1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Смежные математические вопросы

УДК 519.4:517:513.88

АБСОЛЮТНАЯ n-РЕЗОЛЬВЕНТА И ПОРОЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСУММИРУЕМЫХ ПОЛУГРУПП

В.В.Иванов

1. Эта работа посвящена применению построенного в статье автора [4] аппарата резольвентной последовательности к исследованию свойств и вопросов порождения несуммируемых в нуле полугрупп эндоморфизмов локально выпуклого пространства (л.в.п.). С этой целью вводится понятие абсолютной n-резольвенты, являющейся преобразованием Лапласа от произведения χ_n на своё обратное преобразование Фурье-Лапласа, где χ_n - индикатор отрезка $(0, n)$. Вводятся в рассмотрение классы $\mathcal{J}_k$ полугрупп, имеющих производящий оператор A и суммируемых на $\mathcal{D}A^k$. Из этих классов, представляющих и самостоятельный интерес, путём введения дополнительных ограничений мы получаем важные классы полугрупп в л.в.п. Сюда относятся все классические полугруппы (исследовавшиеся в банаховом случае с помощью резольвенты производящего оператора), а также некоторые интересные классы, не рассматривавшиеся и в классической теории. Мы будем пользоваться понятиями и обозначениями, введёнными в [4].

2. Пусть A - замкнутый линейный оператор, действующий в X - секвенциально полном бочечном л.в.п.; будем считать, что $\mathcal{D}A$ плотно в X. Пусть R есть $\nu(n)$-резольвента степени ℓ оператора A; для $x \in \mathcal{D}A^{\ell+2}$ определено

$$U_n(\lambda)x = \int_0^n e^{-\lambda t} y(t)x\,dt, \tag{1}$$

где

$$y(t) = (2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a} e^{\mu t} R_n(\mu)x\,d\mu \quad (a > 0). \tag{2}$$

В [4] мы видели, что при некоторых условиях $\mathcal{U}_n$ можно рассматривать как n – резольвенту оператора A ; от остальных n-резольвент $\mathcal{U}_n$ отличается тем, что полностью восстанавливается по $y(t)$ $(t \in R^+)$, т.е. определяется лишь самим оператором A . Чтобы дать точное определение, докажем прежде следующее соотношение. Пусть $x \in \mathcal{D}A^{\ell+2}$, $\lambda \in \Pi_0$ и $a > \operatorname{Re}\lambda > 0$; тогда

$$\mathcal{U}_n(\lambda)x = e^{-n\lambda}(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a} \frac{e^{\mu n} R_n(\mu)x\,d\mu}{\mu - \lambda}. \tag{3}$$

Действительно,

$$\mathcal{U}_n(\lambda)x = \int_0^n e^{-\lambda t}(x + \Gamma_1^n(t,x))\,dt,$$

где

$$\Gamma_1^n(t,x) = (2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a} \frac{e^{\mu t} R_n(\mu)Ax\,d\mu}{\mu}.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{U}_n(\lambda) = \frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}e^{-n\lambda} + e^{-n\lambda}(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}\frac{e^{\mu n}R_n(\mu)Ax\,d\mu}{\mu(\mu-\lambda)} - (2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}\frac{R_n(\mu)Ax\,d\mu}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Подставляя в первый интеграл

$$\frac{R_n(\mu)Ax}{\mu} = R_n(\mu)x - \frac{x}{\mu} - \frac{e^{-n\mu}}{\mu}\nu(n)x,$$

и учитывая $\operatorname{Re}\lambda \in (0, a)$, получим (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. n –резольвента R_n (степени ℓ) называется <u>абсолютной</u>, если для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ при всех $x \in \mathcal{D}A^{\alpha+\ell+2}$ и $\lambda \in \Pi_0 \setminus \Pi_a$

$$R_n(\lambda)x = e^{-\lambda n}(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}\frac{e^{\mu n}R_n(\mu)x\,d\mu}{\mu - \lambda}. \tag{4}$$

Из (3) следует, что абсолютная n-резольвента R_n , если существует, единственна; при этом R_n есть $[-y(n)]$ -резольвента и на $\mathcal{D}A^{\alpha+\ell+2}$ определяется соотношением (I).

Далее нам понадобится следующая формула обращения для X-значных функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Пусть $g:[0,n]\to X$ – непрерывная на $[0,n]$ дважды дифференцируемая на $(0,n)$ функция, причём существуют пределы $g'(+0)$ и $g'(n-0)$. Положим

$$f(\lambda)=\int_0^n e^{-\lambda t}g(t)\,dt$$

и

$$h(t)=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}e^{\lambda t}f(\lambda)\,d\lambda \quad (a>0).$$

Тогда $h(t)$ определено для всех t и

$$h(t)=\begin{cases} g(t), & t\in(0,n),\\ 0, & t\,\overline{\in}\,[0,n].\end{cases}$$

3. Рассмотрим прежде наиболее широкий из классов полугрупп, у которых есть производящий оператор, имеющий n-резольвенту.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полугруппа T принадлежит классу E, если

1) $\overline{X}_0=X$;

2) для каждого $\lambda\in\Pi_0$ существует оператор $R_n(\lambda)\in L(X)$, такой, что сужение $R_n(\lambda)|_{X_0}=R_n^\circ(\lambda)|_{X_0}$;

3) $\bigcap\limits_{\lambda>0}[R_n(\lambda)]^{-1}[0]=\{0\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $T\in E$; тогда

I) $T(t)R_n(\lambda)=R_n(\lambda)T(t)$ $(t\in R^+,\lambda\in\Pi_0)$;

2) $R_n(\lambda)|_\Sigma=R_n^\circ(\lambda)|_\Sigma$ $(\lambda\in\Pi_0)$;

3) существует производящий оператор $A=\overline{A}_0$;

4) R_n есть $[-T(n)]$-резольвента A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) следует из перестановочности $R_n^\circ(\lambda)$ и $T(t)$ на X_0. Далее, в [4] было получено соотношение

$$A_0R_n^\circ(\lambda)|_{H_1}=(\lambda R_n^\circ(\lambda)-I+e^{-n\lambda}T(n))|_{H_1}. \qquad (5)$$

В частности, для $x\in\Sigma$ $R_n^\circ(\lambda)x\in\mathcal{D}A_0\subset\Sigma$, т.е.

$$R_n^\circ(\lambda)x = \lim_{t\to+0} T(t)R_n^\circ(\lambda)x = \lim_{t\to+0} R_n(\lambda)T(t)x = R_n(\lambda)x.$$

Пусть теперь $x_\xi \in \mathcal{D}A_0$, $x_\xi \to 0$ и $A_0 x_\xi \to y$; так как $x_\xi \in \Sigma$, то из (2) и (5) имеем

$$R_n(\lambda)A_0 x_\xi = A_0 R_n^\circ(\lambda)x_\xi = \lambda R_n(\lambda)x_\xi - x_\xi + e^{-n\lambda}T(n)x_\xi .$$

Отсюда, в силу $R_n(\lambda)\in \mathcal{L}(X)$, получаем $R_n(\lambda)y=0$ для произвольного $\lambda\in \Pi_0$, что равносильно $y=0$. Итак, существует $\bar{A}_0 = A$. В таком случае, согласно ([4], утверждение 10), R_n есть $[-T(n)]$ - резольвента A. Утверждение доказано.

4. Введём в рассмотрение следующие классы полугрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полугруппу T назовём полугруппой класса $\mathcal{J}_k (k\in \mathcal{N})$, если 1) $T\in E$; 2) $\mathcal{D}A^k \subset \mathcal{J}$.

Докажем некоторые свойства введённых полугрупп.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Полугруппа T класса $\mathcal{J}_k$ имеет производящий оператор A и соответствующее R_n есть абсолютная $[-T(n)]$ - резольвента степени k оператора A; при этом справедливы соотношения:

а) $\mathcal{D}A^{k+1} \subset \Sigma$;

б) $\mathcal{D}A^{k+1+m} \subset \mathcal{D}A_0^m \ (m\in \mathcal{N})$;

в) $N_0 = \{0\}$;

г) $R_n(\lambda)|_{\mathcal{J}} = R_n^\circ|_{\mathcal{J}} \ (\lambda\in\Pi_0)$;

д) $R_n(\lambda)[H_1] \subset \mathcal{D}A_0 \ (\lambda\in\Pi_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование $A=\bar{A}_0$ следует из утверждения 2; при этом R_n есть $[-T(n)]$-резольвента A. Покажем, что $\mathcal{D}A^{k+1}\subset\Sigma$. Возьмём λ, $\mu\in\Pi_0$ и рассмотрим оператор $R = R_n^\circ(\lambda)R_n^k(\mu)$. Так как $R_n^k(\mu)X \subset \mathcal{D}A^k \subset \mathcal{J}$, то R определен на всём X; при этом $R = \lim_{\varepsilon\to+0} R_\varepsilon x$ для всякого $x\in X$, где

$$R_\varepsilon = \int_\varepsilon^n e^{-\lambda t}T(t)R_n^k(\mu)dt.$$

Очевидно, $R_\varepsilon \in L(X)$ $(\varepsilon \in (0,n))$ и для полунормы $p \in \mathcal{P}$

$$p(R_\varepsilon x) \le \int_0^n p(T(t)R_n^k(\mu)x)dt,$$

т.е. в силу бочечности X семейство операторов $\{R_\varepsilon\}$ $(\varepsilon \in (0,n))$ эквинепрерывно. Так как $R_\varepsilon \to R$, то $R \in L(X)$. Далее, для $x \in X_0$ имеем

$$Rx = R_n^k(\mu)R_n^0(\lambda)x = R_n^k(\mu)R_n(\lambda)x = R_n(\lambda)R_n^k(\mu)x;$$

отсюда, с учётом $\bar{X}_0 = X$, получаем

$$R_n^0(\lambda)R_n^k(\mu) = R_n(\lambda)R_n^k(\mu). \tag{6}$$

Пусть теперь $x \in \mathcal{D}A^{k+1}$; так как $Ax \in \mathcal{J}$, то

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(u)Axdu \xrightarrow[s\to+0]{} \int_0^t T(u)Axdu,$$

т.е. существует предел $\lim\limits_{s\to+0} T(s)x = y$. Отсюда следует $T(s)x = T(s)y$ для $s > 0$ и, значит, $y \in \Sigma$, $x \in \mathcal{J}$ и $R_n^0(\lambda)x = R_n^0(\lambda)y$. Из (6) получаем теперь

$$R_n(\lambda)R_n^k(\mu)x = Rx = Ry = R_n(\lambda)R_n^k(\mu)y,$$

что в силу $T \in E$ означает $R_n^k(\mu)x = R_n^k(\mu)y$; так как R_n - n-резольвента и μ произвольно, то $x = y \in \Sigma$.

Далее, для $x \in \mathcal{D}A^{k+2}$, в силу а), $x \in \Sigma$ и $Ax \in \Sigma$, т.е., согласно утверждению 2, (2), ([4], утверждение 8 (4)) и (5),

$$x = \lambda R_n^0(\lambda)x - R_n^0(\lambda)Ax + e^{-n\lambda}T(n)x \in \mathcal{D}A_0;$$

для $m > 1$ б) доказывается по индукции.

Пусть теперь $x \in N_0$; тогда $y = R_n^{k+1}(\lambda)x \in N_0$. Однако $y \in \mathcal{D}A^{k+1} \subset \Sigma$, т.е. $y = \lim\limits_{t\to+0} T(t)y = 0$. Из соотношения

$$A_\lambda^{k+1} R_n^{k+1}(\lambda) = [I - e^{-n\lambda}T(n)]^{k+1}$$

следует теперь $x = A_\lambda^{k+1} y = 0$, т.е. $N_0 = \{0\}$.

Если $x \in \mathcal{J}$, то для произвольного $t \in R^+$, очевидно, $T(t)R_n(\lambda)x = T(t)R_n^0(\lambda)x$, т.е. $R_n(\lambda)x - R_n^0(\lambda)x \in N_0 = \{0\}$.

Свойство д) теперь следует из г) и (5).

Наконец, заметим, что для $x \in \mathcal{D}A^k \subset \mathcal{J}$

$$\rho(R_n(\lambda)x) = \rho\left(\int_0^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\right) \le \int_0^n \rho(T(t)x)\,dt,$$

т.е. R_n есть n- резольвента степени k ; при этом

$$R_n(\lambda)x = \int_0^n e^{-\lambda t}y(t)x\,dt$$

для $x \in \mathcal{D}A^{k+3} \subset \mathcal{D}A_0^2$, где $T(\cdot)x$, очевидно, удовлетворяет условиям утверждения I, т.е.

$$y(t) = (2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a} e^{\lambda t}R_n(\lambda)x\,d\lambda = T(t)x \quad (t \in (0,n)).$$

Итак, R_n - абсолютная n-резольвента A . Утверждение доказано.

Следующее утверждение даёт характеристику $\mathcal{D}A$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если $T \in \mathcal{J}_{k_t}$, то

а) для $x \in \mathcal{D}A^{k+1}$ $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\,ds \quad (t > 0)$;

б) $\mathcal{D}A = \{x \in X \mid \exists y \in X: \forall t, \lambda \in R^+ \; R_n^k(\lambda)(T(t)x - x) = \int_0^t T(s)R_n^k(\lambda)y\,ds\}$,

при этом $Ax = y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Достаточно заметить, что для $h > 0$

$$T(h)(T(t)x - x) = \int_h^{t+h} T(s)Ax\,ds = T(h)\int_0^t T(s)Ax\,ds.$$

б) Если $x \in \mathcal{D}A$, то $R_n^k(\lambda)x \in \mathcal{D}A^{k+1}$ и, согласно а),

$$T(t)R_n^k(\lambda)x - R_n^k(\lambda)x = \int_0^t T(s)R_n^k(\lambda)Ax\,ds;$$

если ещё

$$T(t)R_n^k(\lambda)x - R_n^k(\lambda)x = \int_0^t T(s)R_n^k(\lambda)y\,ds, \tag{7}$$

то для всякого $t > 0$

$$T(t)(R_n^k(\lambda)Ax - R_n^k(\lambda)y) = \lim_{h \to +0} h^{-1}\int_t^{t+h} T(s)R_n^k(\lambda)(Ax - y)\,ds = 0,$$

т.е. $R_n^k(\lambda)(Ax - y) = 0$, что в силу произвольности $\lambda > 0$ означает $y = Ax$. Обратно, пусть для некоторого $x \in X$

выполнено (7); покажем, что $x \in \mathcal{D}A$. Так как $R_n(\lambda)x \in \mathcal{D}A$, то из (7) получаем $AR_n^{k+1}(\lambda)x = R_n^{k+1}(\lambda)y \in \mathcal{D}A^{k+1}$, т.е.

$$A^i R_n^{k+1}(\lambda)x \in \mathcal{D}A^{k+2-i} \quad (i=1,\dots,k+1). \tag{8}$$

Далее, из (7) несложно получить

$$T(n)x \in \mathcal{D}A_0 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{9}$$

Теперь из соотношения

$$x = A_\lambda^{k+1} R_n^{k+1}(\lambda)x - \sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^i (-e)^{-ni} T(in)x$$

с учётом (8) и (9) получаем $x \in \mathcal{D}A$. Утверждение доказано.

Дадим характеристику классам $\mathcal{J}_k$ в терминах производящего оператора.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Полугруппа T, у которой $\overline{X_0} = X$, принадлежит классу $\mathcal{J}_k$ тогда и только тогда, когда у неё существует производящий оператор A, имеющий абсолютную n-резольвенту степени k и такой, что $\mathcal{D}A^k \subset \mathcal{J}$ (что равносильно абсолютной непрерывности T в нуле на $\mathcal{D}A^{k+1}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий уже доказана. Покажем их достаточность. Пусть (4) выполнено для $x \in \mathcal{D}A^{d+k+2}$; тогда для $x \in \mathcal{D}A_0^{d+k+2}$ получаем

$$R_n^0(\lambda)x - e^{-n\lambda}y(n)R_n^0(\lambda)x = R_n(\lambda)A_\lambda R_n^0(\lambda)x = R_n(\lambda)x - e^{-n\lambda}R_n(\lambda)T(n)x.$$

Согласно утверждению I, из (10) имеем:

$$T(t)x = (2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a} e^{\lambda t}R_n^0(\lambda)x\,d\lambda = (2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a} e^{\lambda t}R_n(\lambda)x\,d\lambda = y(t)x$$

для всех $t \in (0,n)$, откуда

$$R_n^0(\lambda)x = \int_0^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = \int_0^n e^{-\lambda t}y(t)x\,dt = R_n(\lambda)x.$$

Пусть теперь $x = T(s)y$, $s > 0$ и $y_\xi \to y$, где $y_\xi \in \mathcal{D}A_0^{d+k+2}$; тогда $T(s)y_\xi \in \mathcal{D}A_0^{d+k+2}$ и $T(s)y_\xi \to x$. Так как семейство

$\{T(\cdot t)\}$ ($t\in[s, n+s]$) эквинепрерывно, то

$$R_n'(\lambda)x = \lim_{\xi} R_n(\lambda)T(s)y_\xi = \lim_{\xi}\int_0^n e^{-\lambda t}T(t+s)y_\xi\,dt = \int_0^n e^{-\lambda t}T(t+s)y\,dt = R_n^{\circ}(\lambda)x.$$

Из соотношения $\bigcap_{\lambda>0}[R_n(\lambda)]^{-1}[0]=\{0\}$ следует теперь, что $T\in E$. Если $\mathcal{D}A^k\subset\mathcal{J}$, то $T\in\mathcal{J}_k$. При этом, согласно утверждению 4(а), для $x\in\mathcal{D}A^{k+1}$ имеем

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(u)Ax\,du,\quad t>s\geq 0,$$

откуда, в силу $Ax\in\mathcal{J}$, следует абсолютная непрерывность $T(\cdot)x$ на $[0,1]$. Обратно, если для $x\in\mathcal{D}A^{k+1}$ функция $T(\cdot)x$ абсолютна непрерывны в нуле, то $T(\cdot)Ax = T^{(1)}(\cdot)x$ -абсолютно суммируемая в нуле функция. Если $x\in\mathcal{D}A^k$, то из включений $R_n(\lambda)x\in\mathcal{D}A^{k+1}\subset\mathcal{J}$ и $AR_n(\lambda)x\in\mathcal{J}$ получаем

$$x = \lambda R_n(\lambda)x - AR_n(\lambda)x + e^{-\lambda n}T(n)x\in\mathcal{J}.$$

Выясним теперь, когда замкнутый оператор порождает полугруппу класса $\mathcal{J}_k$. Будем считать X полным.

ТЕОРЕМА I. *Линейный замкнутый оператор A с плотной в X областью определения порождает полугруппу T класса $\mathcal{J}_k$ тогда и только тогда, когда у него существует абсолютная резольвентная последовательность $\{R_n\}$ степени k, такая, что для каждой полунормы $p\in\mathcal{P}$ можно указать непрерывную функцию $\varphi_p: R^+\times X\to\overline{R^+}$, обладающую свойствами:*

а) *для $x\in\mathcal{D}A^k$ функция $\varphi_p(\cdot, x)$ суммируема в нуле;*

б) $\varphi_p(t,0)=0\ (t\in R^+)$;

в) *для $x\in\mathcal{D}A^{k+2}$, $\lambda>0$ и $m\in\mathfrak{N}$*

$$p(R_n^{(m)}(\lambda)x)\leq\int_0^n e^{-\lambda t}t^m\varphi_p(t,x)\,dt.$$

При этом $p(T(t)x) \le \varphi_p(t,x)$ $(t \in R^+,\ x \in X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если $T \in \mathcal{J}_k$, то соответствующее R_n есть абсолютная n-резольвента степени k производящего оператора A (утверждение 3); так как $R_n(\lambda)x = R_n^0(\lambda)x$ для $x \in \mathcal{D}A^k \subset \mathcal{J}$, то, понятно, функция $\varphi_p(t,x) = p(T(t)x)$ удовлетворяет нужным условиям.

Достаточность. Пусть $x \in \mathcal{D}A^{k+2}$ и $t \in (0,n)$; положим

$$T(t)x = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial \Pi_a} e^{\lambda t} R_n(\lambda) x \, d\lambda.$$

Согласно ([4], утверждение 6) с учётом условия в), получаем

$$p(T(t)x) = p\Big(\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda^2 t)^{m+1}}{m!\,(m+1)!} R_n^{(m)}(\lambda) m \le$$

$$\le \lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda^2 t)^{m+1}}{m!\,(m+1)!} \Big[\int_0^n e^{-\lambda s} \varphi_p(s,x)\, ds\Big]^{(m)} = \varphi_p(t,x).$$

(по поводу последнего равенства см. ([I], теорема 6.3.3.)). Из этой оценки, условия б) и непрерывности $\varphi_p(t,\cdot)$ следует непрерывность $T(t)$ по $x \in \mathcal{D}A^{k+2}$; в силу $\overline{\mathcal{D}A^{k+2}} = X$ можно считать $T(t) \in L(X)$. При этом справедлива оценка:

$$p(T(t)x) \le \varphi_p(t,x) \quad (t \in R^+,\ x \in X). \tag{II}$$

В силу непрерывности $\varphi_p(\cdot,x)$ по $t > 0$ из (II) следует ограниченность множества $\{T(t)x \mid t \in [\alpha,\beta]\}$ для любого $x \in X$, где $\beta > \alpha > 0$; в силу бочечности X семейство $\{T(t)\}$ $(t \in [\alpha,\beta])$ эквинепрерывно. Отсюда, ввиду непрерывности $T(\cdot)x$ для $x \in \mathcal{D}A^{k+2}$ (см. утверждение I из [4]), получаем сильную непрерывность T по $t > 0$. Из ([4], утверждение 3) следует теперь, что T - полугруппа. Пусть (4) выполнено для $d \in \mathcal{N}$; для $x \in \mathcal{D}A^{d+k+2}$ имеем

$$R_n(\lambda)x = \int_0^n e^{-\lambda t} T(t)x\, dt. \tag{I2}$$

Как и в утверждении 5, показываем, что (I2) выполнено для $x \in X_0$. Так как, очевидно, $\bigcap [R_n(\lambda)]^{-1}[0] = \{0\}$ и, в силу ([4], (6)), $\lambda R_n(\lambda)x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{\lambda > 0} x$ для $x \in \mathcal{D}A^{d+k+2}$, что, согласно (12), означает $X = \overline{\mathcal{D}A^{k+d+2}} \subset \overline{X}_o$, то $T \in E$. Согласно утверждению 2, у T есть производящий оператор B и R_n есть $[-T(n)]$ - резольвента B. Однако R_n есть $[-T(n)]$ - резольвента A, что означает, $A = B$. Наконец, в силу (11) и условия а), $\mathcal{D}B^k = \mathcal{D}A^k \subset \mathcal{J}$, т.е. $T \in \mathcal{J}_k$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если в условиях теоремы потребовать секвенциальную плотность $\mathcal{D}A$, то от X достаточно секвенциальной полноты.

2) Теорема остаётся справедливой, если условия налагать не произвольную n-резольвенту A (конечной степени, не обязательно равной k), а от абсолютной n-резольвенты требовать лишь существования.

3) В случае, если X - банахово пространство, теорема может быть сформулирована в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2. Линейный замкнутый оператор A порождает полугруппу T класса $\mathcal{J}_k$ тогда и только тогда, когда

1) $\mathcal{D}A$ плотно в X;

2) для некоторого ω Π_ω содержится в резольвентном множестве A и для каждого $x \in \mathcal{D}A^k$ множество $\{R(\lambda, A)x \mid \lambda \in \Pi_\omega\}$ ограничено;

3) существуют непрерывная функция $\varphi: R^+ \times X \to \overline{R^+}$ и функция $\psi: R^+ \to \overline{R^+}$, такие, что

а) $\varphi(t, x) \leq \psi(t) \| x \| \quad (t \in R^+,\ x \in X)$,

б) $\int_0^\infty e^{-\omega t} \varphi(t, x)\, dt < +\infty \quad (x \in \mathcal{D}A^k)$,

в) $\| R^{(m)}(\lambda, A)x \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^m \varphi(t, x)\, dt$

для всех $x \in \mathcal{D}A^{k+2}$, $\lambda > \omega$, $m \in \mathbb{N}$. При этом $\| T(t)x \| \leq \varphi(t, x)$, $\| T(t) \| \leq \psi(t)$ $(t \in R^+,\ x \in X)$.

5. Теперь мы можем просто получить свойства полугрупп класса L. Напомним, что $T \subset L$, если

1) $\overline{X}_o = X$; 2) $\mathcal{J} = X$; 3) $N_o = \{0\}$.

Отметим прежде всего, что для полугруппы T класса L, очевидно, $R_n^0(\lambda) \in L(X)$, причем множество $\bigcap_{\lambda>0} [R_n^0(\lambda)]^{-1}[0]$ содержится в $N_0 = \{0\}$, т.е. $T \in \mathcal{J}_0$. Обратно, если $T \in \mathcal{J}_0$, то условия I) и 2) вытекают из определения $\mathcal{J}_0$; условие 3) следует из утверждения 3(в). Итак, мы доказали $L = \mathcal{J}_0$. Из утверждений 3 и 4 получаем следующие свойства $\mathcal{D}A$ (см. [2], [3]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $T \in L_t$; тогда

а) для $x \in \mathcal{D}A$ $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\,ds$ $(t \in R^+)$;

б) если для всех $t \in R^+$ $T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds$, то $x \in \mathcal{D}A$ и $Ax = y$;

в) $\mathcal{D}A \subset \Sigma$;

г) $\mathcal{D}A^{m+1} \subset \mathcal{D}A_0^m$ $(m \in \mathbb{N})$.

Утверждение 5 позволяет дать следующую характеристику классу L.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Для полугруппы T, у которой $\bar{X}_0 = X$, следующие условия эквивалентны:

а) $T \in L$;

б) T суммируема в нуле и имеет производящий оператор;

в) T имеет производящий оператор A с абсолютной R_n и абсолютно непрерывна на $\mathcal{D}A$.

В силу замечания 2 к теореме I, условия порождения для класса L, благодаря суммируемости полугруппы в нуле, можно формулировать в терминах произвольной n-резольвенты (надо лишь воспользоваться ([4], утверждением 5)).

ТЕОРЕМА 3. Линейный замкнутый оператор A с секвенциально плотной (плотной, если X полно) в X областью определения порождает полугруппу T класса L тогда и только тогда, когда у него существует регулярная резольвентная последовательность $\{R_n\}$, такая, что для каждой полунормы $p \in \mathcal{P}$ можно указать непрерывную функцию φ_p: $R^+ \times X \to \overline{R^+}$, для которой $\varphi(t,0)=0 (t \in R^+)$, функция $\varphi(\cdot, x)$ суммируема в нуле и справедливы оценки:

$$\rho(R_n^{(m)}(\lambda)x) \leqslant \int_0^n e^{-\lambda t} t^m \varphi_p(t,x)dt \ (x \in \mathcal{D}A^2, m \in \overline{N}, \lambda \in R^+).$$

При этом $\rho(T(t)x) \leqslant \varphi_p(t,x)$ $(t \in R^+, x \in X)$.

В случае, когда X - банахово пространство, теорема 2 превращается в соответствующую теорему из [2].

6. Рассмотрим полугруппы с абелевской сходимостью в нуле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Полугруппу T отнесём к классу $A_{(k)}$, если

I) $T \in \mathcal{J}_k$;

2) для каждого $x \in X$ $\lambda R_n(\lambda)x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} x$.

Заметим, что условие 2) обеспечивает секвенциальную плотность $\mathcal{D}A$, что позволяет воспользоваться теоремой I для секвенциально полного X.

ТЕОРЕМА 4. Линейный замкнутый оператор A порождает полугруппу T класса $A_{(k)}$ тогда и только тогда, когда

I) $\mathcal{D}A$ плотно в X;

2) существует абсолютная резольвентная последовательность $\{R_n\}$ степени k оператора A, удовлетворяющая условиям теоремы I;

3) семейство операторов $\{\lambda R_n(\lambda)\}$ $(\lambda \in R^+)$ - эквинепрерывно.

Нетрудно видеть, что $A_{(0)} = A_0$; теорема 4 при $k=0$ превращается в соответствующую теорему из [3].

7. Введём в рассмотрение следующий класс полугрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Полугруппа T принадлежит классу E_0, если

I) $T \in E$;

2) соответствующее семейство операторов $\{R_n(\lambda)\}$ ($\lambda \in \Pi_0$) эквинепрерывно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Полугруппа T, у которой $\overline{X}_0 = X$, принадлежит классу E_0 тогда и только тогда, когда у неё есть производящий оператор, имеющий абсолютную регулярную n-резольвенту. При этом справедливы свойства:

а) $\mathcal{D}A^2 \subset \Sigma$;

б) $\mathcal{D}A^{m+2} \subset \mathcal{D}A_0^m$ $(m \in \mathbb{N})$;

в) $N_0 = \{0\}$;

г) $R_n(\lambda)|_{\mathcal{I}} = R_n^0(\lambda)|_{\mathcal{I}}$ $(\lambda \in \Pi_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T \in E_0$. Из $T \in E$ следует, что существует $A = \overline{A}_0$ и R_n - регулярная $[-T(n)]$-резольвента A. Докажем а). Для $x \in \mathcal{D}A^2$ положим $y = (A_\lambda)^2_x$ и найдём $y_\xi \in \mathcal{D}A_0^2$, такие, что $y_\xi \to y$. В силу утверждения 2 (2) и (5), $R_n(\lambda) y_\xi = R_n^0(\lambda) y_\xi \in \mathcal{D}A_0$ и, значит, $R_n^2(\lambda) y_\xi = R_n^0(\lambda) R_n(\lambda) y_\xi \in \mathcal{D}A_0$. Так как, очевидно, $A_0 R_n^2(\lambda) y_\xi = R_n^2(\lambda) A_0 y_\xi$, где $A_0 y_\xi \in \mathcal{D}A_0$, то по той же причине $A_0 R_n^2(\lambda) y_\xi \in \mathcal{D}A_0$, т.е. $x_\xi = R_n^2(\lambda) y_\xi \in \mathcal{D}A_0^2$. Далее, из соотношения

$$(A_\lambda)^2 R_n^2(\lambda) = I + e^{-n\lambda} z(n,\lambda),$$

где $z(n,\lambda) = -2T(n) + e^{-n\lambda} T(2n)$, получаем

$$x = R_n^2(\lambda) y - e^{-n\lambda} z(n,\lambda) x.$$

Отсюда следует

$$x_\xi \to x + e^{-n\lambda} z(n,\lambda) x,$$

$$A x_\xi = A R_n^2(\lambda) y_\xi \to A R_n^2(\lambda) y = Ax + e^{-n\lambda} z(n,\lambda) A x,$$
$$A^2 x_\xi = A^2 R_n^2(\lambda) y_\xi \to A^2 R_n^2(\lambda) y = A^2 x + e^{-n\lambda} z(n,\lambda) A^2 x.$$

Так как для $x_\xi \in \mathcal{D}A_0^2 \subset \Sigma$

$$R_n(\lambda) x_\xi = \int_0^n e^{-\lambda t} T(t) x_\xi \, dt,$$

где $T(\cdot)x_\xi$ удовлетворяет условиям утверждения I, то для $t\in(0,n)$

$$T(t)x_\xi = x_\xi + tAx_\xi + I_2^n(t,x_\xi).$$

Так как в силу эквинепрерывности $\{R_n(\lambda)\}$ $(\lambda\in\Pi_0)$

$$I_2^n(t,x_\xi)=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}\frac{e^{\mu t}R_n(\mu)A^2x_\xi}{\mu^2}\,d\mu \to I_2^n(t,x+e^{-n\lambda}z(n,\lambda)x),$$

то из последнего равенства получаем для произвольного $\lambda\in\Pi_0$

$$[I+e^{-n\lambda}z(n,\lambda)](T(t)x-x-tAx-I_2^n(t,x))=0,$$

где семейство $\{z(n,\lambda)\}$ $(\lambda\in\Pi_0)$ ограничено, т.е.

$$T(t)x = x+tAx+I_2^n(t,x).$$

Из этого соотношения следует, что $T(t)x\to x$ при $t\to+0$. Итак, мы показали, что $\mathcal{D}A^2\subset\Sigma$; отсюда, по крайней мере, $T\in\mathcal{I}_2$. Из этих включений следует абсолютность n-резольвенты R_n и свойства б), в), г) (см. утверждение 3).

Обратно, если выполнены условия утверждения, то, как получено при доказательстве утверждения 5, в таком случае $T\in E$ и данная абсолютная n-резольвента есть расширение операторов $R_n^0(\lambda)$, заданных на X_0. Так как n-резольвента регулярна, то $T\in E_0$. Утверждение доказано.

Из теоремы I и утверждения 8 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 5. Линейный замкнутый оператор A с секвенциально плотной (плотной, если X полно) в X областью определения порождает полугруппу T класса E_0 в том и только том случае, когда у него есть регулярная абсолютная резольвентная последовательность $\{R_n\}$, такая, что для всякой полунормы $p\in\mathcal{P}$ можно указать непрерывную функцию $\varphi_p : R^+\times X\to\overline{R}^+$, обладающую свойствами:

а) $\varphi_p(t,0)=0$ $(t\in R^+)$;

б) для $x\in\mathcal{D}A^2$ функция $\varphi_p(\cdot,x)$ суммируема в нуле и для всех $\lambda>0$, $k\in\mathbb{N}$

$$\cdot\, p(R_n^{(k)}(\lambda)x) \le \int_0^n e^{-\lambda t} t^k \varphi_p(t,x)\,dt.$$

П р и   э т о м $p(T(t)x) \le \varphi_p(t,x)$ $(t \in R^+, x \in X)$.

8. Рассмотрим, наконец, следующий класс полугрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Полугруппа T принадлежит классу A, если

1) $\overline{X}_o = X$;

2) для каждого $\lambda \in \Pi_o$ существует оператор $R_n(\lambda) \in L(X)$ такой, что $R_n(\lambda)x = R_n^o(\lambda)x$ для $x \in X_o$;

3) $\{R_n(\lambda)\}$ $(\lambda \in \Pi_o)$ – эквинепрерывное семейство;

4) для каждого $x \in X$ $\lambda R_n(\lambda)x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} x$.

Очевидно, в случае банахова пространства этот класс совпадает с известным классом (A) (см. [I]). Нетрудно видеть, что $A = E_o \cap A_{(1)}$. Отсюда и из теорем 4 и 5 непосредственно вытекает следующая теорема, обобщающая на случай л.в.п. теорему Филлипса [I].

ТЕОРЕМА 6. Л и н е й н ы й   з а м к н у т ы й   о п е р а т о р A п о р о ж д а е т   п о л у г р у п п у T к л а с с а A т о г д а   и   т о л ь к о   т о г д а, к о г д а

а) $\mathcal{D}A$ п л о т н о   в X;

б) с у щ е с т в у е т   а б с о л ю т н а я   р е г у л я р н а я   р е з о л ь в е н т н а я   п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь $\{R_n\}$ о п е р а т о р а A;

в) $\{\lambda R_n(\lambda)\}$ $(\lambda > 0)$ – э к в и н е п р е р ы в н о е   с е м е й с т в о;

г) д л я   в с я к о й   п о л у н о р м ы $p \in \mathcal{P}$ н а й д е т с я   н е п р е р ы в н а я   ф у н к ц и я $\varphi: R^+ \times X \to \overline{R^+}$, у д о в л е т в о р я ю щ а я   у с л о в и я м   а)   и   б)   т е о р е м ы   5.

П р и   э т о м $p(T(t)x) \le \varphi_p(t,x)$ $(t \in R^+, x \in X)$. Е с л и   д л я   к а ж д о г о $x \in X$ м н о ж е с т в о $\{\varphi_p(t,x) \mid t \in [0,1]\}$ о г р а н и ч е н о,   т о $T \in C_o$ (т.е. непрерывна в нуле).

В заключение автор выражает благодарность Ю.М.Вувуникяну за обсуждение результатов работы.

Литература

1. ХИЛЛЕ Э., ФИЛЛИПС Р. Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1963.
2. ЗАБРЕЙКО П.П., ЗАФИЕВСКИЙ А.В. Об одном классе полугрупп. - "Докл. Ан СССР", 1969, 189, № 5, с. 934-937.
3. ИВАНОВ В.В. Резольвентная последовательность в вопросах порождения суммируемых полугрупп операторов. - "Докл. АН. СССР", 1973, т. 213, № 2, с. 282-285.
4. ИВАНОВ В.В. n-резольвента и чезаровские классы полугрупп в локально выпуклом пространстве.- В кн.: Оптимизация. Вып. 14(31), Новосибирск, 1974, с.142-164.

Поступила в ред.-изд. отд.

25. У. 1973 г.