1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Выпуклый анализ

УДК 517.2

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕВОЗОК МЕРЫ ЛЕБЕГА С ПЛОТНОСТЯМИ

Н.П.Ехлаков

§ I. Задача о существовании оптимальной перевозки меры Лебега с плотностью

В статье [I] рассмотрен следующий вариант транспортной задачи.

ЗАДАЧА I. На метрическом компакте (X,d) даны конечные ≥ 0 борелевские меры (и только такие меры рассматриваются в нашей работе) μ_1 и μ_2 такие, что $\mu_1(X)=\mu_2(X)$. Пусть множество Ψ_{μ_1,μ_2} состоит из всех мер ψ на $X\times X$ таких, что для любого борелевского множества (и только такие множества будут рассматриваться в нашей работе) $e\subset X$

$$\psi(e\times X)=\mu_1(e),\quad \psi(X\times e)=\mu_2(e).$$

Требуется найти

$$\inf_{\psi\in\Psi_{\mu_1,\mu_2}}\int_{X\times X} d(x,y)\,d\psi(x,y).$$

В статье [I] доказано, что инфимум задачи I достигается, причем на такой и только такой (но не обязательно единственной) мере $\psi\in\Psi_{\mu_1,\mu_2}$, для которой существует функция $v: X\to R^1$ такая, что

$$\forall x,y\in X \qquad v(y)-v(x)\leq d(x,y). \tag{I}$$

если для любых окрестностей V точки x и W точки y (2)
$\psi(V\times W)>0$, то $v(y)=v(x)+d(x,y)$.

Элементы множества Ψ_{μ_1,μ_2} называются перевозками меры μ_1 в меру μ_2. Если окрестности некоторых точек x, y обладают тем свойством, которым начинается (2), то можно говорить, что происходит перевозка μ_1 из точки x в μ_2 в точке y. Перевозка $\psi \in \Psi_{\mu_1,\mu_2}$ называется оптимальной, если существует функция $v: X \to R^1$, обладающая свойствами (I) и (2).

Из задачи I вытекает задача 2, которой и посвящена наша работа.

ЗАДАЧА 2. Пусть $d\lambda_n$ есть мера Лебега в R^n и пусть для компактов $A, B \subset R^n$

$$0 < d\lambda_n(A) = d\lambda_n(B).$$

Положим $X = A \cup B$, за μ_1 (соотв., μ_2) возьмем сужение $d\lambda_n$ на A (соотв., B). Мы находимся в условиях задачи I, имеющей решение. Теперь требуется указать оптимальные перевозки вида

$$\psi(e \times e') = d\lambda_n(e' \cap \Delta(e)), \quad e \times e' \subset A \times B, \tag{3}$$

где Δ есть взаимно-однозначное отображение почти всего A на почти все B такое, что

$$d\lambda_n(e) = d\lambda_n(\Delta(e)), \quad e \subset A.$$

Перевозки вида (3) называются перевозками с плотностями. Если $A = B$, то $\Delta(x) = x$, поэтому мы ниже до § 7 считаем, что $A \neq B$.

Изложим план работы. С помощью функции v из задачи I естественно определяются некие прямолинейные отрезки, именуемые линиями тока оптимальной перевозки (см., например, [2]). Самые простые свойства линий тока собраны в § 2. В § 5 мы доказываем, что по любой оптимальной перевозке можно указать оптимальную перевозку с плотностью и с теми же линиями тока. Задача о построении такой перевозки делается относительно простой с начала § 4, где мы доказываем, что концевые точки линий тока пренебрежимы для меры $d\lambda_n$. Доказательство этого важного результата подготавливается в § 3. Подготовка вывода основного результата проведена во второй половине § 4. В § 6 мы указываем на небольшое своеобразие задачи 2 на плоскости. В § 7, опираясь на основной результат, мы доказываем существование изометрий для некоторых пар $(L^p(f_1 d\lambda_n), L^p(f_2 d\lambda_n))$. По-видимому, это очень старый результат, потому что его публикации нам не встречались.

Условимся о некоторых обозначениях. Через $d\lambda_n$ обозначается мера Лебега в R^n. Если дан вектор $\tau \in R^n \setminus \{0\}$, то на любой гиперплоскости, ортогональной к τ, можно определить меру Лебега $d\lambda_{n-1}$; пусть $\langle \cdot | \cdot \rangle$ означает евклидово скалярное произведение, $H_s = \{x \in R^n : \langle x | \tau \rangle = s\}, e \subset R^n, e_s = e \cap H_s$, тогда

$$d\lambda_n(e) = \int_{R^1} d\lambda_{n-1}(e_s)\,ds,$$

откуда и определяем $d\lambda_{n-1}$. Через $|x-y|$, $x, y \in R^n$, обозначается евклидово расстояние. Если $x \in X \subset R^n$, то через $\mathcal{V}_x$ обозначается совокупность всех окрестностей точки x в топологии, индуцированной на X евклидовой топологией R^n. Если X и Y есть топологические пространства, то через $C(X;Y)$ обозначим множество всех непрерывных отображений $X \to Y$. Если X компактно, то $C(X;R^1) = C(X)$ и $C(X)$ снабжается обычной $\sup$-нормой. Если мера ν абсолютно непрерывна по мере μ, то по теореме Радона-Никодима $d\nu = g\,d\mu$, $g \in L^1_{loc}(\mu)$, что, как известно, означает, что

$$\forall f \in L^1(\nu) \qquad \int f\,d\nu = \int f g\,d\mu \; (= \mu(fg)).$$

Автор признателен Г.Ш.Рубинштейну за сообщение задачи 2.
Автор благодарен Р.Р.Акбердину и Н.А.Липатниковой за помощь в подготовке работы к публикации.

§ 2. Существование и основные свойства линий тока

Итак, пусть поставлена задача 2, пусть ψ есть оптимальная перевозка меры $d\lambda_n$ с A на B, а $v : A \cup B \to R^1$ есть функция, обладающая свойствами (1) и (2) из § 1. Зафиксируем ситуацию до конца § 5.

Предположим, что доказано утверждение " A обладает свойством Π ", и в доказательстве использовано лишь то, что $v(y) = v(x) + |x-y|$, если ψ перевозит $d\lambda_n$ из $x \in A$ в $y \in B$. Тогда $-v(x) = -v(y) + |x-y|$, если ψ перевозит $d\lambda_n$ из $y \in B$ в $x \in A$, и поэтому можно доказать, что " B обладает свойством Π ". Если это доказательство будет простым, то мы будем заменять его словами "в силу симметричных соображений".

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $K \subset R^1$ есть компакт, а функция $w: K \to R^1$ такова, что

$$\forall x, y \in K \quad w(x) - w(y) \le |x-y|, \tag{4}$$

а для $a = \inf K$ и $b = \sup K$.

$$w(a) = a, \ w(b) = b. \tag{4'}$$

Тогда $\forall x \in K \quad w(x) = x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $x \in K$ в силу (4) и (4')

$$w(x) - a \le x - a, \ b - w(x) \le b - x,$$

откуда $w(x) \le x$, $-w(x) \le -x$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Значок $\square$ заменяет всюду в работе слова "доказательство закончено".

Вернемся к нашей задаче. Пусть $x \in A$, $y \in B$, $v(y) = v(x) + |x-y|$. Из предложения I легко следует, что функцию можно продолжить с множества $(A \cup B) \cap [x,y]$ ($[x,y]$ есть замкнутый прямолинейный отрезок с концами x и y) на весь отрезок $[x,y]$ по одной из формул

$$v(t) = v(x) + |x-t|, \tag{5}$$

$$v(t) = v(y) - |y-t|, \ t \in [x,y], \tag{6}$$

и это продолжение будет единственно при условии $v(t_1) - v(t_2) \le |t_1 - t_2|$, $t_1, t_2 \in [x,y]$. Очевидно, что в выпуклой оболочке множества $A \cup B$ найдется самый длинный отрезок $[\xi, \eta]$ со свойствами (а) $\xi \in A$, $\eta \in B$, (б) $[x,y] \subset [\xi, \eta]$, (в) $v(\eta) = v(\xi) + |\xi - \eta|$. Назовем этот отрезок линией тока с началом ξ и концом η.

ЗАМЕЧАНИЕ. Всегда, говоря, что $[\xi, \eta]$ есть линия тока, мы будем подразумевать, что $\xi \in A$ есть ее начало, а $\eta \in B$ - конец.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть даны линии тока $[\xi_i, \eta_i]$ и точки $x_i \in [\xi_i, \eta_i]$, $i = 1,2$. Тогда $|v(x_1) - v(x_2)| \le |x_1 - x_2|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5) и (6) имеем:

$$v(x_1) = v(\eta_1) - |\eta_1 - x_1|, \ v(x_2) = v(\xi_2) + |x_2 - \xi_2|.$$

Поэтому неравенство $v(x_1)-v(x_2)\le |x_1-x_2|$ следует из неравенства

$$v(\eta_1)-v(\xi_2)\le|\eta_1-\xi_2|\le|x_1-x_2|+|\eta_1-x_1|+|x_2-\xi_2|,$$

верного в силу неравенств:

$$|\eta_1-\xi_2|\le|\eta_1-x_1|+|x_1-\xi_2|,$$

$$|x_1-\xi_2|\le|x_1-x_2|+|x_2-\xi_2|.$$

Осталось поменять местами индексы 1 и 2. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, если $t\in[\xi_1,\eta_1]\cap[\xi_2,\eta_2]$, то $v(\xi_1)+|t-\xi_1|=v(\xi_2)+|t-\xi_2|$. Это означает корректность продолжения функции v на объединение всех линий тока, обозначаемое буквой T.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $i=1,2$ и даны линии тока $[\xi_i,\eta_i]$. Пусть $x_i, y_i\in[\xi_i,\eta_i]$, $|x_i-\xi_i|\le|y_i-\xi_i|$. Тогда

$$|y_1-x_1|+|y_2-x_2|\le|y_1-x_2|+|y_2-x_1|. \qquad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2 и по определению линий тока

(а) $v(y_1)-v(x_1)=|y_1-x_1|$,

(б) $v(y_2)-v(x_2)=|y_2-x_2|$,

(в) $v(y_1)-v(x_2)\le|y_1-x_2|$,

(г) $v(y_2)-v(x_1)\le|y_2-x_1|$.

Почленно сложим (а) с (б) и (в) с (г). □

ЗАМЕЧАНИЕ. Обычно (7) будет использоваться для случая $x_i=\xi_i$, $y_i=\eta_i$, $i=1,2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если линии тока $[\xi_i,\eta_i]$, $i=1,2$, различны и имеют общую точку, то либо $\xi_1=\xi_2$, либо $\eta_1=\eta_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если, например, $\xi_1=\eta_1$, то на самом деле дана лишь одна линия тока, поэтому $|\xi_i-\eta_i|>0$, $i=1,2$. Допустим, что $\{x_0\}=[\xi_1,\eta_1]\cap[\xi_2,\eta_2]$, причем $x_0\ne\xi_i$, $\ne\eta_i$, $i=1,2$. Тогда вопреки (7)

$$|\xi_1-\eta_2|+|\xi_2-\eta_1|<|\xi_1-x_0|+|x_0-\eta_2|+|\xi_2-x_0|+$$
$$+|x_0-\eta_1|=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|.$$

Теперь допустим, что $\xi_2 \in [\xi_1, \eta_1]$, $\xi_2 \neq \xi_1$. Тогда, ввиду различности линий тока,

$$|\xi_2-\eta_1|+|\xi_1-\eta_2|<|\xi_2-\xi_1|+|\xi_2-\eta_2|+|\xi_2-\eta_1| =$$
$$=|\xi_2-\eta_2| + |\xi_1-\eta_1|$$

тоже вопреки (7). По симметричным соображениям ложно утверждение $\eta_2 \in [\xi_1, \eta_1]$, $\eta_2 \neq \eta_1$. □

Теперь до конца работы будем считать, что $d\lambda_n$ имеет на A и на B невырожденные распределения. Например, для A это значит, что

$$\forall x \in A \quad \forall V \in \mathcal{V}_x \quad d\lambda_n(V)>0.$$

Как мы сейчас увидим, такое условие диктуется существом дела.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. $A \cup B \subset T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in B \setminus T$, то

$$\forall x \in A \quad \exists V_x \in \mathcal{V}_x \quad \exists W_x \in \mathcal{V}_x \quad \psi(V_x \times W_x)>0.$$

Так как A компактно, то существуют $x_1, \dots, x_s \in A$ такие, что

$$A = \bigcup_{1 \le i \le s} V_{x_i}.$$

Положив

$$W = \bigcap_{1 \le i \le s} W_{x_i},$$

получим

$$d\lambda_n(W) = \psi(A \times W) \le \sum_{1 \le i \le s} \psi(V_{x_i} \times W_{x_i}) = 0,$$

что противоречит невырожденности распределения $d\lambda_n$ на B. Значит, $B \subset T$. По симметричным соображениям $A \subset T$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Итак, линий тока достаточно много, и лишних среди них нет. Это значит, что для каждой линии тока $[\xi, \eta]$, для каждого $x \in A \cap [\xi, \eta]$ существует $y \in B \cap [\xi, \eta]$, такой, что ψ перевозит $d\lambda_n$ из x в y, и обратно, для каждого $y \in B \cap [\xi, \eta]$ можно найти $x \in A \cap [\xi, \eta]$ такой, что ψ перевозит $d\lambda_n$ из x в y.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. М н о ж е с т в о T к о м п а к т н о.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что T есть ограниченное множество. Пусть даны линии тока $[\xi_m, \eta_m]$, содержащие точки x_m, причем $\xi_m \to \xi_0$, $\eta_m \to \eta_0$, $x_m \to x_0$, $m \to \infty$. Тогда $x_0 \in [\xi_0, \eta_0]$, а по непрерывности функции

$$v(\eta_0) - v(\xi_0) = |\xi_0 - \eta_0|.$$

Если $\xi_0 \neq \eta_0$, то $x_0 \in [\xi_0, \eta_0]$ содержится в некоторой линии тока. Если $\xi_0 = \eta_0 = x_0$, то тем более $x_0 \in A \subset T$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Ссылаясь на предложение 6, мы часто будем иметь в виду метод рассуждения: сходятся начала и концы линий тока, по непрерывности функции v существует линия тока, содержащая предельный отрезок.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть даны линия тока $[\xi, \eta]$ и точка $x \in (\xi, \eta)$. Тогда при каждом числе $\epsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что если линия тока $[\xi_1, \eta_1]$ пересекается с δ-окрестностью точки x, то $[\xi_1, \eta_1]$ содержится в ϵ-окрестности линии $[\xi, \eta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Пусть $\delta_m \to 0, m \to \infty$, а $[\epsilon_m, \eta_m]$ есть линии тока такие, что $[\xi_m, \eta_m]$ пересекается с δ_m-окрестностью точки x и выходит из ϵ-окрестности линии $[\xi, \eta]$. По предложению 6, существует линия тока $[\xi_0, \eta_0]$, которая содержит точку $x \in (\xi, \eta)$ и выходит из ϵ-окрестности линии $[\xi, \eta]$. По предложению 4, так не бывает. □

§ 3. Липшицево свойство линий тока

Пусть L есть гиперплоскость в R^n такая, что существует линия тока, пересекающая L в единственной точке, не служащей ни началом, ни концом этой линии тока. Через E_1 и E_2 обозначим открытые полупространства, порождаемые L. Пусть даны число $M > 0$ и векторы x_1, $x_2 \in R^n$ такие, что гиперплоскости $L_i = x_i + L \subset E_i$, $i = 1, 2$, удалены от L на расстояние M. Через (соотв., V_M^i, $i = 1, 2$) V_M обозначим объединение всех линий тока (соотв., имеющих начала в

E_i, $i=1,2$, и) пересекающих и L_1, и L_2. Множество $K_M=V_M\cap L$ (соотв., $K_M^i=V_M^i\cap L$, $i=1,2$) будем называть множеством следов на L линий тока из V_M (соотв., V_M^i, $i=1,2$). Если M достаточно мало, то $V_M\neq\emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. (а) V_M^i и K_M^i, $i=1,2$, компактны;
(б) $K_M^1\cap K_M^2=\emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) доказывается, как предложение 6. Если ложно (б), то либо у некоторых линий тока по два начала, что ложно по определению линий тока, либо существуют пары линий тока вида, скажем, $[\xi,\eta]$ и $[\xi_1,\eta_1]$. А для этих пар вопреки (7) $|\xi-\eta|+|\xi_1-\xi|>|\xi-\xi|+|\xi_1-\eta|$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Теперь можно рассматривать только K_M^1 и V_M^1 и подразумевать, что одновременно рассматриваются K_M^2 и V_M^2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Расстояние $a(y)$ (соотв., $b(y)$) от начала (соотв., конца) линии тока со следом y до y есть полунепрерывная сверху функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_m\in K_m^1$, $y_m\to y_0$; $[\xi_m,\eta_m]$ есть линия тока со следом y_m, $\xi_m\to\xi_0$, $\eta_m\to\eta_0$. По предложению 6, существует линия тока $[\xi,\eta]$, содержащая отрезок $[\xi_0,\eta_0]$. Тогда

$$\lim_m|\xi_m-y_m|=|\xi_0-\eta_0|\leq|\xi-y_0|$$

или

$$\lim_m a(y_m)\leq a(y_0).\ \square$$

Не теряя общности, можно считать, что $L=\{0\}\times R^{n-1}$, $0\in R^1$. Точки $(0,y)\in L$ можно отождествлять с точками $y\in R^{n-1}$. По определению V_M^1, имеем $\forall y\in K_M^1$ $a(y)\geq M\leq b(y)$ Пусть

$$E_1=\{(x,y)\in R^n: y\in R^{n-1}, x>0\}.$$

Положим

$$\Phi^1_{+,M}=\{(x,y)\in R^n: y\in K_M^1,\ 0\leq x<a(y)\},$$

$$\Phi^1_{-,M}=\{(x,y)\in R^n: y\in K_M^1, -b(y)<x\leq 0\}.$$

Всякий вектор $r=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ можно записать в сферических координатах:

$$x_1=|r|\cos\varphi_1,$$
$$x_2=|r|\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1}=|r|\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$
$$x_n=|r|\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-1},$$

где $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$ есть эйлеровы углы вектора r, причем $\varphi_1\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, потому что мы будем полагать, что $x_1>0$. Пусть дана линия тока $[\xi,\eta]\subset V_M^1$ со следом y и пусть $\varphi_1(y),\dots,\varphi_{n-1}(y)$ есть эйлеровы углы вектора $\xi-(0,y)$. Для $(x,y)\in R^1\times K_M^1$ положим

$$F_M^1(x,y)=(x\cos\varphi_1(y),y_2+x\sin\varphi_1(y)\cos\varphi_2(y),\dots$$
$$\dots,y_n+x\cos\varphi_1(y)\dots\sin\varphi_{n-1}(y)),\qquad(8)$$

где $(y_2,\dots,y_n)=y$; ясны следующие факты:

$$F_M^1(0,y)=(0,y);$$

вектор $F_M^1(a(y),y)-(0,y)$ имеет ту же длину, ту же первую координату и те же эйлеровы углы, что и вектор $\xi-(0,y)$. Значит, равенство (8) задает отображение, которое совмещает отрезок $[-b(y),a(y)]\times\{y\}$ с линией тока со следом y.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}\in C(K_M^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_m\in K_M^1$, $y_m\to y_0$. Допустим, что $\varphi_i(y_m)\to\varphi_i^0$, и проверим, что $\varphi_i^0=\varphi_i(y_0)$. Если это неверно, то, по предложению 6, у нас есть две линии тока: та, у которой эйлеровы углы есть $\varphi_i(y_0)$, и та, у которой эйлеровы углы есть φ_i^0. Обе линии имеют общий след y_0, что противоречит предложению 4. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Итак, $F_M^1\in C(R^1\times K_M^1;R^n)$. По предложению 4, это отображение взаимно-однозначно на $\Phi_{+,M}^1\cup\Phi_{-,M}^1$, причем из определения F_M^1 следует, что $(F_M^1)^{-1}(\xi)$ состоит из одной точки для каждого $\xi\in F_M^1(\Phi_{+,M}^1\cup\Phi_{-,M}^1)$.

Пусть $k>0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II. Все главные миноры матрицы из величин

$$b_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 |(k,x_1,\dots,x_n)|}{\partial x_i^2}, & i=j,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 |(k,x_1,\dots,x_n)|}{\partial x_i\,\partial x_j}, & i\neq j\end{cases}$$

строго положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$b_{ij}=-\frac{1}{2}\,\frac{x_i x_j}{|(k,x_1,\dots,x_n)|^3},\ i\neq j,$$

$$b_{ii}=\frac{k^2+\Sigma_i}{|(k,x_1,\dots,x_n)|^3},\ \Sigma_i=\sum_{i\neq s}x_s^2 .$$

Если все строки нашей матрицы умножить на $|(k,x_1,\dots,x_n)|^3>0$, то главные миноры умножатся на степени этого числа, что не повлияет на знаки. Получим матрицу попроще:

$$a_{ij}=\begin{cases}-\frac{1}{2}x_i x_j\ , & i\neq j,\\ k^2+\Sigma_i\ , & i=j .\end{cases}$$

Если главный минор имеет размер $r\times r$, то слагаемые $x_{r+1}^2,\dots$ $\dots, x_n^2$, участвующие в диагонали, можно внести в состав k^2, а потом заменить букву r буквой n. Кроме того,

$$\det a_{ij}=x_1^2\dots x_n^2\det\left(\frac{a_{ij}}{x_i x_j}\right),$$

и при этом обращения x_i в нули, как будет видно сейчас, хлопот не доставят. Посчитаем

$$\det\left(\frac{a_{ij}}{x_i x_j}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{k^2+\Sigma_1}{x_1^2}, & -\dfrac{1}{2}, & \dots, & -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}, & \dfrac{k^2+\Sigma_2}{x_2^2}, & \dots, & -\dfrac{1}{2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\dfrac{1}{2}, & -\dfrac{1}{2}, & \dots, & \dfrac{k^2+\Sigma_n}{x_n^2}\end{vmatrix}$$

От всех строк отнимем последнюю. Диагональ будет иметь вид

$$\frac{k^2+\Sigma_i}{x_i^2}+\frac{1}{2},\ i<n,$$

все остальные числа в строках, кроме последних, будут нулями, а последняя строка не изменится, и последний столбец примет вид

$$-\frac{k^2+\Sigma_n}{x_n^2}-\frac{1}{2}$$

для всех чисел столбца, кроме последнего.

Теперь к последней строке мы при $i=1,\dots,n-1$ прибавим i-ую строку, умноженную на

$$\frac{x_i^2}{2k^2+\Sigma+\Sigma_i},$$

где $\Sigma=\Sigma_i+x_i^2$. Все числа, кроме последнего, в этой строке станут нулями, а последнее будет равно

$$\lambda=\frac{k^2-\Sigma_n}{x_n^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{2x_n^2}\cdot\frac{2k^2+\Sigma+\Sigma_n}{2k^2+\Sigma+\Sigma_i}.$$

Осталось проверить, что это число >0 при $x_n^2>0$. Если мы допустим, что $\lambda>0$, то легко получим, что

$$\frac{2(k^2+\Sigma_n)}{2k^2+\Sigma+\Sigma_n}>\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{2k^2+\Sigma+\Sigma_i}.$$

Так как $2k^2+\Sigma+\Sigma_i>k^2+\Sigma$, то полученное неравенство надо усиливать неравенством

$$2(k^2+\Sigma_n)(k^2+\Sigma)>\Sigma_n(2k^2+\Sigma+\Sigma_n),$$

в котором $k^2+\Sigma_n>\Sigma_n$ и $2k^2+2\Sigma\geqslant 2k^2+\Sigma+\Sigma_n$. $\square$

При $k>0$ положим

$$g(y)=k\operatorname{tg}\varphi_1(y)(\cos\varphi_2(y),\sin\varphi_2(y)\cos\varphi_3(y),\dots$$
$$\dots,\sin\varphi_2(y)\dots\sin\varphi_{n-1}(y)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировке следующего предложения говорится о выборе k, хотя в заключении предложения k не нужен. Это объясняется тем, что выбор k используется при проверке включения некоторых векторов в $F_M^1(\Phi^1_{+,M}\cup\Phi^1_{-,M})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. При подходящем выборе $k>0$ существует число $P\in(0,+\infty)$ такое, что

$$\forall y_1,y_2\in K_M^1\quad |g(y_1)-g(y_2)|\leq P|y_1-y_2|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напротив, допустим, что для каждого целого $N>0$ найдутся y_{1N} и y_{2N} из K_M^1 такие, что

$$|g(y_{1N})-g(y_{2N})|>N|y_{1N}-y_{2N}|.$$

Пусть $g(y_{iN})=g_{iN}$, $i=1,2$. Рассмотрим векторы

$$(k,y_{1N}+g_{1N}),\ (k,y_{2N}+g_{2N}),\ (-k,y_{1N}-g_{1N}),\ (-k,y_{2N}-g_{2N}) \qquad (9)$$

По определению F_M^1, при каждом $y\in K_M^1$ $\cos\varphi_1(y)>0$, поэтому, по предложению 8,

$$\mu=M\min_{y\in K_M^1}\cos\varphi_1(y)>0.$$

Если $k\in(0,\mu)$, то первый и третий (соотв., второй и четвертый) из векторов (9) лежат на линии тока со следом y_{1N} (соотв., y_{2N}). Действительно, при $k\in(0,\mu)$

$$\frac{k}{\cos\varphi_1(y_{1N})}<M,$$

а, по определению V_M^1, $M\leq a(y), b(y)$. Следовательно, векторы

$$F_M^1\left(\frac{\pm k}{\cos\varphi_1(y_{iN})},\ y_{iN}\right)=(\pm k,\ y_{iN}\pm g_{iN})$$

содержатся в линии тока со следом y_{iN}. Итак, мы выберем любое $k\in(0,\mu)$. В неравенстве (7) за x_1 (соотв., x_2, y_1, y_2) возьмем первый (соотв., второй, третий, четвертый) из векторов (9). Получим

$$|(2k,2g_{1N})|+|(2k,2g_{2N})|\leq|(2k,y_{1N}-y_{2N}+g_{1N}+g_{2N})|+$$
$$+|(2k,-(y_{1N}-y_{2N})+g_{1N}+g_{2N})|.$$

В этом неравенстве обозначим через α_1,α_2 (соотв., α_3,α_4) первое и второе слагаемые из левой (соотв., правой) части: $\alpha_1+\alpha_2\leq\alpha_3+\alpha_4$. Для функции $|x|$, $x\in R^n\setminus\{0\}$, формула Тейлора имеет вид

$$|x+h|=|x|+\frac{\langle x|h\rangle}{|x|}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2|x|}{\partial x_i\,\partial x_j}h_ih_j+o(|h|^2).$$

В α_3 (соотв., α_4) положим $h=(0,y_{1N}-y_{2N})$ (соотв., $h=(0,y_{2N}-y_{1N})$), и формула Тейлора даст равенство

$$\alpha_3+\alpha_4=2|(2k, g_{1N}+g_{2N})|+\sum D_{ij}[|(2k, g_{1N}+g_{2N})|]\times \\ \times(y^i_{1N}-y^i_{2N})(y^j_{1N}-y^j_{2N})+O(|y_{1N}-y_{2N}|^2). \tag{10}$$

Здесь и в дальнейшем $D_{ij}[\ldots]$ означает оператор второй частной производной по переменным i-ой и j-ой, а суммирование идет по i, $j=2,\ldots,n$, потому что первые координаты приращений всегда будут нулями. Координаты i-ую, j-ую векторов y_{1N}, g_{2N} мы обозначаем через y^i_{1N}, g^i_{2N} и т.п.

В α_2 положим $h=(0, g_{2N}-g_{1N})$ и, учитывая (10), получим

$$\alpha_1+\alpha_2=4|(k, g_{1N})|+2\frac{\langle(k, g_{1N})|(0, g_{2N}-g_{2N})\rangle}{|(k, g_{1N})|}+ \\ +\sum D_{ij}[|(k, g_{1N})|](g^i_{2N}-g^i_{1N})(g^j_{2N}-g^j_{1N})+O(|g_{1N}-g_{2N}|^2)\leq \\ \leq 4\left|\left(k, \frac{g_{1N}+g_{2N}}{2}\right)\right|+\sum D_{ij}[|(2k, g_{1N}+g_{2N})|](y^i_{1N}-y^i_{2N})(y^j_{1N}-y^j_{2N})+ \\ +O(|y_{1N}-y_{2N}|^2). \tag{11}$$

Положив $h=\frac{1}{2}(0, g_{2N}-g_{1N})$, будем иметь

$$4\left|\left(k, \frac{g_{1N}+g_{2N}}{2}\right)\right|=4|(k, g_{1N})|+2\frac{\langle(k, g_{1N})|(0, g_{2N}-g_{1N})\rangle}{|(k, g_{1N})|}+ \\ +\frac{1}{2}\sum D_{ij}[|(k, g_{1N})|](g^i_{2N}-g^i_{1N})(g^j_{2N}-g^j_{1N})+O(|g_{2N}-g_{1N}|^2). \tag{12}$$

В неравенстве (11) это разложение приводит к неравенству

$$\frac{1}{2}\sum D_{ij}[|(k, g_{1N})|](g^i_{2N}-g^i_{1N})(g^j_{2N}-g^j_{1N})+O(|g_{2N}-g_{1N}|^2)\leq \\ \leq\sum D_{ij}[|(2k, g_{1N}+g_{2N})|](y^i_{2N}-y^i_{1N})(y^j_{2N}-y^j_{1N})+O(|y_{2N}-y_{1N}|^2).$$

Так как K^1_M компактно, а функция g непрерывна, то на основании неравенств

$$|g_{1N}-g_{2N}|\geq N|y_{1N}-y_{2N}|>0$$

можно считать, что при

$$g_{1N}, g_{2N}\to g_0;\ y_{1N}, y_{2N}\to y_0.$$

Подставим g_0 вместо g_{1N} и g_{2N} в производные в неравенстве (12). Неравенство (12) сохранится, только в $O(|g_{1N}-g_{2N}|^2)$ и в $O(|y_{1N}-y_{2N}|^2)$ появятся добавки того же порядка малости $(f(x+h)=f(x)+(f(x+h)-f(x)))$. Теперь положим $\Delta g=g_{2N}-g_{1N}$, $(\Delta g)_i=g^i_{2N}-g^i_{1N}$, так же поступим с Δy и $(\Delta y)_i$, и (12) превратится в

$$\frac{1}{2}\sum D_{ij}[|(k, g_0)|](\Delta g)_i(\Delta g)_j + O(|\Delta g|^2) \leq$$
$$\leq 2\sum D_{ij}[|(k,g)|](\Delta y)_i(\Delta y)_j + O(|\Delta y|^2). \qquad (13)$$

По предложению II, квадратичная форма с коэффициентами $D_{ij}[|(k, g_0)|]$ положительно определена, поэтому найдутся числа $c > 0$ и $\|D\| > 0$, зависящие только от этих коэффициентов, такие, что

$$0 < \frac{c|\Delta g|^2}{2} + O(|g|^2) \leq \frac{1}{2}\langle D\Delta g|\Delta g\rangle + O(|\Delta g|^2) \leq$$

$$\leq 2\langle D\Delta y|\Delta y\rangle + O(|\Delta y|^2) \leq 2\|D\||\Delta y|^2 + O(|\Delta y|^2),$$

где через $\langle D\Delta g|\Delta g\rangle$ и $\langle D\Delta y|\Delta y\rangle$ обозначены соответствующие квадратичные формы из (13). Мы предположили, что $\frac{|\Delta y|}{|\Delta g|} \to 0$, поэтому

$$0 < \frac{c}{2} \leq \lim_N \left\{2\|D\|\frac{|\Delta y|^2}{|\Delta g|^2} + \frac{O(|\Delta y|^2)}{|\Delta g|^2}\right\} = 0.$$

Это ложные неравенства.

§ 4. Интегрирование по мере Лебега с помощью линий тока

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Отображение $y \to g(y)$, $y \in K_M^1$, переводит множество $(n-1)$-мерной лебеговой меры нуль в нуль-множество той же меры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \subset R^{n-1}$ есть куб с ребром $\delta > 0$. Если $y_1, y_2 \in G \cap K_M^1$, то, по предложению 12,

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq (n-1)^{\frac{1}{2}} P\delta.$$

Следовательно, $g(G \cap K_M^1)$ содержится в кубе с ребром $2(n-1)^{\frac{1}{2}}P\delta$. Поэтому для открытого множества $S \subset K_M^1$

$$d\lambda_{n-1}(g(S)) \leq 2^{n-1}(n-1)^{\frac{n-1}{2}} P^{n-1} d\lambda_{n-1}(S).$$

Предложение следует теперь из регулярности меры Лебега. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Лебегова n-мерная мера множества начал линий тока из V_M^1 равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_s есть множество всех начал линий тока из V_M^1, лежащих в гиперплоскости $\{s\}\times R^{n-1}$. Точки из H_s имеют вид $(s, y+g(y))$, где функция g взята с коэффициентом s. Если $d\lambda_{n-1}(H_s)>0$, то >0 и $(n-1)$-мерная лебегова мера множества следов линий тока с началами в H_s. Но при $s_1\neq s_2$ эти множества следов не пересекаются, и $d\lambda_{n-1}(K_M^1)<+\infty$. Значит, $d\lambda_{n-1}(H_s)>0$ только для некоторого счетного семейства чисел s. Поэтому

$$d\lambda_n(\bigcup_s H_s)=\int_{R^1} d\lambda_{n-1}(H_s)\,ds=0. \ \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. По симметричным соображениям для $d\lambda_n$ пренебрежимы концы линий тока.

Пусть $S\subset K_M^1$ замкнуто. Определим ряд множеств:

$$U_S=\{(x,y)\in R^n:\ y\in S,\ -b(y)\le x\le a(y)\},$$

$$U_{S,k}=\{(x,y)\in R^n:\ y\in S,\ -kb(y)\le x\le ka(y)\},\ 0<k<1.$$

Ясно, что U_S, $U_{S,k}$, а с ними и

$$d_S=F_M^1(U_S),\ d_{S,k}=F_M^1(U_{S,k})$$

компактны. Множество $\bigcup_{0<k<1} d_{S,k}$ отличается от d_S только отсутствием начал и концов линий тока, имеющих следы в S. Поэтому, по предложению I4,

$$d\lambda(B\cap d_S)=d\lambda_n(B\cap\bigcup_{0<k<1} d_{S,k}), \tag{I4}$$

$$d\lambda_n(A\cap d_S)=d\lambda_n(A\cap\bigcup_{0<k<1} d_{S,k}). \tag{I5}$$

Положим

$$e_k=A\cap d_{S,k},\ e=\bigcup_{0<k<1} e_k,\ e'=B\cap d_S,$$

$$\tilde e_k=B\cap d_{S,k},\ \tilde e=A\cap d_S,\ \tilde e'=\bigcup_{0<k<1}\tilde e_k.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I5. $d\lambda_n(e)=d\lambda_n(e')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению перевозок,

$$d\lambda_n(e)=\psi(e\times B)=\psi(e\times e')+\psi(e\times(B\setminus e')).$$

Если показать, что $\psi(e\times(B\setminus e'))=0$, то предложение будет доказано, потому что тогда по симметричным соображениям

$$d\lambda_n(e') = \psi(\tilde{e}\times\tilde{e}'),$$

и, по предложению I4,

$$d\lambda_n(\tilde{e}') = d\lambda_n(e'),\ \psi(\tilde{e}\times\tilde{e}') = \psi(e\times e').$$

Итак, докажем, что $\psi(e\times(B\setminus e'))=0$. Достаточно проверить, что $\psi(e_k\times(B\setminus e'))=0$, потому что $e_k\subset e_{k'}$ при $k<k'$ и $e=\cup e_k$. Пусть $\xi\in e_k$, $\eta\in B\setminus e'$. Отрезок $[\xi,\eta]$ ни в одной линии тока не содержится, поэтому существуют $V_{\xi\eta}\in\mathcal{V}_\xi$ и $W_{\xi\eta}\in\mathcal{V}_\eta$ такие, что $\psi(V_{\xi\eta}\times W_{\xi\eta})=0$. При фиксированном η в силу компактности e_k найдутся $\xi_1,\dots,\xi_\ell\in e_k$ такие, что

$$e_k\subset\bigcup_{1\le i\le\ell} V_{\xi_i\eta}.$$

Положив

$$W_\eta = \bigcap_{1\le i\le\ell} W_{\xi_i\eta},$$

будем иметь

$$\psi(e_k\times W_\eta)\le\sum_{1\le i\le\ell}\psi(V_{\xi_i\eta}\times W_{\xi_i\eta})=0.$$

Так как $B\setminus e'$ открыто, то можно считать, что $W_\eta\subset B\setminus e'$, а $B\setminus e'$ можно покрыть счетным семейством окрестностей вида W_η, откуда $\psi(e_k\times(B\setminus e'))=0$. □

Положим

$$W_M^1=\{(t,y)\in R^n: y\in K_M^1, (t,y+tg(y))\in V_M^1\},$$

$$R(t,y)=\sigma_t(y)=(t,y+tg(y)),\ (t,y)\in W_M^1,$$

где функция g, с которой мы работали в предложениях I2, I3, теперь снабжена коэффициентом $k=1$. Очевидно, что R непрерывно, а W_M^1 компактно. Функция g определена на всем K_M^1, но не для каждого t $(t,y)\in W_M^1$. Если $(t,y)\in W_M^1$, то будем говорить, что $\sigma_t(y)$ существует. На пространстве $C(V_M^1)\circ R\subset C(W_M^1)$ рассмотрим функционал

$$\ell: h\circ R\to\int_{V_M^1} h\,d\lambda_n,\ h\in C(V_M^1).$$

Ясно, что существует мера $\mu\in C(W_M^1)^*$ такая, что

$$l(h\circ R)=\int_{W_M^1} h\circ R\,d\mu.$$

Пусть $\mu=\mu^+-\mu^-$ есть обычное жорданово разложение меры μ. При этом μ^+ и μ^- сосредоточены, соответственно, на множествах C, $D\subset W_M^1$, не обязательно замкнутых, но зато непересекающихся.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I6. $\mu^-(h\circ R)=0$, $h\in C(V_M^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\int_{W_M^1} h\circ R\,d\mu^+-\int_{W_M^1} h\circ R\,d\mu^-=\int_{R(C)} h\,d\lambda_n+\int_{R(D)} h\,d\lambda_n.$$

Так как $C\cap D\neq\emptyset$, то $R(C)\cap R(D)$ содержится в множестве начал и концов линий тока из V_M^1. По предложению I4, $R(C)\cap R(D)$ пренебрежимо для $d\lambda_n$. Пусть $\bar D$ есть замыкание множества D. Из обычных предельных соображений получаем

$$0\geq-\int_D h\circ R\,d\mu^-=-\int_{\bar D} h\circ R\,d\mu^-=\int_{\bar D} h\,d\lambda_n\geq 0. \ \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теперь можно считать, что $\mu\geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I7. Существует функция $f\in L^1(W_M^1, d\lambda_n)$, $f\geq 0$ такая, что $d\mu=f\,d\lambda_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $\mu(e)=0$, если $d\lambda_n(e)=0$, $e\subset W_M^1$. Если $d\lambda_n(e)=0$, то при почти каждом $t\in R^1$

$$\int_{e\cap\{t\}\times R^{n-1}} d\lambda=0.$$

По предложению I3, при тех же t

$$\int_{G_t(e)\cap\{t\}\times R^{n-1}} d\lambda_{n-1}=0,$$

откуда

$$\int_e d\mu=\int_{R(e)} d\lambda=0. \ \square$$

Таким образом, мы доказали, что для $h\in L^1(V_M^1, d\lambda_n)$

$$\int_{V_M^1} h\,d\lambda=\int_{K_M^1}\Big(\int_{R^1} h\circ G_t\, f_t\,dt\Big)d\lambda_{n-1},$$

где

$$
f_t(y)=\begin{cases} f(t,y), & R(t,y)\in V_M^1, \\ 0, & R(t,y)\notin V_M^1, \end{cases}
\qquad (16)
$$

$$
h\circ\sigma_t(y)=\begin{cases} h\circ\sigma_t(y), & R(t,y)\in V_M^1, \\ 0, & R(t,y)\notin V_M^1. \end{cases}
$$

Действительно, функция $h\circ\sigma_t$ определена не на всем K_M^1, но если $\sigma_t(y)$ не существует, то $f_t(y)=0$, поэтому можно писать (16). Получим новую форму предложения 15.

Положим

$$I_{A,y}=\{t\in R^1:\sigma_t(y)\in A\},$$

$$I_{B,y}=\{t\in R^1:\sigma_t(y)\in B\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. Для почти всех $y\in K_M^1$

$$\int\limits_{I_{A,y}} f_t\,dt=\int\limits_{I_{B,y}} f_t\,dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Измеримы функции

$$y\to\int\limits_{I_{A,y}} f_t\,dt,\quad y\to\int\limits_{I_{B,y}} f_t\,dt.$$

Поэтому измеримо, например, множество

$$S=\{y\in K_M^1:\int\limits_{I_{A,y}} f_t\,dt>\int\limits_{I_{B,y}} f_t\,dt\}.$$

По предложению 13, $d\lambda_{n-1}(S)=0$, так как

$$\int\limits_S\Big(\int\limits_{I_{A,y}} f_t\,dt\Big)d\lambda_{n-1}(y)=\int\limits_S\Big(\int\limits_{I_{B,y}} f_t\,dt\Big)d\lambda_{n-1}(y).\ \square$$

Пусть еще

$$E=\{\xi\in A: f(R^{-1}(\xi))=0\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. $d\lambda_n(E)=0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если χ_E есть харфункция E, то

$$d\lambda_n(E)=\int\limits_{K_M^1}\Big(\int\limits_{R^1}\chi_E\circ\sigma_t\,f_t\,dt\Big)d\lambda_{n-1}=0.\ \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, при почти каждом $y \in K_M^1$ пересечение E с линией тока, имеющей след y, имеет нулевую длину.

Из предложения 18 легко выводится факт, который нам не понадобится: если начало (соотв., конец) некоторой линии тока лежит в $A \cap B$, то можно считать, что конец (соотв., начало) этой же линии тока тоже лежит в $A \cap B$.

§ 5. Вывод основного результата

Если нам дана гиперплоскость L_0, то мы будем считать, что для нее уже построены все множества V_M и проведены все рассуждения § 3 и § 4. При $M_1 > M_2$ $V_{M_1} \subset V_{M_2}$. Рассмотрим связь между функциями f_{t,M_1} и f_{t,M_2}, введенными в конце § 4 под общим именем f_t. Если $G \in L^1(V^1_{M_1}, d\lambda_n)$, то $G \in L^1(V^1_{M_2}, d\lambda_n)$ и

$$\int G\,d\lambda_n = \int_{R^1}\Big(\int_{K_M^1} G\circ\sigma_t\, f_{t,M_1}\, d\lambda_{n-1}\Big)dt = \int_{R^1}\Big(\int_{K_M^1} G\circ\sigma_t\, f_{t,M_2}\, d\lambda_{n-1}\Big)dt.$$

Поэтому сужение f_{M_2} на $R^{-1}(V^1_{M_1})$ совпадает с f_{M_1}. Следовательно, различать функции f_{M_1} и f_{M_2} не нужно. Если окажется, что

$$A \cup B \not\subset \bigcup_{M>0} V_M,$$

то можно будет добавить к рассмотрениям счетное семейство (L_m) гиперплоскостей, параллельных L_0. Затем из множеств V_M, строящихся для L_m, будем изымать линии тока, уже попавшие в построения для $L_0, \ldots, L_{m-1}$. Если семейство (L_m) достаточно обширно, то за пределами построений окажутся линии тока, параллельные L_0. Для них можно взять свое семейство гиперплоскостей, и т.д. - всего не более чем n раз.

Следовательно, можно определять Δ - то отображение, о котором спрашивается в задаче 2, - работая с фиксированным множеством V_M^1, построенным для фиксированной гиперплоскости L_0.

Построим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
I_{A,y} \arrow[rr, "\hat{s}_y"] \arrow[dr, "h_y"'] & & I_{B,y} \\
& h_y(I_{A,y}) \arrow[ur, "\tau_y^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой $I_{A,y}$ (соотв., $I_{B,y}; h_y(I_{A,y})$) снабжено мерой $f_t dt$ (соотв., $f_t dt, d\tau_1$), отображение ξ_y (соотв., h_y, τ_y^{-1}) определено почти всюду, сохраняет меру (т.е., мера множества совпадает с мерой его образа), взаимно-однозначно и отображает свою область определения на почти все $I_{B,y}$ (соотв., $h_y(I_{A,y})$; $I_{B,y}$). По предложению 18, можно считать, что

$$\int_{I_{A,y}} f_t\,dt = \int_{I_{B,y}} f_t\,dt,$$

где для почти всех $t \in I_{A,y} \cup I_{B,y}$ $f_t > 0$. Пусть $[\alpha(y), \beta(y)]$ (соотв., $[\gamma(y), \delta(y)]$) есть выпуклая оболочка $I_{A,y}$ (соотв., $I_{B,y}$). Для $t \bar{\in} I_{A,y} \cup I_{B,y}$ положим $f_t = 0$. Рассмотрим функцию

$$h(t) = \int_{\alpha(y)}^{t} f_{t'}\,dt', \; t \in [\alpha(y), \beta(y)].$$

По теореме Лебега о пределе под интегралом промежуток

$$j_t = \{t' \in [\alpha(y), \beta(y)] : h(t') = h(t)\}$$

при фиксированном t замкнут. Ясно, что если $h(t_1) \neq h(t_2)$, то $j(t_1) \cap j(t_2) = \emptyset$. Если h постоянна на $[t_0, t_1]$, то, по замечанию в конце § 4, можно считать, что $d\tau_1(I_{A,y} \cap [t_0, t_1]) = 0$. Значит, из $I_{A,y}$ можно изъять множество

$$j = I_{A,y} \cap \bigcup_{0 \le k \le \infty} (t_{0,k}, t_{1,k})$$

нулевой длины и такое, что после его изъятия h делается строго возрастающей на $I_{A,y} \setminus j$. Эту функцию мы и назовем h_y. Если положить

$$\tau(t) = \int_{\gamma(y)}^{t} f_{t'}\,dt', \; t \in [\gamma(y), \delta(y)],$$

то можно определить функцию τ_y, как была определена h_y. Докажем, что $h_y(I_{A,y})$ есть промежуток. Пусть $0 < h_1 < h_y(\beta(y))$. Либо существует t_1, для которого $h_1 = h_y(t_1)$, либо для любого $t \in I_{A,y}$ $h_y(t) > h_1$ или $h_y(t) < h_1$. Пусть, если верно второе утверждение,

$$t_1 = \inf\{t \in I_{A,y} : h(t) > h_1\},\; t_2 = \sup\{t \in I_{A,y} : h_y(t) < h_1\}, h_y(t_1) > h_1 > h_y(t_2)$$

Тогда

$$\int_{t_2}^{t_1} f_\tau \, d\tau > 0,$$

поэтому существует $t \in (t_2, t_1) \cap I_{A,y}$. Либо $h_y(t) > h_1$, и тогда $t \geq t_1$, хотя $t < t_1$, либо $h_y(t) < h_1$, тогда $t_1 \leq t_2$, хотя $t_1 > t_2$. Значит, верно первое утверждение. Но так как

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_\tau \, d\tau = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f_\tau \, d\tau,$$

то промежутки $h_y(I_{A,y})$ и $\tau_y(I_{B,y})$ совпадают. Кроме этого, h_y и τ_y определены так, что

$$\int_e f_\tau \, d\tau = d\lambda_1(h_y(e)), \; e \subset I_{A,y},$$

$$\int_e f_\tau \, d\tau = d\lambda_2(\tau_y(e)), \; e \subset I_{B,y}.$$

Положим $\mathfrak{S}_y = \tau_y^{-1} \circ h_y$. Диаграмма определена.

Буквой $\mathfrak{S}$ обозначим отображение множества

$$A_M^1 = \bigcup_{y \in K_M^1} I_{A,y} \times \{y\}$$

на множество

$$B_M^1 = \bigcup_{y \in K_M^1} I_{B,y} \times \{y\},$$

которое на $I_{A,y} \times \{y\}$ действует, как $\mathfrak{S}_y$ на $I_{A,y}$. Теперь для $G \in L^1(R(A_M^1), d\lambda_n)$

$$\int_{R(A_M^1)} G \, d\lambda_n = \int_{K_M^1} \Big(\int_{I_{B,y}} G \circ R \circ \mathfrak{S}^{-1} f_t \, dt \Big) d\lambda_{n-1} = \int_{R(B_M^1)} G \circ R \circ \mathfrak{S}^{-1} \circ R^{-1} d\lambda_n.$$

Положим $\Delta^{-1} = R \circ \mathfrak{S}^{-1} \circ R^{-1}$, где R берется в сужении на A_M^1, а R^{-1} - в сужении на $R(B_M^1)$. По своему определению, Δ действительно сохраняет меру: если $e \subset B_M^1$, то

$$d\lambda_n(\Delta^{-1}(e)) = \int_{\Delta^{-1}(e)} d\lambda_n = \int_{K_M^1} \Big(\int_{I_{B,y}} \chi_{\Delta^{-1}(e)} \circ R \circ \mathfrak{S}^{-1} f_t \, dt \Big) d\lambda_{n-1} =$$

$$= \int_{R(B_M^1)} \chi_{\Delta^{-1}(e)} \circ \Delta^{-1} d\lambda_n = \int_{R(B_M^1)} \chi_e \, d\lambda_n = d\lambda_n(e),$$

где χ_e есть харфункция множества e.

Осталось проверить, что перевозка

$$\psi_1(e_1 \times e_2) = d\mathcal{L}_n(e_1 \cap \Delta^{-1}(e_2)), \quad e_1 \times e_2 \subset A \times B,$$

оптимальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Пусть для любых окрестностей V точки $x \in A$ и W точки $y \in B$ $\psi_1(V \times W) > 0$. Если x (соотв., y) не есть начало (соотв., конец) никакой линии тока, то x и y лежат на одной линии тока.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x лежит в линии тока ℓ_1, $\varepsilon > 0$, а $\delta > 0$ подобрано, по предложению 7, при данных x и ε. Пусть $V = \{\xi \in A : |\xi - x| < \delta\}$. Если $y \notin \ell_1$, то можно взять ε настолько малым, что ε - окрестность ℓ_1, содержащая $\Delta(V)$, не пересечется с $W = \{\eta \in B : |\eta - y| < \varepsilon\}$. $\square$

ТЕОРЕМА. Пусть дана задача 2, в которой $d\mathcal{L}_n$ имеет на A и на B невырожденные распределения. Для каждой оптимальной перевозки ψ меры Лебега с A на B существует решение задачи 2 - оптимальная перевозка ψ_1 с плотностью, имеющая те же линии тока, что и перевозка ψ. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. предложения 1-20.

§ 6. Линии тока на плоскости

Пусть задача 2 поставлена для выпуклых непересекающихся компактов A, $B \subset R^2$, причем $0 < d\mathcal{L}_2(A) = d\mathcal{L}_2(B)$, A лежит в открытой правой полуплоскости, B лежит в открытой левой полуплоскости. Установим предложение 12. Пусть прямые $\{k\} \times R^1$ и $\{-k\} \times R^1$, разделяют A и B и не пересекаются ни с A, ни с B. Если $(0, y)$ (соотв., $\varphi(y)$) есть след на прямой $\{k\} \times R^1$ (соотв., эйлеров угол) некоторой линии тока, то пересечением указанной линии тока с прямой

$\{k\}\times R^1$ (соотв., $\{-k\}\times R^1$) будет точка $(k, y+k\,tg\,\varphi(y))$ (соотв. $(-k, y-k\,tg(\varphi(y)))$. Если даны линии тока со следами $(0,y_1)$ и $(0,y_2)$, то по теореме о средней линии трапеции имеем

$$2|y_1-y_2| = |(y_1-y_2)+k(tg\,\varphi(y_1)-tg\,\varphi(y_2))| + |(y_1-y_2) - $$
$$-k(tg\,\varphi(y_1)-tg\,\varphi(y_2))| \geq 2k|tg\,\varphi(y_1)-tg\,\varphi(y_2)|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. Дополнение к множеству T (см. замечание после предложения 2) связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это дополнение открыто и имеет только одну неограниченную компоненту связности. Проверим, что ограниченных компонент нет. Допустим, что точка z лежит в ограниченной компоненте $R^2\setminus T$. Тогда найдутся две линии тока с общим началом такие, что внутри образованного ими угла лежит z и нет точек из A. Еще найдутся две линии тока с общим концом такие, что внутри образованного ими угла лежит z и нет точек из B. Чтобы не было противоречия с предложением 4, придется считать, что z не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы доказали, что следы линий тока составляют отрезок, скажем, $[\sigma,\tau]$, на оси $\{0\}\times R^1$.

Пусть $K_s = A\cap\{s\}\times R^1$, $f\in(A, d\mathcal{L}_2)$. Положим

$$f(s, y+s\,tg\,\varphi(y)) = \begin{cases} f(s,y+s\,tg\,\varphi(y)), & (s,y+s\,tg\,\varphi(y))\in A,\\ 0, & (s,y+s\,tg\,\varphi(y))\notin A,\end{cases}$$

$$G_s(y) = \begin{cases} \left|1+\dfrac{s\varphi'(y)}{\cos^2\varphi(y)}\right|, & (s,y+s\,tg\,\varphi(y))\in A,\\ 0, & (s,y+s\,tg\,\varphi(y))\notin A.\end{cases}$$

Рассмотрение функции φ' оправдано абсолютной непрерывностью функции φ. Еще положим

$$x = \frac{s}{\cos\varphi(y)},$$

$$B(x,y) = \cos\varphi(y)\,G_{x\cos\varphi(y)}(y).$$

Функция $a(y)$ определена в предложении 9, длина отрезка $[\alpha(y), a(y)]$ будет равна длине пересечения A с линией тока со следом y. Теперь имеем равенства, после которых можно приступать к выводу основного результата:

$$\begin{aligned}
&\int f d\lambda_2 = \int_{R^1} \Big(\int_{K_s} f d\lambda_1\Big) ds = \\
&= \int_{R^1} \Big(\int_{[\sigma,\tau]} f(s, y + s\,tg\,\varphi(y))\, d(y + s\,tg\,\varphi(y))\Big) ds = \\
&= \int_{R^1} \Big(\int_{[\sigma,\tau]} f(s, y + s\,tg\,\varphi(y))\, G_s(y)\, dy\Big) ds = \\
&= \int_{[\sigma,\tau]} \Big(\int_{[\omega(y), a(y)]} f(x\cos\varphi(y), y + x\sin\varphi(y))\, B(x,y)\, dx\Big) dy.
\end{aligned} \qquad (17)$$

Переходя к формулированию нерешенных задач, докажем еще одно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. *Если границы ∂A и ∂B множеств A и B не содержат ни одного прямолинейного отрезка, то множество T совпадает с выпуклой оболочкой множества $A \cup B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют только две прямые, про которые можно сказать следующее: а) $A \cup B$ содержится в одной из полуплоскостей, порожденных прямой; б) пересечения A и B с этой прямой непусты. Возьмем одну из этих прямых. Пусть она пересекает ∂A (соотв., ∂B) в точке ξ (соответ., η). Легко видеть, что такая точка всего одна. По предложению 21, достаточно проверить, что $[\xi,\eta]$ есть линия тока. Допустим противное. Среди всех линий тока ℓ_1 с началом ξ можно найти линию ℓ, составляющую с $[\xi,\eta]$ минимальный угол. Аналогичную линию можно найти среди линий с концом η. Пусть $\{z\} = \partial A \cap \tilde{\ell}$. Можно считать, что z лежит внутри угла, составленного ℓ и $[\xi,\eta]$, так как в противном случае внутри угла, составленного $\tilde{\ell}$ и $[\xi,\eta]$, лежит пересечение ℓ и ∂B, и можно рассуждать симметрично следующему. Часть ∂A лежит внутри треугольника $z\xi\eta$, поэтому можно найти последовательность (ξ_n) начал линий тока такую, что $\xi_n \to \xi$, а соответствующие концы η_n лежат внутри треугольника $z\xi\eta$. По предложению 6, существует линия тока ℓ_1 с началом ξ, которая составляет с $[\xi,\eta]$ меньший угол, чем ℓ. □

ЗАДАЧА 3. Останется ли верным предложение 22, если с ∂A и ∂B снять ограничение об отрезках?

ЗАДАЧА 4. Опровержимо ли предложение 22 в R^n ?

ЗАДАЧА 5. Пусть гиперплоскость H разделяет выпуклые компакты A и B задачи 2 в R^n, не пересекаясь с ними. Имеет ли непустую внутренность в H множество $H \cap T$?

ЗАДАЧА 6. Можно ли установить в R^n формулу замены переменных с якобианом F_M, как в формуле (I7) ?

§ 7. К изометрии между пространствами L^p

Пусть даны компакты A, $B \subset R^n$ и функции $f_1 \geq 0$ на A и $f_2 \geq 0$ на B, суммируемые по $d\mathcal{L}_n$. Предположим, что меры $f_1 d\mathcal{L}_n$ и $f_2 d\mathcal{L}_n$ имеют невырожденные распределения и

$$\int f_1 d\mathcal{L}_n = \int f_2 d\mathcal{L}_n .$$

В §§ I-5 мы не пользовались инвариантностью меры Лебега относительно сдвигов, поэтому можно повторить теорию §§ 2-5 для мер $f_1 d\mathcal{L}_n$ и $f_2 d\mathcal{L}_n$ и установить существование отображения Δ почти всего A на почти все B такого, что

$$\int_e f_1 d\mathcal{L}_n = \int_{\Delta(e)} f_2 d\mathcal{L}_n , \quad e \subset A. \qquad \text{(I8)}$$

Если $A = B$, то сначала можно сделать параллельный перенос на вектор b такой, что $A \cap (b + B) = \emptyset$, а потом рассматривать $\Delta = \Delta_1 - b, \Delta_1 : A \to b + B$. Нетрудно видеть равносильность равенств (I8) и

$$\int_A g \circ \Delta \, f_1 d\mathcal{L}_n = \int_B g \, f_2 d\mathcal{L}_n , \quad g \in L^1(f_2 d\mathcal{L}_n).$$

Отсюда следует, что при $1 \leq p < +\infty$ и при сделанных относительно A, B, f_1 и f_2 предположениях пространства $L^p(f_1 d\mathcal{L}_n)$ и $L^p(f_2 d\mathcal{L}_n)$ изометричны. $L^\infty(f_1), L^\infty(f_2)$ тоже изометричны, потому что служат сопряженными к соответствующим L^1.

Литература

I. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых пространствах аддитивных функций.-"Вестник ЛГУ", №7, 1957, с. 52-59.

2. РВАЧЕВ М.А. К задаче о перемещении масс.-В кн.: Оптимизация. Вып. 9(26), Новосибирск, 1973, с. 203-209.

Поступила в ред.-изд. отд.

6. VII. 1973 г.