1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Смежные математические вопросы

УДК 519.4:517:513.88

СОПРЯЖЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В.Иванов

В данной заметке изучается наследуемость свойств полугрупп операторов в локально выпуклом пространстве (л.в.п.) при переходе к сопряженному пространству, наделенному топологией ограниченной, компактной или поточечной сходимости. При этом на полугруппы не налагается столь жестких ограничений как непрерывность в нуле и особенно равностепенная непрерывность. Все понятия и обозначения взяты из работ [1], [2].

Пусть $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$ - совокупности всех соответственно ограниченных и компактных множеств отделимого секвенциально полного л.в.п. $(X, \mathcal{P})$. Возьмем $\mathfrak{b} \in \{\mathcal{B}, \mathcal{L}\}$ и снабдим сопряженное пространство топологией $\tau_{\mathfrak{b}}$, порожденной полярами

$$\{x' \in X' \mid |<B, x'>| \leq 1\}, \; B \in \mathfrak{b}.$$

ЛЕММА I. Если $\{U_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$ - эквинепрерывное семейство из $L(X)$, то операторы U_α^*, $\alpha \in \mathfrak{A}$, эквинепрерывны в $L(X', \tau_{\mathfrak{b}})$, если выполнено любое из условий:

$i)$ $\mathfrak{b} = \mathcal{B}$;

$ii)$ $\mathfrak{b} = \mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$ - компакт и отображение $\alpha \to U_\alpha$ сильно непрерывно.

Пусть A - замкнутый линейный оператор в X, $\overline{\mathcal{D}A} = X$ и R - квазирезольвента A (с остатком ν), то есть $R: \Pi_0 \to L(X)$ и

$$R(\lambda)A_\lambda \subset A_\lambda R(\lambda) = I + e^{-\lambda}\nu \in L(X), \; \lambda \in \Pi_0 \qquad (I)$$

Обозначая $\Pi_k(\mu)=R(\mu_1)\cdot\ldots\cdot R(\mu_k)$, $\mu=(\mu_i)\in\Pi_0^k$, из (I) получаем

$$\mathcal{L}(R(\Pi_k(\mu)),\ \mu\in\Pi_0^k)=\mathcal{D}A^k,\quad k\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

ЛЕММА 2. Сопряженное отображение $R^*:\lambda\to[R(\lambda)]^*$ есть квазирезольвента (с остатком ν^*) оператора A^*.

Пространство $(X',\tau_{\mathfrak{p}})$ считаем далее секвенциально полным. Класс E полугрупп (см. [2]) в пространстве Y обозначим $E(Y)$. Для простоты полагаем X бочечным.

ТЕОРЕМА I. Пусть $T\in E(X)$, A - производящий оператор T и R - каноническая квазирезольвента A. Положим

$$X^+=\overline{\bigcup_{t>0}T(t)^*\mathcal{D}A^*},\quad A^+=A^*\cap X^+\times X^+.$$

Тогда A^+ - производящий оператор полугруппы $T^+\in E(X^+)$; при этом $T^+(t)=T(t)^*|X^+$ и отображение $R^+:\lambda\to R^*(\lambda)|_{X^+}$ - каноническая квазирезольвента A^+.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компакта $\Delta\in\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$, в силу бочечности X,

$$M_{\Delta,p}=\sup_{t\in\Delta}p\circ T(t)\in\mathfrak{P},\quad p\in\mathfrak{P}. \qquad (3)$$

Пусть $t\in\mathbb{R}^+$ и $\Delta=[t-\epsilon,t+\epsilon]\subset\mathbb{R}^+$. Полагая $A_{h,t}=h^{-1}\times(T(t+h)-T(t))$ и учитывая $AR(\lambda)\in L(X)$, для $|h|\in(0,\epsilon]$ получаем

$$p\circ A_{h,t}R(\lambda)\le M_{\Delta,p}\circ AR(\lambda)\in\mathfrak{P},\quad \lambda\in\Pi_0.$$

Так как $A_{h,t}R(\lambda)\xrightarrow[h\to 0]{}AT(t)R(\lambda)$, то семейство $\{A_{h,t}R(\lambda)\}$ ($h\in[-\epsilon,\epsilon]$) удовлетворяет условиям леммы I, откуда для всех $x'\in X'$

$$[T^*(t+h)-T^*(t)]R^*(\lambda)x'=o(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

Из (3) и леммы I получаем теперь, что T^* непрерывна по $t\in\mathbb{R}^+$ на $\overline{\mathcal{L}(\bigcup_{\lambda\in\Pi_0}R(R^*(\lambda)))}$, то есть, в силу (2) и леммы 2, на $\overline{\mathcal{D}A^*}$.

Из перестановочности A и $T(t)$ следует $X^+\subset\overline{\mathcal{D}A^*}$; по

той же причине $T^+(t)$, $R^+(\lambda) \in L(X^+, \tau_\Phi)$. Так как
$$A^* R^+(\lambda) = [\lambda R^*(\lambda) - I + e^{-\lambda} T(1)^*]|_{X^+} \in L(X^+),$$
то $R(R^+(\lambda)) \subset (A^*)^{-1}[X^+] \cap X^+ = \mathcal{D}A^+$, то есть R^+ - квазирезольвента A^+ (с остатком $[-T^+(1)]$). Далее,
$$X^+ \supset \overline{X_0(T^+)} \supset \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} T^+(t) \bigcup_{s \in \mathbb{R}^+} T^*(s)\mathcal{D}A^*} = \overline{\bigcup_{t+s \in \mathbb{R}^+} T^*(t+s)\mathcal{D}A^*} = X^+.$$
Как нетрудно видеть, для любого $t \in \mathbb{R}^+$
$$R^*(\lambda)x' = \int_0^1 e^{-\lambda s} T^*(s)x' ds, \quad x' \in T^*(t)\overline{\mathcal{D}A^*}$$
(интеграл определен ввиду секвенциальной полноты X'). Отсюда
$$R^+(\lambda) \supset R^0_{T^+}(\lambda)|_{X_0(T^+)}, \quad \lambda \in \Pi_0.$$
Наконец, в силу (I),
$$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}^+} R^+(\lambda)^{-1}[0] \subset \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}^+} [I^+ - e^{-\lambda} T^+(1)]^{-1}[0] = \{0\}.$$
Итак, $T^+ \in E(X^+)$; при этом, в силу ([2], утверждение 2) R^+ есть квазирезольвента (с остатком $[-T^+(1)]$) производящего оператора $\widehat{A}$ полугруппы T^+. Так как R^+ является таковой и для A^+, то, согласно [I], $A^+ = \widehat{A}$. Теорема доказана.

Напомним, что $\sum(T) = \{x \in X \mid \exists \lim_{t \to +0} T(t)x = x\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T \in E(X)$ и для некоторого $\mu \in \Pi_0^k$ семейство операторов $\{T(t)\Pi_k(\mu)\}$ $(t \in [0,1])$ эквинепрерывно. Тогда $\mathcal{D}(A^+)^k \subset \sum(T^+)$. Если, кроме того, эквинепрерывны операторы $\lambda R(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^+$, то $X^+ = \overline{\mathcal{D}A^*}$ и $\lambda R^+(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ и $\lambda \in \Pi_0$; согласно ([2], (I)),
$$T(t)\Pi_k(\lambda, \mu_2, \dots, \mu_k) = [I + (\mu_1 - \lambda)R(\lambda)]T(t)\Pi_k(\mu) +$$
$$+ [e^{-\mu_1}\Pi_k(\lambda, \mu_2, \dots, \mu_k) - e^{-\lambda}\Pi_k(\mu)]T(1+t),$$
то есть рассматриваемое условие эквинепрерывности справедливо для всех $\mu \in \Pi_0^k$. Из соотношений $\Pi_k(\mu)\sum \subset \sum$ и $\overline{\sum} = X$ по теореме Банаха-Штейнгауза получаем $R(\Pi_k(\mu)) \subset \sum$. Отсюда, в силу леммы I, операторы $T^+(t)\Pi_k^+(\mu)$, $t \in [0,1]$, эквинепрерывны, то есть

$$\mathcal{D}(A^+)^k = \mathcal{L}(R(\Pi_k^+(\mu)), \mu \in \Pi_o^k) \subset \Sigma(T^+).$$

Далее, из эквинепрерывности семейства $\{\lambda R(\lambda)\}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$ следует $\lambda R(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} I = \infty \cdot R(\infty)$, то есть, по лемме I, операторы $\lambda R^*(\lambda)$, $\lambda \in [1, \infty]$, эквинепрерывны. Отсюда несложно вывести, что $[\lambda R^*(\lambda)]^m x' \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} x'$ для всех $x' \in \overline{\mathcal{D}A^*}$ и $m \in \mathbb{N}$, то есть, согласно (2), $\overline{\mathcal{D}(A^{*m})} = \overline{\mathcal{D}A^*}$. Полагая $A_h = h^{-1}(T(h) - I)$, $h \in \mathbb{R}^+$, и учитывая включение $R(\lambda)\Pi_k(\mu)X \subset A^{-1}[\Sigma]$, как и в теореме I, получим эквинепрерывность семейства $\{A_h^* R^*(\lambda)\Pi_k^*(\mu)\}$ $(h \in [0,1])$, откуда $\mathcal{D}(A^*)^{k+1} \subset \Sigma(T^*)$. Так как, разумеется, $\mathcal{D}A^* \cap \Sigma(T^*) \subset X^+$, то

$$\overline{\mathcal{D}A^*} = \overline{\mathcal{D}(A^*)^{k+1}} \subset \overline{\Sigma(T^*) \cap \mathcal{D}A^*} \subset X^+ \subset \overline{\mathcal{D}A^*}.$$

Теорема доказана.

Из теорем I и 2 вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $T \in (A(X))$ и A – производящий оператор T; положим*

$$X^+ = \overline{\mathcal{D}A^*},\ T^+ = T^* | X^+,\ A^+ = A^* \cap (X^+)^2.$$

Тогда $T^+ \in (A(X^+))$ и A^+ – производящий оператор T^+. Если $T \in C_o(X)$, то и $T^+ \in C_o(X^+)$; при этом, если T – равностепенно непрерывная полугруппа, то в случае $\mathfrak{b} = \mathcal{B}$ таковой является и T^+.

ЗАМЕЧАНИЯ. I) Для бочечного X условие эквинепрерывности операторов $T(t)\Pi_k(\mu)$, $t \in [0,1]$, равносильно включению $\mathcal{D}(A^k) \subset \Sigma(T)$.

2) Если рассматривать полугруппы T, эквинепрерывные на компактах $\Delta \subset \mathbb{R}^+$, то теоремы I-3 справедливы без предположения бочечности X.

3) В случае $\mathfrak{b} = \mathcal{B}$ для равностепенно непрерывных полугрупп класса C_o теорема 3 была доказана Комацу [3].

Приведем без доказательства соответствующую теорему для случая топологии поточечной сходимости σ в пространстве X'.

Пусть T – полугруппа в X, A_o – её инфинитезимальный оператор. Пусть $T^*: t \to [T(t)]^*$ и

$$X^+ = \overline{\bigcup_{t\in R^+} T^*(t)X'}, \quad T^+ = T^*|_{X^+}, \quad A^+ = A^* \cap X^+ \times X^+.$$

ТЕОРЕМА 4. T^* есть полугруппа в (X',σ), имеющая производящий оператор $\widehat{A} \subset A_0^*$. Если $T \in E(X)$, то $T^+ \in E(X^+)$ и A^+ - производящий оператор T^+, причем $A^+ = \widehat{A}$. Если T непрерывна (абсолютно суммируема) в нуле на $\mathcal{D}(A^*)$, то это верно и для T^+. Если, кроме того, $\lambda R(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} I$, то $X^+ = X'$ и, следовательно, $A^+ = A^*$, $T^+ = T^*$.

Литература

1. ИВАНОВ В.В. h-резольвента и чезаровские классы полугрупп в локально выпуклом пространстве. - В кн.: Оптимизация. Вып. I4(3I), Новосибирск, I974, с. I42-I64.
2. ИВАНОВ В.В. Абсолютная h-резольвента и порождение некоторых классов несуммируемых полугрупп. - В кн.: Оптимизация. Вып. I5(32), Новосибирск, I974, с. I33-I48.
3. KOMATSU H., Semi-groups of operators in lokally convex spaces, J.Math.Soc.Japan, 1964, v.16,N3, p.230-262.

Поступила в ред.-изд. отд.
26. IX. I974 г.