УДК 51.330.115

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОИЗВОДСТВА

А.Н.Козырев

В настоящей работе предлагается и обосновывается алгоритм распределения ресурсов в системе линейных моделей производства. Аналогичные модели рассматривались многими авторами (см., например, [1]-[3]), поэтому их подробная экономическая интерпретация представляется излишней. В работе предполагается, что моделируемая экономика не является конкурентной, при этом взаимодействие моделей в системе осуществляется через некоторый "управляющий орган". Кроме того, предполагается, что распределяемые ресурсы не воспроизводятся внутри системы.

§ 1. Описание системы моделей

Рассматриваемая система состоит из моделей одного типа, которые различаются номерами $k \in \Omega = \{1, 2, \ldots, l\}$ и численными значениями элементов, входящих в их описания. Модель с номером $k \in \Omega$ задается с помощью следующей информации:*) A_k - матрица выпусков; R_k - матрица затрат; Φ_k - матрица коэф-

*) Соотношения между размерностями описываемых величин легко видны из дальнейшего.

фициентов использования производственных мощностей; $\varphi_к$ - вектор ограничений на интенсивность использования производственных мощностей; $d_к$ - ассортиментный набор выпуска $к$ - й модели. По своему экономическому смыслу все описанные выше величины являются неотрицательными. Относительно системы в целом предполагается, что она располагает общими ресурсами, объемы которых заданы неотрицательным вектором $b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Допустимым распределением ресурсов в системе моделей называется набор неотрицательных векторов $S=(C_1, C_2, \dots, C_\ell)$, для которого выполняется равенство

$$\sum_{к=1}^{\ell} C_к = b \ . \qquad (1)$$

Если $к$ - я модель располагает ресурсами $C_к=(C_{к1}, \dots, C_{кn})$, то оптимальный план для неё определяется как решение следующей задачи линейного программирования. Найти неотрицательный вектор $X_к$ и число $Z_к$, для которых выполняются условия

$$\begin{aligned} &X_к R_к \leqslant C_к, \\ &X_к A_к - Z_к d_к \geqslant 0, \\ &X_к \Phi_к \leqslant \varphi_к, \\ &Z_к \rightarrow max. \end{aligned} \qquad (2)$$

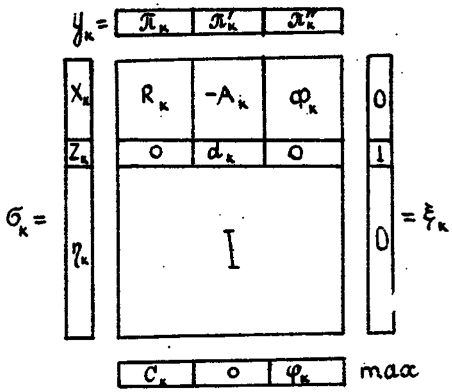
Таким образом, каждому допустимому распределению ресурсов S соответствует однозначно определяемый вектор

$$Z(S)=(Z_1(C_1), Z_2(C_2), \dots, Z_\ell(C_\ell)),$$

компоненты которого определяются из решения задач вида (2). Построенное отображение $S \rightarrow Z(S)$ естественным образом индуцирует предпорядок на множестве всех допустимых распределений ресурсов. Распределение S' "не хуже", чем распределение S , если вектор $Z(S') - Z(S)$ неотрицателен. Формально это отношение можно записать в виде $S' \geqslant S$. Легко видеть, что при любых $b \in R^n_+$ и $R_к \neq 0$, $к \in \Omega$, существуют распределения, максимальные в заданном предпорядке (оптимальные по Парето).

Для однозначности понимания предлагаемого алгоритма ниже приводится каноническая форма задачи (2) как задачи линейного программирования в виде таблицы с пояснениями. Задача в канонической форме именуется в дальнейшем задачей (2'), а двойственная к ней - (2'').

Схема I.



Символом I здесь обозначена единичная матрица. Верхней строкой схемы I является вектор объективно обусловленных оценок с общим числом компонент N_k. Его первые n компонент (вектор π_k) представляют собой оценки ресурсов. Левый столбец схемы обозначает вектор интенсивностей использования технологических способов (строк матрицы),ж) в том числе вспомогательных способов (соответствующих компонентам вектора η_k). Нижняя строка схемы представляет собой вектор ограничений (в виде равенств), а правый столбец - линейную форму ξ_k с единственным ненулевым элементом.

В дальнейшем предполагается, что для каждого $k \in \Omega$ задача 2^I не является вырожденной в том смысле, что любые N_k строк её матрицы линейно независимы. Кроме того, предполагается, что в системе нет избытка ресурсов. Это значит, что при любом распределении ресурсов вектор $\sum_{k=1} \pi_k$ не равен нулю.

Вектор $\bar{\pi} \in R^n_+$ называется вектором устойчивых средних оценок, если для некоторого набора $\{\bar{y}_k\}_{k=1}^{b}$ решений задач

ж) Строки матрицы, изображенной в схеме I , будем обозначать через a^j_k , где j - номер строки.

вида $2''$ ж) выполняются следующие два условия: 1) $\bar{\pi} = \sum_{k=1}^{l} \bar{\pi}_k / l$; 2) для каждого $k \in \Omega$ вектор $\bar{\pi}_k$ является вектором оценок ресурсов в k - й модели наименее удаленным жж) от луча

$$\Lambda(\bar{\pi}) = \{\lambda \bar{\pi} \mid \lambda \geq 0\} .$$

Существование такого вектора следует непосредственно из теоремы Какутани о неподвижной точке.

Набор $\{\bar{y}_k\}_{k=1}^{l}$ решений задач вида $2''$, удовлетворяющий условиям 1) и 2), называется набором устойчивых оценок. Применение такого термина оправдано некоторыми специфическими свойствами набора оценок $\{\bar{y}_k\}_{k=1}^{l}$, которые выясняются в третьем параграфе.

§ 2. Алгоритм

Предлагаемый ниже алгоритм позволяет для произвольного начального распределения ресурсов S_0 построить цепочку допустимых распределений, каждое последующее из которых не хуже предыдущего. Поскольку для каждого алгоритмического шага γ вектор $Z(S(\gamma))$ определяется из решения задач вида $(2')$, предполагаются известными векторы интенсивностей использования технологических способов $\sigma_k(\gamma)$ решения задач вида $(2'')$: $y_k(\gamma) = (\pi_k(\gamma), \pi'_k(\gamma), \pi''_k(\gamma))$, допустимые базисы множества $J_k(\gamma)$ и соответствующие им матричные мультипликаторы $B_k(\gamma)$ жжж). Вся эта информация может быть получена, например, при решении задач вида $(2')$ модифицированным симплекс-методом. Последнее, однако, не означает, что на каждом шаге алгоритма решается l задач вида $(2')$. Это делается лишь на первом шаге. В дальнейшем $\sigma_k(\gamma+1)$, $y_k(\gamma+1)$, $J_k(\gamma+1)$ и $B_k(\gamma+1)$ получается из

ж) Решения задач вида $2''$ могут определяться неоднозначно. Множество таких решений в модели k при ограничениях по ресурсам C_k будем обозначать символом $Y_k(C_k)$.

жж) Здесь, как и везде, расстояние определяется в евклидовой метрике.

жжж) Под $B_k(\gamma)$ здесь понимается матрица, обратная к матрице $A_k(J_k(\gamma))$, набранной из строк a_k^j , $j \in J_k(\gamma)$.

$\sigma_k(\gamma)$, $y_k(\gamma)$, $J_k(\gamma)$, $B_k(\gamma)$ с помощью сравнительно несложных преобразований.*)

Предположим, что сделан шаг алгоритма γ, тогда очередной шаг $\gamma+1$ осуществляется следующим образом.

1. Определяется набор устойчивых оценок $\{\bar{y}_k(\gamma)\}_{k=1}^{l}$.

2. Для каждого $k\in\Omega$ подправляется базисное множество $J_k(\gamma)$. Если найдутся номера $j_0\in J_k(\gamma)$ и $j_1\bar{\in} J_k(\gamma)$ такие, что $\bar{y}_k(\gamma)a^{j_0}>\xi_k^{j_0}$ (это возможно, поскольку может быть $\sigma^{j_0}=0$), $\bar{y}_k(\gamma)a^{j_1}=\xi_k^{j_1}$, то из базисного множества следует удалить номер j_0 и ввести в него j_1. После проведения всех возможных замен такого вида получится множество $J_k(\gamma+1)$.

3. Для каждого $k\in\Omega$ определяется матричный мультипликатор

$$B_k(\gamma+1)=A_k^{-1}(J_k(\gamma+1)).$$

4. Определяется вектор устойчивых средних оценок

$$\bar{\bar{\pi}}_k(\gamma)=\sum_{k=1}^{l}\bar{\pi}_k(\gamma)/l .$$

5. Определяются векторы направлений обмена для всех подсистем**)

$$e_k(\gamma)=\bar{\pi}_k(\gamma)-\bar{\pi}_k(\gamma)\bar{\bar{\pi}}(\gamma)\cdot\bar{\bar{\pi}}(\gamma)/\|\bar{\bar{\pi}}(\gamma)\|^2 ,$$

где $\|\ \|$ – евклидова норма.

6. Определяется набор чисел $\lambda_k(\gamma)$ таких, что

$$(C_k(\gamma)+\lambda_k(\gamma)\cdot e_k(\gamma),0,\varphi_k)\,B_k(\gamma+1)\geqslant 0 .$$

7. Определяется новое распределение ресурсов $S(\gamma+1)$ по формуле

$$C_k(\gamma+1)=C_k(\gamma)+(\min_k\lambda_k(\gamma))e_k(\gamma)=C_k(\gamma)+\lambda(\gamma)\cdot e_k(\gamma).$$

8. Определяются векторы $\sigma_k(\gamma+1)$, ненулевые компоненты которых (компоненты с номерами из $J_k(\gamma+1)$) вычисляются по формуле

$$\bar{\sigma}_k(\gamma+1)=(C_k(\gamma+1),0,\varphi_k)\,B_k(\gamma+1). \tag{3}$$

---

*) Исключение составляет отыскание подходящих векторов $y_k(\gamma+1)$, если множества $Y_k(C_k(\gamma+1))$ имеют большую размерность.

**) Через $\bar{\pi}_k(\gamma)\bar{\bar{\pi}}(\gamma)$ обозначено скалярное произведение векторов $\bar{\pi}_k(\gamma)$ и $\bar{\bar{\pi}}(\gamma)$, а через $\bar{\pi}_k(\gamma)\bar{\bar{\pi}}(\gamma)\cdot\bar{\bar{\pi}}(\gamma)$ – произведение вектора $\bar{\bar{\pi}}(\gamma)$ на число $\bar{\pi}_k(\gamma)\bar{\bar{\pi}}(\gamma)$.

Покажем, что распределение $S(\gamma+1)$ является допустимым. Действительно, для этого достаточно показать, что векторы $C_\kappa(\gamma+1)$ неотрицательны и выполняется равенство (I). Неотрицательность векторов $C_\kappa(\gamma+1)$ следует из неотрицательности матриц A_κ и векторов $\sigma_\kappa(\gamma+1)$, поскольку $C_\kappa(\gamma+1) \geq X_\kappa(\gamma+1)A_\kappa$. Выполнение равенства (I) следует из допустимости распределения $S(\gamma)$ и цепочки равенств:

$$\sum_{\kappa=1}^{l} e_\kappa(\gamma) = \sum_{\kappa=1}^{l} \bar{\pi}_\kappa(\gamma) - \sum_{\kappa=1}^{l} \bar{\pi}_\kappa(\gamma)\bar{\pi}(\gamma)\cdot\bar{\pi}(\gamma)/\|\bar{\pi}(\gamma)\|^2 = \sum_{\kappa=1}^{l} \bar{\pi}_\kappa(\gamma) -$$

$$-\left(\sum_{\kappa=1}^{l} \bar{\pi}_\kappa(\gamma)\right)\bar{\pi}(\gamma)\cdot\bar{\pi}(\gamma)/\|\bar{\pi}(\gamma)\|^2 = l\bar{\pi}(\gamma) - l\bar{\pi}(\gamma)\bar{\pi}(\gamma)\cdot\bar{\pi}(\gamma)/\|\bar{\pi}(\gamma)\|^2 = 0 .$$

Заметим ещё, что после определения $\sigma_\kappa(\gamma+1)$ с помощью равенства (3),[ж] для векторов $\sigma_\kappa(\gamma+1)$ и $\bar{y}_\kappa(\gamma)$ выполняются все условия признака оптимальности решения задачи линейного программирования в развёрнутой форме. Кроме того, имеем

$$\bar{\pi}_\kappa(\gamma)e_\kappa(\gamma) = (e_\kappa(\gamma) + \bar{\pi}_\kappa(\gamma)\bar{\pi}(\gamma)\cdot\bar{\pi}(\gamma)/\|\bar{\pi}(\gamma)\|^2)\, e_\kappa(\gamma) = \|e_\kappa(\gamma)\|^2 .$$

Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$Z_\kappa(\gamma+1) = C_\kappa(\gamma+1)\bar{\pi}_\kappa(\gamma) + \varphi_\kappa\bar{\pi}''_\kappa(\gamma) = (C_\kappa(\gamma) + \lambda(\gamma)e_\kappa(\gamma))\bar{\pi}_\kappa(\gamma) + \varphi_\kappa\bar{\pi}''_\kappa(\gamma) =$$

$$= C_\kappa(\gamma)\bar{\pi}_\kappa(\gamma) + \varphi_\kappa\bar{\pi}''_\kappa(\gamma) + \lambda(\gamma)e_\kappa(\gamma)\bar{\pi}_\kappa(\gamma) = Z_\kappa(\gamma) + \lambda_\kappa(\gamma)\|e_\kappa(\gamma)\|^2 .$$

Это означает, что распределение $S(\gamma+1)$ заведомо не хуже $S(\gamma)$, а общий прирост функционалов на шаге $\gamma+1$ есть

$$\sum_{\kappa=1}^{l} \lambda(\gamma)\|e_\kappa(\gamma)\|^2 .$$

Поскольку общий прирост функционалов на любое число шагов ограничен, имеет место сходимость ряда

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda(\gamma) \sum_{\kappa=1}^{l} \|e_\kappa(\gamma)\|^2 . \qquad (4)$$

Сходимость ряда (4) означает, что либо $\sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda(\gamma) < +\infty$, либо $\sum_{\kappa=1}^{l} \|e_\kappa(\gamma)\|^2 \xrightarrow[\gamma\to\infty]{} 0$. Обе эти возможности исследуются в третьем параграфе.

ж) Из (7) определяются компоненты вектора $\sigma_\kappa(\gamma+1)$, номера которых входят в $J_\kappa(\gamma+1)$, остальные $\sigma_{\kappa i}(\gamma+1)$ - нули.

§ 3. Вопрос о сходимости алгоритма

Для оценки поведения системы моделей при $\gamma \to \infty$ используется аппарат теории игр. Система моделей представляется в виде игры рынка с l участниками. Участник игры с номером k описывается с помощью функции полезности $Z_k(C_k)$ и начального набора товаров (ресурсов) C_k°. Заметим, что все функции Z_k вогнуты, а для начального распределения ресурсов выполняется равенство (I). Вектор $p \in R^n$, обладающий свойствами $p_j \geq 0$ для $j=1,2,\dots,n$ и $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, называется вектором цен. Множество всех векторов цен обозначается P.

Точкой равновесия рынка называется пара $(\bar p, \bar S)$, где $\bar p \in P$, а $\bar S$ - некоторое допустимое распределение, удовлетворяющее двум условиям:

1) $\bar p \bar C_k \leq \bar p C_k^\circ$ для всех $k \in \Omega$;

2) $Z_k(\bar C_k) = \max\limits_{\bar p C_k \leq \bar p C_k^\circ} Z_k(C_k)$ для всех $k \in \Omega$.

Из вогнутости функций $Z_k(C_k)$, $k \in \Omega$, следует существование точки равновесия (см. [6]), кроме того, если $(\bar p, \bar S)$ - равновесие, то $\bar S$ оптимально по Парето.

ТЕОРЕМА I. Если для некоторого распределения ресурсов $\bar S$ существует набор решений задач вида $(2'')$ таких, что $\bar\pi_k = \mu_k \bar\pi_1$, $k \in \Omega$, $\mu_k > 0$, то распределение $\bar S$ оптимально по Парето.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно показать, что пара $(\bar p, \bar S)$, где $\bar p = \bar\pi_1 / \sum_{i=1}^{n} \bar\pi$, является состоянием равновесия при начальном распределении ресурсов $\bar S$. Поскольку вектор $\bar y_k = (\bar\pi_k, \bar\pi'_k, \bar\pi''_k)$ всегда является допустимым решением задачи $(2'')$, имеет место неравенство

$$\bar\pi_k C_k + \bar\pi'_k \varphi_k \geq Z_k(C_k).$$

Если при этом $\bar\pi_k \bar C_k \geq \bar\pi_k C_k$, то заведомо

$$Z_k(\bar C_k) = \bar\pi_k \bar C_k + \bar\pi''_k \varphi_k \geq Z_k(C_k), \tag{5}$$

а поскольку строгое равенство в (5) достигается при $C_к = \bar{C}_к$, получается требуемое соотношение

$$Z_к(\bar{C}_к) = \max_{\bar{\pi}_к C_к \le \bar{\pi}_к \bar{C}_к} Z_к(C_к) = \max_{\bar{p} C_к \le \bar{p} \bar{C}_к} Z_к(C_к),$$

и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Поскольку отображения $\psi_к : C_к \to Y_к(C_к)$ для всех $к \in \Omega$ замкнуты, при $\sum_{к=1} \|e_к(\gamma)\| \xrightarrow[\gamma \to \infty]{} 0$ из теоремы I следует, что каждая точка сгущения последовательности $\{S(\gamma)\}_{\gamma=1}^{\infty}$ оптимальна по Парето.

ТЕОРЕМА 2. Если распределение ресурсов $S(\gamma)$ не оптимально по Парето, то $\lambda(\gamma) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для всех $к \in \Omega$ выполняется равенство $\|e_к(\gamma)\| = 0$, то $S(\gamma)$ оптимально по Парето. Поэтому предполагается существование таких $к \in \Omega$, что $\|e_к(\gamma)\| > 0$. Из замкнутости отображений $\psi_к$ следует, что при достаточно малых λ для любого $к \in \Omega$ имеет место включение

$$Y_к(C_к(\gamma)) \supset Y_к(C_к(\gamma) + \lambda e_к(\gamma)).$$

В силу выбора векторов $\bar{y}_к(\gamma)$ выполняется неравенство

$$\bar{\pi}_к(\gamma) e_к(\gamma) \le \pi_к(\gamma) e_к(\gamma).$$

Поэтому для любого $y_к \in Y_к(C_к(\gamma) + \lambda e_к(\gamma))$ имеет место неравенство $\bar{y}_к(\gamma)(C_к(\gamma) + \lambda e_к(\gamma), 0, \varphi_к) \le y_к(C_к(\gamma) + \lambda e_к(\gamma), 0, \varphi_к)$, а это значит, что $\bar{y}_к \in Y_к(C_к(\gamma) + \lambda e_к(\gamma))$.*) Поскольку $\bar{\pi}_к(\gamma) e_к(\gamma) = \|e_к(\gamma)\|^2 > 0$, распределение ресурсов $S(\gamma+1)$, как и $S'(\gamma) = (C_к(\gamma) + \lambda e_1(\gamma), \ldots, C_\ell(\gamma) + \lambda e_\ell(\gamma))$, строго лучше, чем $S(\gamma)$. Надо теперь показать, что $J_к(\gamma+1)$ является допустимым базисным множеством при ограничениях по ресурсам $C_к(\gamma) + \lambda e_к(\gamma)$. По по-

---

*) Это свойство набора векторов $\bar{y}_к$ дает определенные основания называть его набором устойчивости оценок.

строению множества $J_k(\gamma+1)$ выполняется одно из двух условий: либо все номера j, для которых $a^j_k \bar{y} = \xi^j_k$, входят в $J_k(\gamma+1)$, либо среди $j \in J_k(\gamma+1)$ нет таких, что $a^j_k \bar{y}_k > \xi^j_k$. Поскольку все компоненты вектора ξ_k, кроме одного, равны нулю, существование номера $j_1 \bar{\in} J_k(\gamma+1)$ такого, что $a^{j_1}_k \bar{y}_k = \xi^j_n$, означало бы линейную зависимость между N_k строками матрицы k-й задачи вида (2$'$). Действительно, множество $J_k(\gamma+1)$ состоит из N_k элементов. Среди них найдётся, по крайней мере, $N_k - 1$ таких, что $a^j_k \bar{y}_k(\gamma) = 0$ (их ровно $N_k - 1$, если строка $(0, d_k, 0)$ входит в базис), кроме того $a^{j_1}_k \bar{y}_k(\gamma) = 0$. Поскольку все задачи вида (2$'$) предполагаются невырожденными, это не может быть. Таким образом, для всех $j_1 \bar{\in} J_k(\gamma+1)$ имеет место строгое неравенство $a^{j_1}_k \bar{y}_k(\gamma) > \xi^{j_1}_k$. Это означает, что при ограничениях по ресурсам $C_k(\gamma) + \lambda e_k(\gamma)$ ненулевыми элементами в оптимальном плане будут только компоненты с номерами из $J_k(\gamma+1)$, что влечёт допустимость базисного множества $J_k(\gamma+1)$.

Непосредственно из теоремы 2 следует, что при $\sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda(\gamma) < +\infty$ либо в конечное число шагов достигается распределение, оптимальное по Парето, либо на каждом шаге γ происходит улучшение распределения ресурсов, то есть для некоторого $k \in \Omega$ выполняется неравенство $Z_k(C_k(\gamma)) > Z_k(C_k(\gamma-1))$. В последнем случае, очевидно, существует предел $\bar{S}$ последовательности $\{S(\gamma)\}_{\gamma=1}^{\infty}$, и этот предел является допустимым распределением ресурсов. Неясно, однако, всегда ли распределение $\bar{S}$ является оптимальным по Парето. Заметим, что если вычисления проводятся приближенно, то этот предел будет достигнут с заданной наперед точностью в конечное число шагов. Если при этом окажется, что $\sum_{k=1}^{l} \|e_k\| > 0$, то счёт будет продолжаться, и поэтому может быть достигнуто распределение ресурсов, сколь угодно близкое к оптимальному по Парето.

§ 4. Некоторые дополнительные замечания

Описанный выше алгоритм следует рассматривать как модель взаимодействия отдельных хозяйственных объектов в некоторой экономической системе, а не как алгоритм решения задач большой размерности. С этой точки зрения представляется важным, что на каждом шаге алгоритма достигается допустимое решение, которое не хуже решения, полученного на предыдущем шаге. Благодаря этому процесс можно оборвать на любом шаге или использовать его параллельно с каким-нибудь другим алгоритмом перераспределения ресурсов. Другой важной чертой предлагаемого алгоритма является очень небольшой объем информации, поступающей в управляющий орган от подсистем. Предлагается, что передается информация о множествах $Y_k(C_k(\gamma))$, $k \in \Omega$, и значения $\lambda_k(\gamma)$. Если при этом все задачи вида $2'$ являются невырожденными, то каждое $Y_k(C_k(\gamma))$ состоит из одной точки, которая находится при решении задачи $2'$ модифицированным симплекс-методом. Алгоритмический шаг в этом случае очень прост, так как набор векторов $y_k(\gamma)$ является устойчивым, что делает особенно удобным применение этого шага в промежутках между шагами какого-либо другого алгоритма перераспределения ресурсов. Последнее относится прежде всего к алгоритму построения равнонапряженных планов в системе моделей производства, предложенному В.Д.Маршаком (см. [2,3]).

Необходимо также отметить, что если множества $Y_k(C_k(\gamma))$ имеют большую размерность, то нахождение набора устойчивых векторов является весьма сложной задачей, в связи с чем эффективность всего алгоритма резко падает. Целесообразно поэтому не доводить процесс до распределения, оптимального по Парето, а делать всего лишь несколько алгоритмических шагов. При этом удобно исключать на каждом шаге подсистему с номером k_j, для которой выполняется равенство $\lambda_{k_j}(\gamma) = \min_k \lambda_k(\gamma) = \lambda(\gamma)$, и перераспределять ресурсы между оставшимися подсистемами. Этот приём позволяет избежать трудной задачи - вычисления устойчивых векторов оценок. Если равенство $\lambda_{k_j}(\gamma) = \lambda(\gamma)$ реализуется только для одного номера k_j (с вероятностью единица именно так и будет), неоднозначно определяется только один вектор оценок y_{k_j}. Поэтому задача отыскания набора системы устойчивых векторов сводится к задаче квадратичного программирования и может быть решена в конечное число шагов (см. [4 , 5]). Нахождение такой системы в общем случае, по-видимому, достаточно сложно и представляет некоторый самостоятельный теоретический интерес.

Приведенный алгоритм предлагается включить в блок "Оптимум" системы "ОАСУ-прибор П", описанного в работе С.М.Анцыза и В.Д. Маршака [7] .

Литература

1. ГЕЙЛ Д. Теория линейных экономических моделей. ИЛ, М., 1963.
2. МАРШАК В.Д. Алгоритм решения задачи распределения ресурсов в отрасли. - В кн.: Оптимизация. Вып. 10(27), Новосибирск, 1973, с. 128-143.
3. МАРШАК В.Д. О сходимости алгоритма решения задачи распределения ресурсов в отрасли. - В кн.: Оптимизация. Вып. 11(28), Новосибирск, 1973, с. 46-53.
4. БУЛАВСКИЙ В.А. Один специальный алгоритм квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22), Новосибирск, 1973, с. 23-36.
5. ШМЫРЕВ В.И. Об алгоритмах метода последовательного улучшения для квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22), Новосибирск, 1972, с. 133-157.
6. РОЗЕНМЮЛЛЕР И. Кооперативные игры и рынки. М., Мир, 1974.
7. АНЦЫЗ С.М., МАРШАК В.Д. Модели процессов построения перспективных планов в отраслевой автоматизированной системе управления "АСУ прибор П". - В кн.: Оптимизация. Вып. 16(33), Новосибирск, 1975, с. 15-61.

Поступила в ред.-изд. отд.
14.V. 1975 г.