1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Численные методы

УДК 512.25/26

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОКАЙМЛЕНИЕМ

М.А.Яковлева

Описывается способ решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями общего вида и дополнительными произвольными столбцами в системе ограничений. Аналогичный подход возможен при разработке способов решения задач со сложными иерархически упорядоченными блочными структурами [1,2]. Когда глубина такой структуры невелика, можно отказаться от хранения значительной части информации. Объем вычислений при этом возрастает, но в рассматриваемой задаче это возрастание незначительно. При решении систем линейных уравнений транспортного типа, встречающихся в методе, за основу взят метод решения транспортной задачи с упорядочением базисных связей [3]. Предложены процедуры переупорядочения при окаймлении и, наоборот, усечении транспортной базисной матрицы. Для двухкомпонентной задачи [4] с окаймлением может быть описан аналогичный метод. Упорядоченный базис [5] и здесь может быть использован для снижения трудоемкости решения систем специального вида.

Пусть $A[M,N]$ - матрица системы ограничений задачи линейного программирования, где через $M=\{1,2,\dots,m\}$ обозначено множество номеров ее строк, а через $N=\{1,2,\dots,n\}$ - множество номеров её столбцов. Мы будем предполагать, что $A[M,N]$ имеет структуру матрицы транспортной задачи с окаймлением. Это значит, что можно выделить такие подмножества $I\subset M$ и $J\subset N$, при которых подматрица $A[I,J]$ имеет чисто транспортный вид. Относительно же подматриц $A[M\setminus I, N]$ и

$A[M,N\setminus J]$ никаких предположений делать не будем.

В квадратной неособенной матрице $A[M,K]$ ($K\subset N$), фигурирующей на каждом шаге метода последовательного улучшения [6,7], естественным образом выделяется подматрица $A[I,K_1]$ ($K_1=J\cap K$) транспортного типа, причем ввиду неособенности матрицы $A[M,K]$ $\operatorname{rang} A[I,K_1]\geq |I|+|K_1|-|M|$, где $|I|$, $|K_1|$ и $|M|$ - соответственно число элементов множеств I, K_1 и M. Обозначим через $A[I_0,J_0]$ некоторую квадратную подматрицу матрицы $A[I,K_1]$, обладающую тем свойством, что $\operatorname{rang} A[I_0,J_0]=$ $=\operatorname{rang} A[I,K_1]$, и представим матрицу $A[M,K]$ в виде произведения трех матриц:

$$A[M,K]=A_1[M,M]\cdot A_2[M,K]\cdot A_3[K,K]=$$

$$=\begin{array}{c} \\ I_0\Big\{ \\ M\setminus I_0\Big\{ \\ \end{array}\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hdashline T & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} \end{array}\right] \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{I_0}\underbrace{\qquad}_{M\setminus I_0} \end{array} \left[\begin{array}{c:c} A[I_0,J_0] & 0 \\ \hdashline 0 & V \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & \Lambda \\ \hdashline 0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} \end{array}\right],$$

где $T=T[M\setminus I_0,I_0]$ и $\Lambda=\Lambda[J_0,K\setminus J_0]$ удовлетворяют соотношениям:

$$T[M\setminus I_0,I_0]\cdot A[I_0,J_0]=A[M\setminus I_0,J_0], \tag{1}$$

$$A[I_0,J_0]\cdot\Lambda[J_0,K\setminus J_0]=A[I_0,K\setminus J_0], \tag{2}$$

а матрица $V=V[M\setminus I_0,K\setminus J_0]=A[M\setminus I_0,K\setminus J_0]-A[M\setminus I_0,J_0]\cdot$ $\cdot\Lambda[J_0,K\setminus J_0]$. При фиксированной матрице $A[I_0,J_0]$ такое разложение, очевидно, однозначно.

Рассмотрим более детально вопрос о решении систем

$$y[M]\cdot A[M,K]=C[K], \tag{3}$$

$$A[M,K]\cdot g[K]=A[M,j'] \quad (j'\in N), \tag{4}$$

встречающихся в методе последовательного улучшения. Если ввести обозначения

$$y_1[K]=y[M]\cdot A_1[M,M]\cdot A_2[M,K],$$
$$y_2[M]=y[M]\cdot A_1[M,M], \tag{5}$$

то решение системы (3) может быть получено в три этапа. В первую очередь из системы $y_1[K]\cdot A_3[K,K]=C[K]$ находим

$$y_1[J_0]=C[J_0],\ y_1[K\setminus J_0]=C[K\setminus J_0]-C[J_0]\cdot\Lambda[J_0,K\setminus J_0], \tag{6}$$

после чего неизвестные $y_2[M]$ могут быть определены из распадающейся системы

$$y_2[I_0]\cdot A[I_0,J_0]=y_1[J_0],$$
$$y_2[M\setminus I_0]\cdot V[M\setminus I_0,K\setminus J_0]=y_1[K\setminus J_0]. \tag{7}$$

Наконец, с учетом (5) решение $y[M]$ вычисляется по формулам:

$$y[M\setminus I_0]=y_2[M\setminus I_0],\ y[I_0]=y_2[I_0]-y_2[M\setminus I_0]\cdot T[M\setminus I_0,I_0]. \tag{8}$$

Представляется целесообразным не хранить матрицы $\Lambda[J_0,K\setminus J_0]$ и $T[M\setminus I_0,I_0]$, а находить каждый раз произведения $C[J_0]\cdot\Lambda[J_0,K\setminus J_0]$ и $y_2[M\setminus I_0]\cdot T[M\setminus I_0,I_0]$, фигурирующие в формулах (6) и (8), используя при этом информацию о соответствующих блоках прямой матрицы. Это приводит к необходимости решения систем транспортного вида с матрицей $A[I_0,J_0]$. Действительно, найдя решение $X[I_0]$ вспомогательной системы $X[I_0]\cdot A[I_0,J_0]=C[J_0]$, ввиду (2) получим $C[J_0]\cdot\Lambda[J_0,K\setminus J_0]=X[I_0]\cdot A[I_0,K\setminus J_0]$. Используя затем соотношение (1), найдем требуемое нам произведение $y_2[M\setminus I_0]\cdot T[M\setminus I_0,I_0]$ из системы

$$(y_2[M\setminus I_0]\cdot T[M\setminus I_0,I_0])\cdot A[I_0,J_0]=y_2[M\setminus I_0]\cdot A[M\setminus I_0,J_0].$$

Использование блоков прямой матрицы хотя и вызывает необходимость дополнительных вычислений, связанных с решением указанных выше систем, тем не менее оно избавляет от преобразований матриц $\Lambda[J_0,K\setminus J_0]$ и $T[M\setminus I_0,I_0]$, которые надо было бы выполнять в случае их хранения при переходе к следующему шагу метода последовательного улучшения. Кроме того, информация о соответствующих блоках $A[I_0,K\setminus J_0]$, $A[M\setminus I_0,J_0]$ прямой матрицы может храниться в сжатой форме, особенно если учесть, что части $A[I_0,(K\setminus J_0)\cap K_1]$ и $A[(M\setminus I_0)\cap I,J_0]$ этих блоков являются подматрицами транспортного блока $A[I,K]$.

Что касается решения систем с матрицей транспортного типа, то они могут решаться любым из разработанных для этого класса задач методом, однако мы будем считать, что эти системы решаются методом с упорядоченным множеством J_0 [3,8]. Ниже при рассмотрении вопроса о замене столбца в базисной матрице $A[M,K]$ будут введены процедуры окаймления и усечения, несколько нарушающие установленный порядок следования столбцов. При этом оказывается, что новое упорядочение может быть получено за три (или меньше) просмотра столбцов матрицы $A[I_0, J_0]$.

Остановимся теперь подробнее на решении системы (7). Заметим прежде всего, что поскольку $\operatorname{rang} A[I_0,J_0] = \operatorname{rang} A[I,K_1]$, то матрица $V[M\setminus I_0, K\setminus J_0]$ имеет нулевой блок $V[(M\setminus I_0)\cap I, (K\setminus J_0)\cap K_1]$. Ввиду этого $\operatorname{rang} V[I_1, K\setminus J_0] = \operatorname{rang} V[I_1, K\setminus K_1]$, где $I_1 = I\setminus I_0$, и из $V[I_1, K\setminus K_1]$ может быть выделена квадратная неособенная подматрица $V[I_1, J_1]$. В дальнейшем существенно используется условие

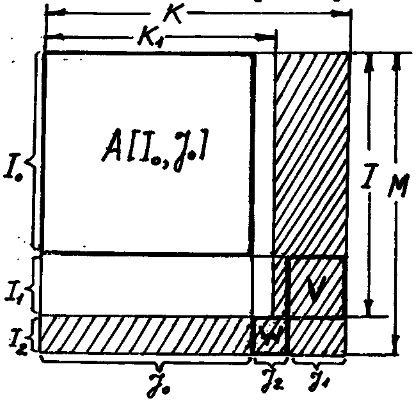

Рис. I.

$$J_1 \subset N \setminus J. \tag{9}$$

Произведем вторичное разложение [2], поступив с матрицей $V[M\setminus I_0, K\setminus J_0]$ аналогично тому, как мы поступили с матрицей $A[M,K]$, и представим ее в виде произведения трех матриц, положив $J_2 = K\setminus(J_0 \cup J_1)$ и

$$I_2 = M\setminus I. \tag{10}$$

Тогда получим

$$V[M\setminus I_0, K\setminus J_0] = V_1[M\setminus I_0, M\setminus I_0]\cdot V_2[M\setminus I_0, K\setminus J_0]\cdot V_3[K\setminus J_0, K\setminus J_0] =$$

$$= \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array}\left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hdashline T_1 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} V[I_1,J_1] & 0 \\ \hdashline 0 & W \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \Lambda_1 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad}_{I_1} & \underbrace{\quad}_{I_2} \end{array}$$

В этом разложении матрицы $T_1 = T_1[I_2, I_1]$, $\Lambda_1 = \Lambda_1[J_1, J_2]$ и $W = W[I_2, J_2]$ определяются соотношениями:

$$T_1[I_2,I_1]\cdot V[I_1,J_1] = V[I_2,J_1],\ V[I_1,J_1]\cdot\Lambda_1[J_1,J_2] = V[I_1,J_2],$$

$$W[I_2,J_2] = V[I_2,J_2] - V[I_2,J_1]\cdot\Lambda_1[J_1,J_2].$$

Решение системы (7) может снова быть найдено в три этапа. При этом будем считать, что хранятся и на каждом шаге преобразуются лишь обратные матрицы $V^{-1}[J_1, I_1]$ и $W^{-1}[J_2, I_2]$. Если ввести, как и ранее, вспомогательные неизвестные

$$z_1[J_1\cup J_2] = y_2[I_1\cup I_2]\cdot V_1[I_1\cup I_2, I_1\cup I_2]\cdot V_2[I_1\cup I_2, J_1\cup J_2],$$

$$z_2[I_1\cup I_2] = y_2[I_1\cup I_2]\cdot V_1[I_1\cup I_2, I_1\cup I_2],$$

то вычисление $z_1[J_1\cup J_2]$, $z_2[I_1\cup I_2]$ и $y_2[I_1\cup I_2]$ может быть выполнено последовательно по формулам:

$$z_1[J_1] = y_1[J_1],\ z_1[J_2] = y_1[J_2] - y_1[J_1]\cdot\Lambda_1[J_1,J_2],$$

$$z_2[I_1] = z_1[J_1]\cdot V^{-1}[J_1,I_1],\ z_2[I_2] = z_1[J_2]\cdot W^{-1}[J_2,I_2],$$

$$y_2[I_2] = z_2[I_2],\ y_2[I_1] = z_2[I_1] - z_2[I_2]\cdot T_1[I_2,I_1].$$

Здесь опять нужные произведения можно вычислить по формулам:

$$y_1[J_1]\cdot\Lambda_1[J_1,J_2] = y_1[J_1]\cdot V^{-1}[J_1,I_1]\cdot A[I_1,J_2] - X_1[I_0]\cdot A[I_0,J_2],$$

$$z_2[I_2]\cdot T_1[I_2,I_1] = (z_2[I_2]\cdot A[I_2,J_1] - X_2[I_0]\cdot A[I_0,J_1])\cdot V^{-1}[J_1,I_1],$$

где $X_1[I_0]$ и $X_2[I_0]$ определяются как решения систем:

$$X_1[I_0]\cdot A[I_0,J_0] = y_1[J_1]\cdot V^{-1}[J_1,I_1]\cdot A[I_1,J_0],$$

$$X_2[I_0]\cdot A[I_0,J_0] = z_2[I_2]\cdot A[I_2,J_0].$$

Мы рассмотрели подробно решение системы (3). Решение системы (4) может быть получено аналогично, если перейти к транспонированным матрицам. Подчеркнем еще раз, что мы пользовались при решении систем информацией о матрице $A[I_0,J_0]$, хранимой в свойственной для чисто транспортных задач компактной форме, и обратными матрицами $V^{-1}[J_1, I_1]$, $W^{-1}[J_2, I_2]$, привлекая по мере надобности нужные блоки матрицы $A[M, K]$.

Перейдем теперь к вопросу о замене номера $j_0 \in K$ на некоторый номер $j' \in N$. При пересчете хранимой информации происходит изменение выделенных нами пар множеств (I_0, J_0), (I_1, J_1), (I_2, J_2), определяющих матрицы $A[I_0, J_0]$, $V[I_1, J_1]$ и $W[I_2, J_2]$. Это осуществляется в общем случае [I] с помощью двух основных процедур: (I) усечения блока $(I_k\ J_k)$ с соответствующим окаймлением соседнего по старшинству блока (I_{k+1}, J_{k+1}); (П) окаймления блока (I_k, J_k) с усечением блока (I_{k+1}, J_{k+1}). Здесь k принимает значения 0 и I.

При $k=0$ процедуры (I) и (П) имеют ряд особенностей, вызванных спецификой матрицы $A[I_0, J_0]$. Ввиду этого опишем отдельно четыре случая, разбивая процедуру (I) на процедуры (Ia) и (Iб), а процедуру (П) - на процедуры (Па) и (Пб). Во всех случаях номер строки и номер столбца, переходящие с одного уровня на другой, будем обозначать соответственно через i и j.

(Ia). Усечение блока (I_0, J_0) с окаймлением блока $[I_1, J_1]$. Напомним, что в матрице $A[I_0, J_0]$, являющейся матрицей транспортного типа, каждый столбец $A[I_0, j]$ имеет не более двух отличных от нуля компонент, равных + I или - I, причем при двух отличных от нуля компонентах одна из них равна + I, а другая - I. Уже говорилось, что множество J_0 упорядочено, причем упорядочение сделано так, что матрица $A[I_0, J_0]$ обладает свойством треугольности. Это значит, что, перебирая столбцы матрицы $A[I_0, J_0]$ в соответствии с порядком, введенным в J_0, для очередного столбца мы можем встретиться лишь с одной из двух возможностей: а) отлична от нуля только одна компонента столбца $A[I_0, j]$; б) номер i одной из двух отличных от нуля компонент ($A[i,j] \neq 0$) обладает тем свойством, что существует номер $\bar{j}$, предшествующий j, для которого $A[i, \bar{j}] \neq 0$. Этот номер i мы будем называть верхним для j-го столбца, номер же второй отличной от нуля компоненты - нижним. В случае а) номер единственной отличной от нуля компоненты тоже будем называть нижним. При введенном упорядочении любая система вида $\varphi[I_0] \cdot A[I_0, J_0] = F[J_0]$ может быть решена за один просмотр столбцов матрицы $A[I_0, J_0]$ в порядке следования их номеров в J_0, а система вида $A[I_0, J_0] \cdot \Psi[J_0] = G[I_0]$ - за один просмотр в обратном порядке.

При усечении матрицы $A[I_0, J_0]$ входным параметром является номер столбца $j \in J_0$. Оказывается возможным в суженном множестве $\bar{J}_0 = J_0 \setminus \{j\}$ сохранить индуцированный порядок, если выбрать в качестве i нижний номер j-го столбца. Кроме того, таким выбором номера i гарантируется неособенность матрицы $A[I_0 \setminus \{i\}, J_0 \setminus \{j\}]$.

Новая обратная матрица $\bar{V}^{-1}[J_1 \cup \{j\}, I_1 \cup \{i\}]$ получается окаймлением старой обратной матрицы $V^{-1}[J_1, I_1]$:

$$\bar{V}^{-1}[J_1 \cup \{j\}, I_1 \cup \{i\}] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha + \Lambda[j, J_1] \cdot V^{-1}[J_1, I_1] \cdot T[I_1, i] & -\Lambda[j, J_1] \cdot V^{-1}[J_1, I_1] \\ \hline -V^{-1}[J_1, I_1] \cdot T[I_1, i] & V^{-1}[J_1, I_1] \end{array}\right].$$

Поскольку эта и приводимые ниже формулы могут быть проверены простым перемножением матриц, то мы опускаем их вывод. Остановимся лишь на получении окаймляющих элементов. Для нахождения α, $\Lambda[j, J_1]$ и $T[I_1, i]$ следует, в первую очередь, решить системы $\alpha[I_0] \cdot A[I_0, J_0] = E[j, J_0]$, $A[I_0, J_0] \cdot \beta[J_0] = E[I_0, i]$, определив из них $\alpha[I_0]$ и $\beta[J_0]$, являющиеся соответственно j-й строкой и i-м столбцом обратной матрицы $A^{-1}[J_0, I_0]$. После этого, ввиду (1) и (2), имеем $T[I_1, i] = A[I_1, J_0] \cdot \beta[J_0]$, $\Lambda[j, J_1] = \alpha[I_0] \cdot A[I_0, J_1]$ и $\alpha = \alpha[i]$. Обратная матрица $W^{-1}[J_2, I_2]$, как легко убедиться, не изменяется: $\bar{W}^{-1}[J_2, I_2] = W^{-1}[J_2, I_2]$.

(1б). Усечение блока (I_1, J_1) с окаймлением блока (I_2, J_2). При заданном $j \in J_1$ выберем i равным номеру наибольшей по абсолютной величине компоненты строки $V^{-1}[j, I_1]$, что вызвано стремлением получить достаточно неособенной матрицу $V[I_1 \setminus \{i\}, J_1 \setminus \{j\}]$. Преобразования обратных матриц выполняются при этом следующим образом.

$$\bar{V}^{-1}[J_1 \setminus \{j\}, I_1 \setminus \{i\}] = V^{-1}[J_1 \setminus \{j\}, I_1 \setminus \{i\}] -$$

$$- \frac{1}{V^{-1}[j, i]} \cdot V^{-1}[J_1 \setminus \{j\}, i] \cdot V^{-1}[j, I_1 \setminus \{i\}],$$

$$\overline{W}^{-1}[\mathcal{J}_2 \cup \{j\}, I_2 \cup \{i\}] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} V^{-1}[j,i] + \Lambda_1[j,\mathcal{J}_2] \cdot W^{-1}[\mathcal{J}_2, I_2] \cdot T_1[I_2, i] & -\Lambda_1[j,\mathcal{J}_2] \cdot W^{-1}[\mathcal{J}_2, I_2] \\ \hline -W^{-1}[\mathcal{J}_2, I_2] \cdot T_1[I_2, i] & W^{-1}[\mathcal{J}_2, I_2] \end{array} \right],$$

где $\Lambda_1[j,\mathcal{J}_2] = X_3[I_0] \cdot A[I_0,\mathcal{J}_2]$, $T_1[I_2,i] = A[I_2,\mathcal{J}_1] \cdot V^{-1}[\mathcal{J}_1, i] - A[I_2,\mathcal{J}_0] \cdot X_4[\mathcal{J}_0]$, а $X_3[I_0]$ и $X_4[\mathcal{J}_0]$ определяются из систем $X_3[I_0] \cdot A[I_0,\mathcal{J}_0] = V^{-1}[j, I_1] \cdot A[I_1,\mathcal{J}_0]$ и $A[I_0,\mathcal{J}_0] \cdot X_4[\mathcal{J}_0] = A[I_0,\mathcal{J}_1] \cdot V^{-1}[\mathcal{J}_1, i]$.

(IIа). Окаймление блока $(I_0,\mathcal{J}_0)$ с усечением блока $(I_1,\mathcal{J}_1)$.

Входным параметром в данной процедуре является номер строки $i \in I_1$. В качестве $j \in \mathcal{J}_1$ возьмем номер наибольшей по абсолютной величине компоненты строки

$$V[i,\mathcal{J}_1] = A[i,\mathcal{J}_1] - X_5[I_0] \cdot A[I_0,\mathcal{J}_1],$$

где $X_5[I_0]$ - решение системы $X_5[I_0] \cdot A[I_0,\mathcal{J}_0] = A[i,\mathcal{J}_0]$.

Нетрудно проверить, что после усечения получим $\overline{V}^{-1}[\mathcal{J}_1 \setminus \{j\}, I_1 \setminus \{i\}] = V^{-1}[\mathcal{J}_1 \setminus \{j\}, I_1 \setminus \{i\}]$ и $\overline{W}^{-1}[\mathcal{J}_2, I_2] = W^{-1}[\mathcal{J}_2, I_2]$. Остается получить такой порядок в множестве $\mathcal{J}_0 \cup \{j\}$ номеров столбцов, при котором окаймленная матрица $A[I_0 \cup \{i\}, \mathcal{J}_0 \cup \{j\}]$ обладала бы свойством треугольности (при имеющемся порядке в $\mathcal{J}_0$ матрица $A[I_0,\mathcal{J}_0]$ этим свойством обладает). Припишем сначала к упорядоченному множеству $\mathcal{J}_0$ присоединяемый номер j последним. Затем начнем последовательно, начиная с первого, просматривать столбцы матрицы $A[I_0 \cup \{i\}, \mathcal{J}_0 \cup \{j\}]$ и попутно комплектовать упорядоченное множество $\overline{\mathcal{J}}_0$, включая в него номера тех столбцов, при которых матрица $A[I_0 \cup \{i\}, \overline{\mathcal{J}}_0]$ обладает свойством треугольности (до начала просмотра положим $\overline{\mathcal{J}}_0 = \varnothing$). В результате мы получим некоторое множество $\overline{\mathcal{J}}_0 \subset \mathcal{J}_0 \cup \{j\}$, причем $j \in \overline{\mathcal{J}}_0$. Полученное множество $\overline{\mathcal{J}}_0$ не обязательно равно $\mathcal{J}_0 \cup \{j\}$, так как с введением строки i некоторые столбцы, имевшие ранее одну отличную от нуля компоненту, могли стать двухкомпонентными, и условие а) могло оказаться нарушенным. Продолжим описанный процесс расширения множества $\overline{\mathcal{J}}_0$, просматривая на этот раз столбцы матрицы $A[I_0 \cup \{i\}, \mathcal{J}_0 \cup \{j\}]$ в обратном порядке, но исключая из рассмотрения те столбцы, номера которых уже вошли в $\bar{J}_0$. После такого повторного просмотра в множество $\bar{J}_0$ наверняка будет включен номер столбца, для которого номер i является нижним (в упорядочении множества $\bar{J}_0$). Наконец, просматривая еще раз столбцы матрицы $A[I_0 \cup \{i\}, J_0 \cup \{j\}]$ в прямом порядке (и пропуская принадлежащие $\bar{J}_0$), получаем требуемое упорядоченное множество $J_0 \cup \{j\} = \bar{J}_0$.

Заметим, что число просмотров в отдельных случаях может быть уменьшено до двух (либо $A[i,j] \neq 0$, либо столбец $A[I_0,j]$ имеет только одну отличную от нуля компоненту) и даже до одного (единственная отличная от нуля компонента столбца $A[I_0,j]$ имеет номер i). Кроме того, при реализации алгоритма процесс нахождения множества $\bar{J}_0$ естественно совмещать с решением одной из систем вида $\varphi[I_0 \cup \{i\}] \cdot A[I_0 \cup \{i\}, J_0 \cup \{j\}] = F[J_0 \cup \{j\}]$.

(Пб). Окаймление блока (I_1, J_1) с усечением блока (I_2, J_2). Номер $j \in J_2$ при заданном $i \in I_2$ выбирается равным номеру наибольшей по абсолютной величине компоненты строки $W[i, J_2]$, т.е. так же, как и в предыдущем случае. Матрица $A[I_0, J_0]$ этой процедурой не затрагивается. Новая матрица $\bar{V}^{-1}[J_1 \cup \{j\}, I_1 \cup \{i\}]$ получается в данном случае по формуле: $\bar{V}^{-1}[J_1 \cup \{j\}, I_1 \cup \{i\}] =$

$$
= \left[\begin{array}{c|c}
V^{-1}[J_1, I_1] + \dfrac{\Lambda_1[J_1, j] \cdot T_1[i, I_1]}{W[i,j]} & -\dfrac{\Lambda_1[J_1, j]}{W[i,j]} \\
\hline
-\dfrac{T_1[i, I_1]}{W[i,j]} & \dfrac{1}{W[i,j]}
\end{array}\right],
$$

где $\Lambda_1[J_1, j] = V^{-1}[J_1, I_1](A[I_1, j] - A[I_1, J_0] \cdot \Lambda[J_0, j])$, $T_1[i, I_1] = (A[i, J_1] - X_5[I_0] \cdot A[I_0, J_1]) \cdot V^{-1}[J_1, I_1]$, столбец $\Lambda[J_0, j]$ и строка $X_5[I_0]$ являются решениями систем

$$A[I_0, J_0] \cdot \Lambda[J_0, j] = A[I_0, j], \quad X_5[I_0] \cdot A[I_0, J_0] = A[i, J_0],$$

а $W[i, J_2] = A[i, J_2] - X_5[I_0] \cdot A[I_0, J_2] - T_1[i, I_1] \cdot A[I_1, J_2] + X_5'[I_0] \cdot A[I_0, J_2]$, причем $X_5'[I_0]$ - решение системы $X_5'[I_0] \cdot A[I_0, J_0] =$

$=T_1[i,I_1]\cdot A[I_1,J_0]$. Обратная же матрица $\bar{W}^{-1}[J_2\setminus\{j\},I_2\setminus\{i\}]$ совпадает с матрицей $W^{-1}[J_2\setminus\{j\},I_2\setminus\{i\}]$.

Мы описали четыре процедуры, которые применяются при замене номера $j_0\in K$ на номер $j'\in N$. Сама замена этих номеров выполняется различно в зависимости от того, какому из множеств J_0, J_1, J_2 принадлежит номер j_0.

1) Если $j_0\in J_2$, то изменяется только матрица $W^{-1}[J_2,I_2]$. Так как $W[I_2,j']=W[I_2,J_2]\cdot g[J_2]$, где $g[K]$ - решение системы (4), то обратная матрица $W^{-1}[J_2,I_2]$ преобразуется по обычным формулам метода пополнения [9]:

$$\bar{W}^{-1}[J_2\setminus\{j_0\},I_2]=W^{-1}[J_2\setminus\{j_0\},I_2]-g[J_2\setminus\{j_0\}]\cdot W^{-1}[j_0,I_2]/g[j_0],$$

$$\bar{W}^{-1}[j',I_2]=W^{-1}[j_0,I_2]/g[j_0]. \qquad (11)$$

2) Если $j_0\in J_1$, то применим сначала процедуру (Iб) для $j=j_0$ и обозначим через i_0 выбираемый в ней номер i. В результате получим новые пары множеств $(I_1\setminus\{i_0\}, J_1\setminus\{j_0\})$, $(I_2\cup\{i_0\}, J_2\cup\{j_0\})$ для первого и второго блоков и соответствующие им преобразованные обратные матрицы. Нулевой блок (I_0,J_0) остается без изменений. Теперь мы находимся в условиях случая 1), и можно произвести фактическую замену столбца, выполнив пересчет обратной матрицы $W^{-1}[J_2\cup\{j_0\}, I_2\cup\{i_0\}]$ по методу пополнения. Окончить преобразования на этом нельзя, так как множество $\bar{I}_2=I_2\cup\{i_0\}$ не равно множеству $M\setminus I$, т.е. нарушено условие (10). Чтобы исключить номер i_0 из $\bar{I}_2$, применим процедуру (Пб) для $i=i_0$. Для первого и второго блоков получим при этом соответственно новые определяющие их пары множеств $(I_1,(J_1\setminus\{j_0\})\cup j_1)$ и $(I_2,(J_2\cup\{j'\})\setminus j_1)$, где через j_1 обозначен выбираемый в процедуре (Пб) номер j. Если окажется, что $j_1\in N\setminus J$ (выполнено условие (9)), то преобразования закончены. В противном случае следует применить процедуру (Па) для $j=j_1$. Обозначим выбираемый в ней номер i через i_1. Тогда окончательно получим следующее разбиение на блоки $(I_0\cup\{i_1\},J_0\cup\{j_1\})$, $(I_1\setminus\{i_1\}, J_1\setminus\{j_0\})$, $(I_2,(J_2\cup\{j'\})\setminus\{j_1\})$, а также новое упорядоченное множество $J_0\cup\{j_1\}$ и необходимые обратные матрицы.

3) Если $j_0\in J_0$, то применение процедуры (Iа) для $j=j_0$ сводит этот случай к предыдущему.

Л и т е р а т у р а

1. ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. О методе решения задач линейного программирования на основе многоступенчатой блочной структуры с окаймлением. - "Докл. АН СССР", 1974, т. 217, № 2, с. 268-271.
2. ЗВЯГИНА Р.А. Многоступенчатая окаймленность в линейном программировании. - В кн.: Оптимизация, вып. 15(32), Новосибирск, 1974,с.32-49.
3. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном алгорифме решения транспортной задачи. - В кн.: Оптимальное планирование, вып. 2, Новосибирск, 1964, с. 41-49.
4. ЯКОВЛЕВА М.А. Двухкомпонентная задача линейного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование, вып. 2, Новосибирск, 1964, с. 23-40.
5. ШМЫРЕВ В.И. Алгорифм решения одного класса задач линейного программирования большого объема. - В кн.: Оптимальное планирование, вып. 11, Новосибирск, 1968, с. 88-116.
6. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР, М., 1959.
7. ЮДИН Д.Б., ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Линейное программирование. Физматгиз, М., 1969.
8. БУЛАВСКИЙ В.А. О решении одной специальной транспортной задачи с дополнительными ограничениями. - В кн.: Оптимизация, вып. 1/18, Новосибирск, 1971, с. 7-21.
9. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1960.

Поступила в ред.-изд. отд.
27. VI. 1974 г.