Модели динамики и равновесия

УДК 51:65.012.122

ТЕОРЕМА О МАГИСТРАЛИ ДЛЯ НЕТЕРМИНАЛЬНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

С.А.Ашманов

В теоремах о магистрали для динамических моделей долгосрочного планирования, доказанных Р.Раднером [1], М.Моришимой [2], В.Л.Макаровым [3] и другими, рассматривается, как правило, замкнутая модель экономики типа Леонтьева – Неймана – Гейла с терминальной целевой функцией. Для подробного знакомства с данной проблематикой мы рекомендуем книгу [4].

Данная статья посвящена рассмотрению динамической модели экономики, которую условно можно назвать моделью Леонтьева, с целевой функцией, зависящей от векторов интенсивностей в каждом периоде планирования. Ближе всего к предмету предлагаемой статьи стоит модель, изученная М.Моришимой в [2], хотя мы её упростили, подобно тому, как это сделано в [5]. Доказывается теорема о магистрали в сильной форме.

I. Обозначения, определения и простейшие факты

Рассматривается n -мерное евклидово пространство R^n, элементы которого обозначаются буквами z или p. Неотрицательный ортант пространства R^n обозначается R^n_+. Если $z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$, то $|z|=(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$.

Буквой A обозначается неотрицательная, неразложимая, примитивная $n \times n$ -матрица. (Определения всех употребляемых понятий можно найти, например, в [6, 7]).

Через λ, z^*, p^* обозначим соответственно собственное число, левый и правый вектор Фробениуса матрицы A. Положим $\bar{A}=\lambda^{-1}A$.

Запись $z \geq z'$ ($z > z'$) означает, что каждая координата вектора z не меньше (больше) соответствующей координаты вектора z'.

Как известно, для примитивной матрицы A выполняются свойства $\lambda > 0$, $z^* > 0$, $p^* > 0$.

Если z, $z' \in R^n_+$, $z' \neq 0$, то через z/z' обозначим, следуя Е.Лосю [8], наибольшее число α такое, что $\alpha z' \leq z$.

Символом $\langle z, p\rangle$ обозначается скалярное произведение векторов z, p R^n.

Введем в R^n норму по формуле $\|p\|=(|p|, z^*)$. Эта норма, эквивалентная, конечно, любой другой, удобна для наших целей. Нам в дальнейшем придется пользоваться фактом эквивалентности норм. Так, если нам удается установить, что $\sum_{i=1}^{n}|p_i| \leq C$, где C - некоторая константа, мы без пояснений пишем $\|p\| \leq C_1$, где C_1 - некоторая другая константа.

Назовем конической ε-окрестностью вектора z^* минимальный конус, содержащий окрестность $\{z : z \in R^n_+ |z-z^*|<\varepsilon\}$.

Для формулировки важного в дальнейшем факта введем подпространство $\mathcal{L}_{z^*}=\{p : p\in R^n, (p,z^*)=0\}$.

Скажем, что оператор B является оператором сжатия на множестве $M \subseteq R^n$, инвариантном относительно B, если существует число γ, $0<\gamma<1$, для которого $\|Bp\| \leq \gamma \|p\|$ при всех $p \in M$.

Следующий хорошо известный факт выражает одно из основных свойств примитивных матриц.

ЛЕММА I. Пусть матрица A примитивна, $\bar{A}=\lambda^{-1}A$. Существует такое число t_0, что оператор $\bar{A}^{t_0}$ является сжимающим на подпространстве $\mathcal{L}_{z^*}$.

Доказательство можно найти в [6].

Приведем также другую форму этого утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть матрица A примитивна, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое число t_0, что при $t > t_0$ вектор zA^t принадлежит конической ε-окрестности вектора z^* для любого $z \in R_+^n$.

ЛЕММА 3. Пусть z_k, $k = 1, 2, \ldots$, - произвольные векторы подпространства $\mathcal{L}_{z^*}$, ограниченные в совокупности по норме: $\|z_k\| < Q$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда существует константа K такая, что $\|\sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}^k z_k\| \leq K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t_0 - число, фигурирующее в лемме I. Запишем нашу бесконечную сумму несколько иначе:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}^k z_k = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=st_0+1}^{(s+1)t_0} \bar{A}^k z_k .$$

Тогда

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}^k z_k\| \leq \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=st_0+1}^{(s+1)t_0} \|\bar{A}^k z_k\| \leq \sum_{s=0}^{\infty} t_0 \gamma^s \|z_k\| \leq \frac{t_0 Q}{1-\gamma} .$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $st_0+1 \leq k \leq (s+1)t_0$ имеет место неравенство $\|\bar{A}^k z_k\| \leq \gamma^s \|z_k\|$, где γ - коэффициент сжатия оператора $\bar{A}^{t_0}$.

2. Описание модели

Имеется n типов товаров. Технология рассматриваемой экономики задается парой квадратных матриц (A, I), где I - единичная матрица. Каждая строка $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ матрицы A описывает затраты i-го производственного процесса при единичной интенсивности работы, необходимые для выпуска единицы товара i-го типа. Величина промежутка планирования T - натуральное число. К моменту $t = 0$ начала планирования имеется запас товаров, описываемый вектором z_0, $z_0 \in R_+^n$.

Траекторией $\{z_t\}$ интенсивностей (она же является траекторией выпусков) назовем последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_T$ неотрицательных n -мерных векторов, удовлетворяющих условиям

$$z_{t+1} A \leq z_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1 . \tag{5}$$

Пусть $z^T \in R^n_+$ - вектор, задающий желаемую структуру выпуска в конечный момент времени T. Тогда экстремальную задачу, рассмотренную М.Моришимой (в более общем виде), можно сформулировать следующим образом.

$$\left.\begin{array}{c} \max \alpha , \\ z_{t+1} A \leq z_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \\ z_T \geq \alpha z^T , \\ z_t \geq 0, \ t = 1, 2, \ldots, T . \end{array}\right\} \tag{6}$$

Для задачи (6) при дополнительных предположениях $z_0, z^T > 0$ в [2] доказана теорема о магистрали в сильной форме.

Пусть заданы векторы $c_1, c_2, \ldots, c_T$; $c_t \in R^n_+$, $t = 1, 2, \ldots, T$, которые можно, например, трактовать как реальные цены в соответствующие периоды. Предполагаем, что они все нормированы следующим образом: $(c_t, z^*) = (p^*, z^*)$. Введем на множестве всех траекторий (5) функцию полезности

$$u(\{z_t\}) = \sum_{t=1}^{T} \lambda^t (c_t, z_t) .$$

Из содержательных соображений ясно, что ставить задачи максимизации целевой функции u на множестве всех траекторий нецелесообразно, поскольку для соответствующей оптимальной траектории может, в частности, оказаться, что выпуск в момент времени T - нулевой и дальнейшее производство невозможно.

Обратимся вновь к задаче (6). Нетрудно видеть, что максимально возможное значение α в (6) равно $\tilde{\alpha} = z_0 / z^T A^T$.

Пусть $\bar{\alpha}$ - произвольное число, $0 < \bar{\alpha} \leq \mu \tilde{\alpha}$, где $0 < \mu < 1$, μ <u>не зависит от T</u>. Тогда экстремальная задача, которую мы собираемся рассмотреть такова:

$$\left.\begin{array}{l} \max \sum_{t=1}^{T} \lambda^t (c_t, z_t) \\ z_{t+1} A \leq z_t, \ t = 0, 1, \ldots, T-1 ; \\ z_T \geq \bar{\alpha} z^T ; \\ z_t \geq 0 , \ t = 1, 2, \ldots, T. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Число $\bar{\alpha}$ можно понимать как директивно заданный уровень производства в последний момент T планового периода.

3. Теорема о магистрали

ТЕОРЕМА. Пусть заданы примитивная матрица A, вектор начальных запасов $z_0 > 0$, число μ, $0<\mu<1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$, зависящие только от ε, A, z_0, μ, что при $T > T_1 + T_2$, произвольном векторе $z^T > 0$, произвольной последовательности $\{c_t\}$, $\|c_t\| = \|p^*\|$, $t = 1,2,\ldots,T$, всякая оптимальная траектория $\{z_t\}$ задачи (7) обладает тем свойством, что вектор z_t, $T_1 \leq t \leq T - T_2$, лежит в конической ε-окрестности вектора z^*.

План доказательства теоремы аналогичен методу, предложенному М.Моришимой в [2], и состоит в оценке роста двойственных переменных.

Основное отличие возникает в выражении двойственной переменной p_{t+1} через A^t и p_1. Для упрощенной модели Моришимы (6) имеет место равенство $p_{t+1} = A^t p_1$. В нашем же случае аналогичная формула имеет вид $p_{t+1} = A^t p_1 - S(t)$, где $S(t)$ -некая функция от A, $\{c_t\}$ (см. ниже (10)). Удается, однако, показать, что при достаточно больших T для оптимального решения p_1 двойственной задачи имеет место строгое неравенство $A^t p_1 > S(t)$ почти при всех $t \leq T$.

Рассмотрим задачу, двойственную к (7)

$$\begin{gathered}\min[(p_1, z_0) - \bar{\alpha}(p_{T+1}, z^T)] \\ A p_t - p_{t+1} = \lambda^t c_t, \; t = 1,2,\ldots,T; \\ p_t \geq 0, \quad t = 1,2,\ldots,T+1.\end{gathered} \tag{8}$$

Из предположения $z^T > 0$ и неразложимости матрицы A вытекает, что для любой траектории $\{z_t\}$ все векторы $z_t > 0$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Теория двойственности линейного программирования позволяет утверждать, что всякая оптимальная траектория $\{p_t\}$ в (8) является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} & \min[(p_1, z_0) - \bar{\alpha}(p_{T+1}, z^T)] \\ & Ap_t - p_{t+1} = \lambda^t c_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \\ & p_t \geqslant 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T+1. \end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что любое решение системы уравнений (9) имеет вид

$$\begin{aligned} & p_{t+1} = A^t p_1 - \sum_{k=0}^{t-1} \lambda^{t-k} A^k c_{t-k}, \\ & t = 1, 2, \ldots, T. \end{aligned} \tag{10}$$

Поэтому любую допустимую траекторию $\{p_t\}$ задачи (9) мы можем получить по формуле (10), придавая значение p_1 и заботясь лишь о том, чтобы выполнялись неравенства $p_t \geqslant 0$.

Подставляя в (9) выражение для вектора p_t из (10) при $t = 1, 2, \ldots, T+1$, и отбрасывая в линейной форме возникающую постоянную добавку, окончательно получаем, что любая оптимальная для задачи (8) последовательность $\{p_t\}$ получается по формуле (10), где вектор p_1 является решением следующей задачи.

$$\begin{aligned} & \min(p_1, z_0 - \bar{\alpha} z^T A^T) \\ & \bar{A}^t p_1 \geqslant b_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \\ & \qquad p_1 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь через b_t обозначен вектор

$$b_t = \sum_{k=0}^{t-1} \bar{A}^k c_{t-k}. \tag{12}$$

(Напоминаем, что $\bar{A} = \lambda^{-1} A$.)

Наша ближайшая цель - оценить рост решения p_1 задачи (11) в зависимости от параметра T.

ЛЕММА 4. Вектор b_t допускает представление $b_t = p^* + d_t$, $t = 1, 2, \ldots, T$, где $\|d_t\| \leq K$; константа K зависит только от матрицы A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_t = p^* + q_t$, $t \leq T$. Вследствие предположения $(c_t, z^*) = (p^*, z^*)$, имеем $(q_t, z^*) = 0$, другими словами, $q_t \in \mathcal{L} z^*$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Подставив в (I2) выражение $c_t = p^* + q_t$, получаем $b_t = t p^* + \sum_{k=0}^{t-1} \bar{A}^k q_{t-k}$. Заметим, что $\|q_t\| = \|c_t - p^*\| \leq \|c_t\| + \|p^*\| = 2\|p^*\|$.

Для оценки нормы вектора $d_t = \sum_{k=0}^{t-1} \bar{A}^k q_{t-k}$ остается воспользоваться леммой 3, положив в ней $Q = 2\|p^*\|$.

ЛЕММА 5. Для оптимального вектора p_1 задачи (II) существуют константы R и D, зависящие только от A, z_0, μ, такие, что $\|p_1\| \leq RT + D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вектор $p = (T+c)\,p^*$. Нетрудно подобрать константу c так, чтобы вектор p был допустимым для задачи (II). Действительно, для этого необходимо лишь, чтобы $(T+c)p^* \geq b_t$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Следовательно, достаточно выбрать константу c таким образом, чтобы $c p^* \geq d_t$, $t = 1, 2, \ldots, T$, что возможно в силу неравенств $p^* > 0$, $\|d_t\| \leq K$.

По определению вектора p_1, в таком случае

$$(p_1, u) \leq (T+c)\,(p^*, u),$$

где $u = z_0 - \mathcal{L} z^T A^T$. Используя очевидное неравенство $(1-\mu) z_0 \leq u \leq z_0$, получаем $(1-\mu)(p_1, z_0) \leq (T+c)(p^*, z_0)$. Обозначив через δ минимальную компоненту вектора z_0, имеем неравенство, ограничивающее сумму координат вектора p_1:

$$\sum_{i=1}^{n} (p_1)_i \leq \frac{T+c}{\delta(1-\mu)} (p^*, z_0).$$

Используя наконец факт эквивалентности различных норм в R^n, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 6. Существуют числа T_1 и T_2', зависящие только от A, z_0, μ, такие, что из неравенства

$$\bar{A}^{T} p_1 \geq b_T \qquad (13)$$

вытекает строгое неравенство

$\bar{A}^{t} p_1 > b_t$ при $T_1 \leq t \leq T - T_2'$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем (13) следующим образом:

$\bar{A}^{t} p_1 > b_t + q - s$, где $q = b_T - b_t$, $s = \bar{A}^{T} p_1 - \bar{A}^{t} p_1$.

Нам достаточно показать, что $q > s$ при $T_1 \leq t \leq T - T_2'$, где T_1 и T_2' – подходящие константы. Воспользовавшись леммой 4, получаем $q = (T-t)p^* + (d_T - d_t)$. Поэтому нам надо показать, что

$$p^* > \frac{s}{T-t} - \frac{d_T - d_t}{T-t} \qquad (14)$$

при $T_1 \leq t \leq T - T_2'$.

Поскольку $\| d_T - d_t \| \leq \| d_T \| + \| d_t \| \leq 2K$, то существует номер T_2' такой, что при $T - t \geq T_2'$ имеет место неравенство $\left| \frac{d_T - d_t}{T-t} \right| < \frac{p^*}{2}$. Заметим, что величина T_2' зависит только от матрицы A. Основная трудность заключается в оценке роста вектора s.

Пусть $s = \bar{A}^{t} v$, где $v = \bar{A}^{T-t} p_1 - p_1$. Нетрудно видеть, что $(v, z^*) = 0$, т.е. $v \in \mathcal{L}_{z^*}$. Пусть t_0 – число, фигурирующее в лемме 1. Оно зависит только от матрицы A. Пусть $t = m t_0 + \tau$, где $0 \leq \tau < t_0$; τ, m – натуральные числа, $T = (Q + m)t_0 + \tau_1$, где $0 \leq \tau_1 < t_0$, $Q \geq 0$, Q – натуральное число. По лемме 1 имеем $\| s \| = \| \bar{A}^{t} v \| \leq \gamma^m \| v \|$. Нетрудно видеть, что $\| v \| \leq 2 \| p_1 \|$. Воспользовавшись леммой 5, получаем $\| s \| \leq \gamma^m (\tilde{R} T + \tilde{\mathcal{D}})$, где $R = 2R$, $\tilde{\mathcal{D}} = 2\mathcal{D}$.

Оценим первое слагаемое в (14):

$$\left\| \frac{s}{T-t} \right\| \leq \gamma^m \frac{\tilde{R} T + \mathcal{D}}{T-t} = \gamma^m \frac{\tilde{R}[(Q+m)t_0 + \tau_1] + \tilde{\mathcal{D}}}{Q t_0 + \tau_2}, \qquad (15)$$

где $\tau_2 = \tau_1 - \tau$.

Рассмотрим подробнее правую часть неравенства (15).

$$\gamma^m \frac{\tilde{R} T + \mathcal{D}}{T-t} = m\gamma^m \frac{\tilde{R} t_0}{Q t_0 + \tau_2} + \gamma^m \frac{\bar{R} Q + \bar{\mathcal{D}}}{Q t_0 + \tau_2}, \qquad (16)$$

где $\bar{R} = \tilde{R} t_0$, $\bar{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}} + \tilde{R} \tau_{1_T}$. Отметим, что $\bar{R}$ и $\bar{\mathcal{D}}$ ограничены независимо от T, $\bar{z}^T$.

Очевидно, что

$$\lim_{m \to \infty} m \gamma^m = 0, \quad \lim_{m \to \infty} \gamma^m \frac{\bar{R} Q + \bar{\mathcal{D}}}{Q t_0 + \tau_2} = 0 .$$

Во втором случае стремление к нулю равномерно по всем $Q \geqslant 0$. Следовательно, существует такое число M, что $\left| \frac{s}{T-t} \right|$ при $t \geqslant M t_0 = T_1$ удовлетворяет неравенству $\left| \frac{s}{T-t} \right| < \frac{\rho^*}{2}$.

Следовательно, при $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_2'$ выполняются неравенства (14), и лемма доказана.

Переформулируем лемму 6, чтобы получить основное вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 7. Существуют константы T_1 и T_2', зависящие только от $A, \bar{z}_0, \mu$, такие, что при $T > T_1 + T_2'$ для любой оптимальной последовательности $\{p_t\}$ задачи (9) имеет место неравенство $p_t > 0$ при всех t, $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_2'$.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы. Воспользовавшись еще раз теорией двойственности, из леммы 7 имеем:

ЛЕММА 8. Для любой оптимальной траектории $\{\bar{z}_t\}$ задачи (7) имеют место равенства $\bar{z}_{t+1} A = \bar{z}_t$ при $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_2'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы.

Поскольку, как нетрудно видеть, $\bar{z}_t = \bar{z}_{T-T_2'} A^{T-T_2'-t}$ при $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_2'$, то существует такое число T_2'', зависящее только от матрицы A и ε, что при $T - T_2' - t \geqslant T_2''$ вектор $\bar{z}_t$ принадлежит конической ε-окрестности вектора $\bar{z}^*$ (см. лемму 2). Обозначив $T_2 = T_2' + T_2''$, получаем утверждение теоремы.

Литература

I. RADNER R. Paths of Economic Growth that are optimal with regard only to final states: a turnpike theorem. Rewiew Econom. Studies, 1961, 28, pp.98-104.

2. МОРИШИМА М. Равновесие, устойчивость, рост. "Наука", 1972.

3. МАКАРОВ В.Л. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики.-"Сиб. мат. журн.", 1966, 7, № 4, с. 832-835.

4. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. "Наука", М., 1973.

5. ЧЕРЕМНЫХ Ю.Н. Вопросы качественного исследования решений динамических моделей экономики. МГУ, 1971.

6. ГЕЙЛ Д. Теория линейных экономических моделей. ИЛ, 1963.

7. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. "Мир", М., 1972.

8. JERSY LOS. The approximative horizon in von Neumann model of optimal growth. Preprint N 3, Polish Academy of sci. Inst. of math. 1970.

Поступила в ред.-изд. отд.
28. 10. 1974 г.