^n(Q)$ существует счетно-аддитивная борелевская мера $\mu_v \in V^1(Q^{(n)}, \sigma \Sigma^{(n)})$, удовлетворяющая тождеству*

$$\mu_v(e^{(n)}) = v(e) \quad (e \in \Sigma). \tag{2.5}$$

Мера μ_v ...инственным образом определяется из этого тождества.

Учитывая соотношение (2.4) и теорему 2.2., нетрудно убедиться в том, что регулярные функции множеств из $\tau V^n(Q)$ ($n = 1, \dots$) непрерывны относительно теоретико-множественной сходимости в Σ. Поскольку каждый элемент $v \in a V(Q) = a V(Q, \Sigma) \cap \tau V(Q)$ является пределом (по норме $\|\cdot\|_o$) последовательности элементов $v_n \in \tau V^n(Q)$ ($n = 1, \dots$), то справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если $v \in a V(Q)$, последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ из Σ сходится (в теоретико-множественном смысле) к e, то $\lim_{n \to \infty} v(e_n) = v(e)$.*

Рассмотрим алгебру $\hat{\Sigma}_{\hat{}}$, порожденную семейством всех подмножеств $\hat{Q}$ вида $\hat{e}=\{f\in\hat{Q}: f\leq e\}$ $(e\in\Sigma)$. Модифицируя соответствующим образом аргументы, использовавшиеся для доказательства теоремы 2.2., можно показать, что для каждого элемента $v\in r V(Q)$ существует счетно-аддитивная мера μ_v на $\sigma\hat{\Sigma}$, удовлетворяющая тождеству $\mu_v(\hat{e})=v(e)$ $(e\in\Sigma)$. Суммируя последнее с очевидным соотношением $\widehat{\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\hat{e}_n$ $(e_n\in\Sigma$ $(n=1,\ldots))$, получаем необходимое для дальнейшего

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $v\in r V(Q)$. Для любой монотонно убывающей последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ из Σ справедливо равенство

$$v(\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n)=\lim_{n\to\infty} v(e_n). \tag{2.6}$$

3. В исследовании структуры регулярных функций множеств важную роль играет аналог нормы Канторовича-Рубинштейна (см. [2, 3]) для пространства $r V(Q)$. Ниже приводится соответствующее определение и устанавливаются некоторые свойства получающегося нормированного пространства.

Пусть $\varphi:\Sigma\times\Sigma\longrightarrow R$, $\eta=\{e_1,\ldots,e_m\}\in E(Q)$ произвольны. Определим величины $\varphi^{\eta}_{\omega,\omega'}$ $(\omega,\omega'\subseteq N^{\eta})$ из (единственного) решения системы линейных уравнений

$$\varphi(\bigcup_{i\in\omega} e_i,\bigcup_{j\in\omega'} e_j)=\sum_{\substack{\omega_1\subseteq\omega,\\ \omega_1'\subseteq\omega'}}\varphi^{\eta}_{\omega_1,\omega_1'} \qquad (\omega,\omega'\subseteq N^{\eta}). \tag{3.1}$$

Через $r\Psi_+(Q)$ обозначим совокупность всех регулярных по каждому аргументу функций $\varphi:\Sigma\times\Sigma\longrightarrow R$, удовлетворяющих условию: $\varphi^{\eta}_{\omega,\omega'}\geq 0$ $(\eta\in E(Q),\ \omega,\omega'\subseteq N^{\eta})$. Положим $Q^{(N)}=\{\tau\in Q: |\tau|<\infty\}$. Пусть $v\in r V(Q)$, $\varphi\in r\Psi_+(Q)$, $\alpha: Q^{(N)}\longrightarrow R$, $\beta: Q^{(N)}\times Q^{(N)}\longrightarrow R$ произвольны. Для $\eta=\{e_1,\ldots,e_m\}\in E(Q)$, $\tau=\tau^{\eta}=\{t_1,\ldots,t_m\}$ $(t_i\in e_i,\ i\in N^{\eta})$ определим частные суммы $S^{\alpha}_v(\eta,\tau)\triangleq\sum_{\omega\subseteq N^{\eta}}\alpha(\tau_\omega)\cdot v^{\eta}_{\omega}$, $S^{\beta}_{\varphi}(\eta,\tau)\triangleq$ $\triangleq\sum_{\omega,\omega'\subseteq N^{\eta}}\beta(\tau_\omega,\tau_{\omega'})\varphi^{\eta}_{\omega,\omega'}$ $(\tau_\omega\triangleq\{t_i\in\tau: i\in\omega\},\ \omega\subseteq N^{\eta})$.

Пределы обобщенных последовательностей $\{S^{\alpha}_v(\eta,\tau^{\eta})\}_{\eta\in E(Q)}$,

$\{S^{\beta}_{\psi}(\eta,\tau^{\eta})\}_{\eta\in E(Q)}$, если они существуют и не зависят от выбора $\tau^{\eta}(\eta\in E(Q))$, будем обозначать через $v(\alpha)=\int\limits_Q \alpha(\tau)v(de)$, $\psi(\beta)=\int\limits_Q\int\limits_Q b(\tau,\tau')\psi(de,de')$, соответственно.

Так же, как и в [3], нам удобнее начать с топологизации подпространства $\tau V_o(Q)=\{v\in\tau V(Q): v(Q)=0\}$. Для элементов этого подпространства определим величину

$$\|v\|=\inf\{\psi(\mathcal{R}):\psi\in\Psi_v\}, \tag{3.2}$$

где $\Psi_v=\{\psi\in\tau\Psi_+(Q):\psi(Q,e)-\psi(e,Q)=v(e)\ (e\in\Sigma)\}$.

Используя равномерную непрерывность $\mathcal{R}$ в $(Q^{(N)},\mathcal{R})$ и принадлежность $\psi\in\tau\Psi_+(Q)$, нетрудно проверить, что величина $\psi(\mathcal{R})$ определена и конечна для всех $\psi\in\tau\Psi_+(Q)$. Из формулы (3.2) вытекает, что $\|\cdot\|:\tau V_o(Q)\longrightarrow R$ – сублинейный функционал. Покажем, что $\|\cdot\|$ – норма. С этой целью заметим, что справедлива оценка

$$|v(\alpha)|\leq\|\alpha\|_1\cdot\|v\| \quad (\alpha\in\mathcal{L}ip_1(Q^{(N)}),\ v\in\tau V_o(Q)), \tag{3.3}$$

где $\|\alpha\|_1=\sup\{(\alpha(\tau)-\alpha(\tau'))/\mathcal{R}(\tau,\tau'):\tau\neq\tau',\ \tau,\tau'\in Q^{(N)}\}$, $\mathcal{L}ip_1(Q^{(N)})=\{\alpha:\|\alpha\|_1<\infty\}$. Поэтому для установления импликации $v\neq 0\Rightarrow\|v\|\neq 0$ достаточно показать, что существует $\alpha\in\mathcal{L}ip_1(Q^{(N)})$, такая, что $v(\alpha)\neq 0$. Так как $v\neq 0$, то, в силу регулярности v, существует $f\in\hat{Q}$, для которого $v(f)\neq 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $v(f)=\alpha>0$. Обозначая через $f_{1/n}$ замкнутые $1/n$ -окрестности множества f в метрическом пространстве (Q,ρ), получаем убывающую последовательность множеств из Σ, сходящуюся к f. В силу следствия 2.2., существует n_o, такое, что $|v|(f_{1/n})-|v|(f)<\alpha/2$ при $n\geq n_o$. Рассмотрим функцию $\alpha':\hat{Q}\to R$, определенную в соответствии с формулой

$$\alpha(f')=\begin{cases}1-n_o\mathcal{R}(f',\hat{f}), & \mathcal{R}(f',\hat{f})\leq 1/n_o,\\ 0, & \mathcal{R}(f',\hat{f})>1/n_o.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\alpha'\in\mathcal{L}ip_1(Q)$. Кроме того, справедливо включение $\hat{f}\subseteq\operatorname{supp}\alpha'\subseteq\widehat{f_{1/n_o}}$. Сужение α функ и α' на $Q^{(N)}$ удовлетворяет всем нашим требованиям. Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. $(\tau V_0(Q), \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство.

Перейдем к установлению некоторых свойств пространства $(\tau V_0(Q), \|\cdot\|)$, полезных для дальнейшего. Нам потребуется одна техническая лемма о функциях множеств вида $u(e)=v_m(e\cap e_1,\dots,e\cap e_m)$ $(e\in\Sigma)$, где $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in E(e_0)$ $(e_0\in\Sigma)$. Рассмотрим $\eta'=\{e'_1,\dots,e'_n\}\in E(e'_0)$ и отвечающее η, η' разбиение $\eta^\circ\in E(e_0\cap e'_0)$, состоящее из множеств $e_{ij}=e_i\cap e'_j$ $(i\in N^\eta,\ j\in N^{\eta'})$. Если $S=\{i_1j_1,\dots,i_kj_k\}$, то под $v_S^{\eta^\circ}$ будем понимать величину $v_k(e_{i_1j_1},\dots,e_{i_kj_k})$. Наконец, $\omega'\subseteq N^{\eta'}$ через $S_{m,\omega'}$ обозначим совокупность всех подмножеств из $N^\eta\times\omega'$, проекции которых на первую и вторую координаты равны N^η, ω' соответственно.

ЛЕММА 3.1. В указанных выше обозначениях справедливо тождество

$$u_{\omega'}^{\eta'}=\sum_{S\subseteq S_{m,\omega'}} v_S^{\eta^\circ} \quad (\eta'\in E(e'_0),\ e'_0\in\Sigma). \qquad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.1 осуществляется индукцией по числу элементов в разбиении η' с использованием тождества (1.5) из п. 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть в условиях леммы 3.1 множество e'_0 совпадает с Q, а η' представляет из себя измельчение разбиения $\bar\eta=\{e_1,\dots,e_m, Q\setminus e_0\}$. Используя формулу (3.4), нетрудно проверить, что $u_{\omega'}^{\eta'}\neq 0$ только тогда, когда $\eta'_{\omega'}$ вписано в η (т.е. каждый элемент e'_j $(j\in\omega')$ содержится в одном из элементов e_i $(i=1,\dots,m)$, и каждый элемент e_i $(i=1,\dots,m)$ содержит некоторый элемент e'_j $(j\in\omega')$).

В дальнейшем важную роль играют функции множеств из $\tau V(Q)$, имеющие конечные носители. Как и в случае аддитивных функций множеств, под носителем функции v понимается всякое множество $R\in\Sigma$, удовлетворяющее условию: $v(e)=v(e\cap R)$ $(e\in\Sigma)$.

Обозначим через $\tau V^f(Q)$ $(\tau V_0^f(Q))$ совокупность всех элементов из $\tau V(Q)$ $(\tau V_0(Q))$, имеющих конечные носители. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Подпространство $\tau V_\circ^f(Q)$ всюду плотно в $(\tau V_\circ(Q), \|\cdot\|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v\in \tau V_\circ(Q)$, $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Sigma(Q)$. Выберем произвольные точки $t_i\in e_i$ $(i\in N^\eta)$ и рассмотрим функцию $v_1=\sum_{\omega\subseteq N^\eta} v_\omega^\eta\cdot \varepsilon_{\tau_\omega}$, где $\varepsilon_{\tau_\omega}\triangleq \prod_{i\in\omega}\varepsilon_{t_i}$ (ε_t $(t\in Q)$ – меры Дирака). Ясно, что $v_1\in \tau V_\circ^f(Q)$. Воспользовавшись тождеством (I.2), имеем: $v=\sum_{\omega\subseteq N^\eta} v^\omega$, где $v^\omega(e)=v_{|\omega|}(e\cap e_{i_1},\dots, e\cap e_{i_k})$ $(e\in\Sigma,\ \omega=\{i_1,\dots,i_k\}\in N^\eta)$. Положим $\delta=\max_{i=1,\dots,m} diam\, e_i$ и покажем, что $\|v^\omega-v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}\|\leqslant \delta\cdot|v|_\omega^\eta$. С этой целью заметим прежде всего, что $v^\omega-v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$ $(\omega=\{i_1,\dots,i_k\})$ представима в виде функции $u'(e)=u_{|\omega|}(e\cap e_{i_1},\dots,e\cap e_{i_k})$, где $u=v-v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$. Используя замечание 3.1, непосредственно из определения величины $\int_Q\int_Q \mathcal{R}(\tau,\tau')\,\varphi(de,de')$ получаем неравенство $\int_Q\int_Q \mathcal{R}(\tau,\tau')\,\psi'(de,de')\leqslant \delta/2\cdot|u|_\omega^\eta$, где $\psi'(e,e')=\frac{1}{u_+(Q)}\cdot v_+(e)\cdot v_-(e')$. Поскольку $\|v^\omega-v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}\|\leqslant$ $\leqslant\psi'(\mathcal{R})$ и $|u|_\omega^\eta\leqslant 2|v|_\omega^\eta$, то $\|v^\omega-v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}\|\leqslant\delta\cdot|v|_\omega^\eta$, что и требовалось. Воспользовавшись представлением $v-v_1=$ $=\sum_{\omega\subseteq N^\eta} v^\omega-v_\omega^\eta\cdot\varepsilon_{\tau_\omega}$ и используя полученные оценки, имеем: $\|v-v_1\|\leqslant\delta\cdot\|v\|_\circ$.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Так как (Q,ρ) – метрический компакт, то разбиение $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Sigma(Q)$ можно выбрать так, чтобы диаметры множеств $e_1,\dots,e_m$ не превосходили величины $\varepsilon/\|v\|_\circ$. В этом случае справедливо неравенство $\|v-v_1\|\leqslant\varepsilon$, что, ввиду произвольности v и ε, и завершает доказательство предложения 3.2.

Пусть $\varepsilon>0$, $\tau=\{t_1,\dots,t_m\}$ – $\varepsilon/4$ -сеть в метрическом пространстве (Q,ρ), M – натуральное число, такое, что $1/M<\varepsilon/2m\cdot diam\, Q$. Рассмотрим совокупность $\mathcal{D}_\varepsilon$ всех элементов из $\tau V_\circ^f(Q)$, имеющих вид: $1/M\cdot\sum_{\omega\subseteq N}\varkappa_\omega\cdot\varepsilon_{\tau_\omega,\tau}$, где $N=\{1,\dots,m\}$, $\varepsilon_{\tau_\omega,\tau}=\varepsilon_{\tau_\omega}-\varepsilon_\tau$, $\varkappa_\omega$ – произвольные целые числа из интервала $[-M,M]$. Используя аргументы, аналогичные тем, что применялись при доказательстве предложения 3.2, можно показать, что $\mathcal{D}_\varepsilon$ представляет конечную ε – сеть для множества $U_0=\{v\in \tau V_0(Q): \|v\|_0=1\}$ в метрике, порождаемой нормой $\|\cdot\|$. Таким образом, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Единичная сфера пространства $(\tau V_0(Q), \|\cdot\|_0)$ компактна в топологии пространства $(\tau V_0(Q), \|\cdot\|)$.

Распространим норму $\|\cdot\|$ на все пространство $\tau V(Q)$. С этой целью зафиксируем некоторую функцию $p\in \mathcal{L}ip_1(Q^{(N)})$, удовлетворяющую дополнительному условию $p(\tau)>\sup\{R(\tau,\tau'): \tau'\in Q^{(N)}\}$ $(\tau\in Q^{(N)})$, и определим функционал $\|\cdot\|_{(p)}$ в соответствии с формулой

$$\|v\|_{(p)}=\inf\{\|v_0\|+|v-v_0|(p): v_0\in \tau V_0(Q)\} \quad (v\in \tau V(Q)).$$

Нетрудно проверить, что $\|\cdot\|_{(p)}$ – продолжение нормы $\|\cdot\|$ на все пространство $\tau V(Q)$ с сохранением положительной однородности, субаддитивности и строгой положительности всюду, кроме $v=0$. Итак, $(\tau V(Q), \|\cdot\|_{(p)})$ – линейное нормированное пространство. Поскольку $\tau V_0(Q)$ является, как легко видеть, замкнутым гиперподпространством $(\tau V(Q), \|\cdot\|_{(p)})$, то, в силу предложений 3.2., 3.3, справедливы следующие утверждения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2 а) Подпространство $\tau V^f(Q)$ всюду плотно в $(\tau V(Q), \|\cdot\|_{(p)})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3 а) Единичная сфера пространства $(\tau V(Q), \|\cdot\|_0)$ компактна в топологии пространства $(\tau V(Q), \|\cdot\|_{(p)})$.

В заключение этого пункта приведем вытекающее из неравенства (3.3) и определения нормы $\|\cdot\|_{(p)}$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если $\alpha\in \mathcal{L}ip_1(Q^{(N)})$, то линейный функционал l_α, определенный в соответствии с формулой $l_\alpha(v)=\int_Q \alpha(\tau)\,v(de)$, непрерывен в топологии пространства $(\tau V(Q), \|\cdot\|_{(p)})$.

4. Ниже приводится доказательство теоремы об аналитичности регулярных функций множеств, основанное на использовании одной из форм теоремы Шоке о строении выпуклого компакта в локально-выпуклом пространстве (см. [8]).

Рассмотрим положительную часть единичной сферы U в $(\tau V(Q), \|\cdot\|_0)$: $U_+=\{v\in \tau V_+(Q): v(Q)=1\}$. Используя замечание 3.2 и регулярность функций $v\in U_+$, можно показать, что U_+ замкнуто относительно нормы $\|\cdot\|_{(\rho)}$, откуда, в силу предложения ‾ ‾ вытекает

ЛЕММА 4.I. U_+ - выпуклый компакт в $(\imath V(Q), \|\cdot\|_{(\rho)})$.

Приведем описание множества $ex\, U_+$ всех крайних точек выпуклого компакта U_+.

ЛЕММА 4.2. $ex\, U_+ = \{\varepsilon_\tau : \tau \in Q^{(N)}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетривиальным является включение $ex\, U_+ \subseteq$ $\subseteq \{\varepsilon_\tau : \tau \in Q^{(N)}\}$. Покажем сначала, что каждый элемент $v \in ex\, U_+$ удовлетворяет "экспоненциальному тождеству":

$$v(e_1 \cap e_2) = v(e_1)\cdot v(e_2) \qquad (e_1, e_2 \in \Sigma). \tag{4.I}$$

С этой целью зафиксируем произвольный элемент $e_1 \in \Sigma$ и положим $v_1(e) = v(e \cap e_1)$, $v_2(e) = v(e \cap (Q \setminus e_1))$, $v_{12}(e) = v_2(e \cap e_2, e \cap (Q \setminus e_1))$. Из леммы 3.I. вытекает, что v_1, v_2, $v_{12} \in \imath V_+^2(Q)$. Не уменьшая общности, можно считать, что величины $\lambda_1 = v_1(Q)$, $\lambda_2 = v_2(Q)$, $\lambda_{12} = v_{12}(Q)$ отличны от нуля, и тем самым v_1', v_2', $v_{12}' \in U_+$, где $v_1' = 1/\lambda_1\, v_1$, $v_2' = 1/\lambda_2\, v_2$, $v_{12}' = 1/\lambda_{12}\, v_{12}$. Так как v на основании I.5 представима в виде выпуклой комбинации элементов v_1', v_2', v_{12}', то, ввиду экстремальности v, существует $\gamma_1 > 0$, такое, что $v_1 = \gamma_1 v$. Поскольку $v_1(Q) = \gamma_1 v(Q) =$ $= v(e_1)$, то $\gamma_1 = v(e_1)$, что в соединении с цепочкой равенств $v_1(e_2) = v(e_1 \cap e_2) = \gamma_1 \cdot v(e_2)$ и дает искомое соотношение $v(e_1 \cap e_2) =$ $= v(e_1)\cdot v(e_2)$.

Из (4.I) вытекает, что v принимает лишь два значения: 0 и 1. Рассмотрим семейство $\mathcal{L} = \{f \in Q : v(f) = 1\}$. Ясно, что $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Снова применяя (4.I), получаем, что $\mathcal{L}$ замкнуто относительно конечных пересечений. Ввиду того, что элементы из $\mathcal{L}$ - компактные подмножества Q, имеем теперь: $\tau = \bigcap_{\mathcal{L}} f \neq \emptyset$. Так как (Q, ρ) -пространство со счетной базой, то можно выбрать счетную последовательность множеств $f_n \in \mathcal{L}$ ($n = 1, \dots$), дающую то же пересечение $\tau = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$. Используя следствие 2.2, имеем: $v(\tau) = 1$, откуда вытекает, что τ - минимальный (по включению) элемент из $\mathcal{L}$. Покажем, что $\tau \in Q^{(N)}$. Допуская противное, рассмотрим разбиение $\{\{t_0\}, \tau \setminus \{t_0\}\} \in \Sigma(\tau)$, где t_0 - точка накопления множества τ. Последняя существует ввиду бесконечности и компактности τ. Но тогда $v_2(\{t_0\}, \tau \setminus \{t_0\}) \neq$ $\neq \sup\{v_2(\{t_0\}, f) : f \in \hat{Q},\ f \subseteq \tau \setminus \{t_0\}\}$, что противоречит условию: $v \in \tau V(Q)$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что $\mathcal{E}_\tau(f) = v(f)$ для всех $f \in \hat{Q}$, откуда, ввиду регулярности $\mathcal{E}_\tau$ и v, и вытекает равенство $v = \mathcal{E}_\tau$, ч. т. д.

. Переходя к формулировке интересующей нас теоремы Шоке, приведем необходимые определения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.I [8]. Пусть U - непустое компактное подмножество локально-выпуклого пространства E, $B(U)$ - борелевская σ-алгебра компакта U, μ - вероятностная мера на $B(U)$. Говорят, что точка $x \in U$ представлена посредством μ, если $l(x) = \int_Q l\,d\mu$ для любого непрерывного линейного функционала l на E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 [8]. Пусть U - непустое выпуклое подмножество локально-выпуклого пространства E, содержащееся в замкнутой гиперплоскости, не проходящей через 0, $\tilde{U}$ - конус с вершиной в 0, натянутой на множество U, $\tilde{E} = \tilde{U} - \tilde{U}$. Говорят, что U - симплекс, если пространство $\tilde{E}$ является K-линеалом относительно упорядоченности, индуцируемой конусом $\tilde{U}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.I [8]. П у с т ь U - к о м п а к т н о е в ы п у к л о е м е т р и з у е м о е п о д м н о ж е с т в о л о к а л ь н о - в ы п у к л о г о п р о с т р а н с т в а. Т о г д а д л я т о г о, ч т о б ы д л я л ю б о г о $x \in U$ с у щ е с т в о в а л а е д и н с т в е н н а я м е р а μ_x, п р е д с т а в л я ю щ а я x и с о с р е д о т о ч е н н а я н а $ex\,U$ (множество крайних точек из U), н е о б х о д и м о и д о с т а т о ч н о, ч т о б ы U я в л я л о с ь с и м п л е к с о м.

Напомним еще, что в случае метризуемости U, $ex\,U$ - борелевское подмножество U (см. [8]) и выражение " μ сосредоточена на $ex\,U$ " означает, что $\mu(U \setminus ex\,U) = 0$.

Из предложения 3.I, леммы 4.I и теоремы I.I вытекает, что пространство $(\tau V(Q), \|\cdot\|_{(p)})$ и множество $U_+ \subseteq \tau V(Q)$ удовлетворяют всем условиям предложения 4.I. Обозначая $ex\,U_+$

через $\ldots$, $\mathcal{B}(U_+)\cap S=\{e\cap S: e\in \mathcal{B}(U_+)\}$ – через $\mathcal{B}_S$, получаем в силу заключения предложения 4.1, взаимно-однозначное аффинное соответствие между U_+ и множеством P всех вероятностных мер на $(S, \mathcal{B}_S)$, при котором каждому элементу $v\in U_+$ ставится в соответствие представляющая его мера $\mu_v\in P$. Указанное соответствие можно продолжить на все пространство $\tau V(Q)$, полагая $T(0)=0$ и $T(v)=\|v_+\|_0\,\mu_{v_+/\|v_+\|_0} - \|v_-\|_0\,\mu_{v_-/\|v_-\|_0}$ для всех $v\in\tau V(Q)$, отличных от 0. Непосредственно из определения преобразования T вытекает его линейность и невырожденность. Если через $cV^1(S,\mathcal{B}_S)$ обозначить совокупность всех счетно-аддитивных мер ограниченной вариации на $(S,\mathcal{B}_S)$, частично упорядоченную с помощью конуса $cV^1_+(S,\mathcal{B}_S)$ всех неотрицательных счетно-аддитивных мер на $(S,\mathcal{B}_S)$, то, очевидно, $T(\tau V_+(Q))=cV^1_+(S,\mathcal{B}_S)$ и, тем самым, $T(\tau V(Q))=cV^1(S,\mathcal{B}_S)$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. *Пространство $\tau V(Q)$ алгебраически и структурно изоморфно пространству $cV^1(S,\mathcal{B}_S)$.*

В дальнейшем нам потребуется одна вспомогательная лемма, характеризующая функции $\delta_f: U_+\longrightarrow R$ $(f\in\hat{Q})$, где δ_f определяется формулой: $\delta_f(v)\triangleq v(f)$ $(v\in U_+)$.

ЛЕММА 4.3. *Для любого $f\in\hat{Q}$ функция δ_f является аффинной функцией первого класса Бэра на (U_+,ρ_1) $(\rho_1(u,v)\triangleq\|u-v\|$ $(u,v\in U_+))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f\in\hat{Q}$ произвольное. Рассмотрим последовательность $1/n$-окрестностей $(\hat{f})_{1/n}$ множества $\hat{f}$ в пространстве $(\hat{Q},\mathcal{R})$ и отвечающую ей последовательность функций $\alpha^f_n\in \mathcal{L}ip_1(Q^{(N)})$:

$$\alpha^f_n(\tau)=\begin{cases}1-n\,\mathcal{R}(\tau,\hat{f}), & \tau\in(\hat{f})_{1/n},\\ 0, & \tau\notin(\hat{f})_{1/n},\end{cases}\quad(\tau\in Q^{(N)}).$$

Как вытекает из замечания 3.1, функционалы l^f_n, определенные по формуле $l^f_n(v)=\int_Q \alpha^f_n(\tau)\,v(d e)$ $(v\in\tau V(Q))$, $n=1,\ldots$, непрерывны в топологии пространства $(\tau V(Q), \|\cdot\|_{(\rho)})$.

Покажем, что δ_f является поточечным пределом последовательности $\{l_n^f\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве U_+. Пусть v – произвольная функция множеств из U_+. Так как v непрерывна относительно монотонно убывающих последовательностей элементов из Σ, то имеет место соотношение

$$v(f)=\lim_{n\to\infty} v(f_{1/n}) \qquad (v\in U_+), \tag{4.2}$$

где $f_{1/n}$ – замкнутая $1/n$ -окрестность f в пространстве (Q,ρ). На основании очевидных включений $(\hat f)_{1/n} \subseteq (\widehat{f_{1/n}})$ ($n=1,\dots$) имеем оценки: $|l_n^f(v)-\delta_f(v)|\leq|v(f_{1/n})-v(f)|$ ($n=1,\dots$). Учитывая теперь соотношение (4.2), получаем: $\delta_f(v)=\lim_{n\to\infty} l_n^f(v)$, откуда, ввиду произвольности $v\in U_+$, и вытекает утверждение леммы.

Отмеченные в лемме 4.3 свойства функций δ_f ($f\in\hat Q$) позволяют применять к ним следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2 ([8]). Если U – выпуклый компакт в локально-выпуклом пространстве E и μ_x – вероятностная мера на $B(U)$, представляющая точку $x\in U$, то $\int_U f\,d\mu_x=f(x)$ для любой аффинной функции f первого класса Бэра на U.

Установим теперь теорему о совпадении $rV(Q)$ и $aV(Q)$.

ТЕОРЕМА 4.2. Каждый элемент $v\in rV(Q)$ является аналитической функцией множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор T, реализующий, в силу теоремы 4.1, алгебраический и структурный изоморфизм пространств $rV(Q)$ и $cV^1(S,B_s)$. Пусть v – произвольная регулярная функция множеств. Не уменьшая общности, можно считать, что $v\in rV_+(Q)$. Положим $\mu=T(v)$, $\mu_n(E)=\mu(E\cap C_n)$ ($E\in B_s$), $n=1,\dots$, где $C_n=\{\varepsilon_\tau : |\tau|=n\}$, $n=1,\dots$. Нетрудно проверить, что $C_n\in B_s$ ($n=1,\dots$) и тем самым $\mu_n\in cV^1(S,B_s)$ ($n=1,\dots$). Поскольку $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, то из счетной аддитивности μ и из определения μ_n ($n=1,\dots$)

вытекает соотношение: $\mu=(o)-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\mu_n$. Так как T - структурный и алгебраический изоморфизм KB-пространств $\tau V(Q)$ и $cV^1(S,B_S)$, то, полагая $v_n=T^{-1}(\mu_n)$ ($n=1,\ldots$), имеем:

$$v=(o)-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}v_n. \qquad (4.3)$$

Учитывая соотношение (4.3) и тот факт, что $v_n\in\tau V_+(Q)$ ($n=1,\ldots$), для завершения доказательства теоремы 4.2 остается показать, что $v_n\in\tau V^n(Q)$ при всех $n>1$. Итак, пусть n фиксировано. Возьмем произвольное разбиение $\eta\in E(f)$, $\eta=\{f_1,\ldots,f_{n+1}\}$ ($f_1,\ldots,f_{n+1}\in\hat{Q}$) и покажем, что $(v_n)_{n+1}(f_1,\ldots,f_{n+1})=0$. С этой целью рассмотрим функции δ_{f_ω}, где $f_\omega=\bigcup_{i\in\omega}f_i$ ($\omega\subseteq N=\{1,\ldots,n+1\}$). В силу леммы 4.3 и предложения 4.2 справедливы формулы: $v_n(f_\omega)=\int_{C_n}\delta_{f_\omega}\,d\mu_n$ ($\omega\subseteq N$). Множества $\check{f}_\omega=\{\varepsilon_\tau\in S:\tau\subseteq f_\omega\}$ ($\omega\subseteq N$) содержатся в B_S ввиду того, что $\check{f}_\omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\check{f}_\omega\cap S_n$ ($S_n\triangleq\{\varepsilon_\tau:\tau\in Q^{(n)}\}$, $n=1,\ldots$) и для каждого $n\geqslant1$ множество $\check{f}_\omega\cap S_n$ является образом компакта $f_\omega^{(n)}$ при изометрическом вложении $\lambda:\tau\longmapsto\varepsilon_\tau$ ($\tau\in Q^{(n)}$) пространства $(Q^{(n)},\mathcal{R})$ в пространство (U_+,ρ_1). Поскольку $\check{f}_\omega\cap C_n=\bigcup_{\omega'\subseteq\omega}E_{\omega'}$, где $E_{\omega'}=\{\varepsilon_\tau:|\tau|=n$, $\tau\subseteq\bigcup_{i\in\omega}f_i$, $\tau\cap f_i\neq\emptyset\ (i\in\omega)\}$ ($\omega'\subseteq\omega$) - попарно-непересекающиеся элементы из B_S, то величину $\delta_{f_\omega}(v_n)$ можно переписать в виде:

$$v_n(f_\omega)=\sum_{\omega'\subseteq\omega}\mu_n(E_{\omega'}). \qquad (4.4)$$

Используя формулу (I.4), соотношение (4.4) и очевидное равенство $v_n(f_N)=0$, убеждаемся в том, что $(v_n)_{n+1}(f_1,\ldots,f_{n+1})=0$. Последнее, в силу произвольности разбиения $\eta=\{f_1,\ldots,f_{n+1}\}$ и регулярности v_n, и завершает доказательство теоремы 4.4.

Из теоремы 4.2 и следствия 2.I вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Регулярные функции множеств непрерывны относительно теоретико-множественной сходимости в Σ

Литература

1. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций.- В кн.: "Оптимизация", Вып.9(26), Новосибирск, 1973, с.157-164.
2. КАНТОРОВИЧ В.Л., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. - "Докл. АН СССР", 1957, т. 115, с. 1058-1061.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - "Вестник ЛГУ", серия матем., мех., и астр., 1958, вып. 7, № 2, с. 52-59.
4. ВАСИЛЬЕВ В.А. Общая характеристика полиномиальных функций множеств. - В кн.: "Оптимизация", Вып.14(31), Новосибирск, 1974, с. 103-123.
5. КУРАТОВСКИЙ С. Топология. Т. I, "Мир", М., 1966.
6. АЛЕКСАНДРОВ А.Д. Аддитивные функции множеств в абстрактных пространствах. II.- "Матем.сб.," 9(1941), с. 536-628.
7. НЕВЁ Ж. Математические основы теории вероятностей, "Мир", М., 1969.
8. ФЕЛПС Р. Лекции о теоремах Шоке. "Мир", М., 1968.
9. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. ГИФМЛ, М., 1961.

Поступила в ред.-изд. отд.
2. II. 1975 г.