1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Численные методы

УДК 512.25/26

УЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ОГРАНИЧЕНИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Н.В.Шмырёва

В статье рассматриваются особенности алгоритма для исследования параметрических задач линейного программирования [I] с двусторонними ограничениями, когда параметр входит в правую часть как общих ограничений задачи, так и ограничений сверху на отдельные переменные. Для задач линейного программирования с ограничениями сверху на переменные известен вариант метода последовательного улучшения, позволяющий решать такие задачи без увеличения размерности запоминаемых матриц [2]. Использование особенностей этого алгоритма для указанного класса параметрических задач позволяет получить для них экономный алгоритм такого же типа.

Рассматриваемая задача имеет следующий вид: требуется найти вектор $x=(x_1,\dots,x_n)$, такой, что

$$\sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b^1 + t b^2, \tag{1}$$

$$0 \le x_j \le d_j^1 + t d_j^2,\ j=1,\dots,n, \tag{2}$$

и достигает минимума функция

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \tag{3}$$

Здесь b^1, b^2, $A^j (j=1,\ldots,n)$ - заданные m-мерные векторы; c_j, d_j^1, d_j^2 $(j=1,\ldots,n)$ - заданные вещественные числа и t - параметр задачи.

Нужно определить решения задачи при всех значениях параметра t из некоторого интервала $[\alpha,\beta]$.

При фиксированном $t\in[\alpha,\beta]$ эту задачу можно решить методом последовательного улучшения допустимого вектора с учетом верхних ограничений. При этом на каждом шаге процесса будем иметь допустимый вектор x и два непересекающихся множества $J_1\subset J$ и $J_2\subset J$ ($J=\{1,2,\ldots,n\}$) таких, что векторы A^j, $j\in J_1$, образуют базис в R^m; $x_j=d_j^1+td_j^2$ при $j\in J_2$ и $x_j=0$ при $j\bar{\in} J_1\cup J_2$.

Для проверки оптимальности на каждом шаге процесса определяется вектор $y=(y_1,\ldots,y_m)$ из условия

$$(y,A^j)=c_j,\ j\in J_1, \tag{4}$$

и проверяются неравенства:

$$(y,A^j)\geq c_j,\ j\in J_2, \tag{5}$$

$$(y,A^j)\leq c_j,\ j\bar{\in} J_1\cup J_2. \tag{6}$$

Пусть при $t_0\in[\alpha,\beta]$ найдено оптимальное решение задачи x^0 и соответствующие ему множества J_1 и J_2. По данным множествам J_1 и J_2 мы можем определить вектор $x(t)$, положив

$$x_j(t)=0,\ j\bar{\in} J_1\cup J_2,$$

$$x_j(t)=d_j^1+td_j^2,\ j\in J_2,$$

а компоненты $x_j(t)$, $j\in J_1$, определив из системы:

$$\sum_{j\in J_1} A^j x_j(t)+\sum_{j\in J_2} A^j(d_j^1+td_j^2)=b^1+tb^2. \tag{7}$$

Ясно, что при $t=t_0$ найденный таким образом вектор $x(t_0)$ совпадает с x^0. Пусть $J_1=\{j_1,\ldots,j_m\}$. Обозначим через B матрицу, составленную из векторов $(A^{j_\ell})_{\ell=1}^{m}$, и через $\bar{x}(t)$ - m-мерный вектор $\{x_{j_\ell}(t)\}_{\ell=1,\ldots,m}$. Тогда (7) можно записать так:

$$B\bar{x}(t)=(b^1-\sum_{j\in J_2}A^j d_j^1)+t(b^2-\sum_{j\in J_2}A^j d_j^2),$$

или

$$\bar{x}(t)=(B^{-1}b^1-\sum_{j\in J_2}B^{-1}A^j d_j^1)+t(B^{-1}b^2-\sum_{j\in J_2}B^{-1}A^j d_j^2).$$

Введем обозначения:

$$\bar{x}^1=B^{-1}b^1-\sum_{j\in J_2}B^{-1}A^j d_j^1,$$

$$\bar{x}^2=B^{-1}b^2-\sum_{j\in J_2}B^{-1}A^j d_j^2.$$

Тогда

$$x_{j_\ell}(t)=\bar{x}_\ell^1+t\bar{x}_\ell^2,\quad \ell=1,\dots,m. \tag{8}$$

До тех пор, пока $x(t)$ остается допустимым, он будет и оптимальным, так как условия признака оптимальности зависят лишь от множеств J_1 и J_2. Предполагается, что отрезок $[\alpha,\beta]$ выбран так, что $d_j^1+td_j^2\geqslant 0$ для всех $j\in J$ и $t\in[\alpha,\beta]$, следовательно, для проверки допустимости достаточно проверить условия (8). Таким образом, из условий (8) устанавливаются границы для параметра t.

Нижняя граница:

$$\underline{t}=\max\begin{cases}\underline{t}'=\max\limits_{x_{j_\ell}^2>0}\left\{-\dfrac{x_{j_\ell}^1}{x_{j_\ell}^2}\right\},\\[2ex] \underline{t}''=\max\limits_{d_{j_\ell}^2-x_{j_\ell}^2>0}\left\{-\dfrac{d_{j_\ell}^1-x_{j_\ell}^1}{d_{j_\ell}^2-x_{j_\ell}^2}\right\};\end{cases}$$

и верхняя граница:

$$\bar{t}=\min\begin{cases}\bar{t}'=\min\limits_{x_{j_\ell}^2>0}\left\{-\dfrac{x_{j_\ell}^1}{x_{j_\ell}^2}\right\},\\[2ex] \bar{t}''=\min\limits_{d_{j_\ell}^2-x_{j_\ell}^2<0}\left\{-\dfrac{d_{j_\ell}^1-x_{j_\ell}^1}{d_{j_\ell}^2-x_{j_\ell}^2}\right\}.\end{cases}$$

Если оказалось, что $x^2_{j_\ell} \le 0$ и $d^2_{j_\ell} - x^2_{j_\ell} \le 0$ для всех $\ell = 1,\dots,m$, то естественно положить $\underline{t} = -\infty$; аналогично, если $x^2_{j_\ell} \ge 0$, $d^2_{j_\ell} - x^2_{j_\ell} \ge 0$ для всех $\ell = 1,\dots,m$, то $\bar{t} = +\infty$. Ясно, что $\underline{t} \le \bar{t}$, так как, по крайней мере, t_0 лежит между $\underline{t}$ и $\bar{t}$. Вектор $x(t)$ является оптимальным для всех значений параметра t из отрезка $[\underline{t}, \bar{t}]$ (который может вырождаться в точку), так как $x(t)$ - допустимый вектор и выполнены условия (4), (5), (6). При $t < \underline{t}$ и $t > \bar{t}$ нарушаются условия (2) для вектора $x(t)$. Если $[\alpha, \beta] \subset [\underline{t}, \bar{t}]$, решение задачи закончено, в противном случае будем увеличивать или уменьшать значение t, переходя к новым множествам $\tilde{J}_1$ и $\tilde{J}_2$ и к новому оптимальному решению $\tilde{x}(t)$.

Рассмотрим этот переход при увеличении параметра t. При определении верхней границы могут представиться два случая:

$$\text{А.}\quad \bar{t} = \bar{t}' = -\frac{x^1_{j_k}}{x^2_{j_k}} \qquad \text{и} \qquad \text{Б.}\quad \bar{t} = \bar{t}'' = -\frac{d^1_{j_k} - x^1_{j_k}}{d^2_{j_k} - x^2_{j_k}}.$$

И в том и в другом случае номер j_k исключается из множества J_1 и заменяется некоторым номером j'. Таким образом, при $t > \bar{t}$ множество J_1 изменяется следующим образом:

$$\tilde{J}_1 = J_1 \cup \{j'\} \setminus \{j_k\}.$$

При этом векторы $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$ и матрица B^{-1} преобразуются, как в обычном модифицированном симплекс-методе. Номер j' и множество J_2 определяются по-разному, в зависимости от того, какой из двух случаев реализуется.

А. Пусть $\bar{t} = \bar{t}' = -\frac{x^1_{j_k}}{x^2_{j_k}}$. Тогда при $t = \bar{t}$ в векторе $x(t)$ компонента $x_{j_k}(t) = \bar{x}^1_k + t\,\bar{x}^2_k$ становится отрицательной. В векторе $\tilde{x}(t)$ верно $\tilde{x}_{j_k}(t) = 0$ и номер j_k, исключаемый из J_1, не будет входить и в $\tilde{J}_2$. Определение номера j' производится с помощью процедуры двойственного метода последовательного улучшения, а именно: ищется новый вектор $\tilde{y} = y + \lambda B^{-1}_k$, для которого будут выполнены условия (5) и (6). Здесь B^{-1}_k - k-я строка матрицы B^{-1}, а $\lambda \le 0$, так как для номера j_k должно выполняться условие (6). Тогда из (5) и (6) получаем:

$$\lambda = \max \begin{cases} \lambda' = \max\limits_{g_k^j<0} \dfrac{\Delta_j}{g_k^j}, & j \bar{\in} J_1 \cup J_2, \\ \lambda'' = \max\limits_{g_k^j>0} \dfrac{\Delta_j}{g_k^j}, & j \in J_2, \end{cases}$$

где $\Delta_j = c_j - (y, A^j)$, а $g_k^j = (B_k^{-1}, A^j)$ - k-й коэффициент разложения вектора A^j по базису.

Если окажется, что $\lambda = \lambda' = \dfrac{\Delta_{j'}}{g_k^{j'}}$, то это означает, что номер j', включаемый нами в множество $\tilde{J}_1$, берется не из множества J_2, и так как номер j_k в нашем случае не попадает в $\tilde{J}_2$, то $\tilde{J}_2 = J_2$.

Если же $\lambda = \lambda'' = \dfrac{\Delta_{j'}}{g_k^{j'}}$, то номер j' нашелся среди элементов множества J_2 и $\tilde{J}_2 = J_2 \setminus \{j'\}$.

Б. Пусть теперь $\bar{t} = \bar{t}'' = -\dfrac{d_{j_k}^1 - x_{j_k}^1}{d_{j_k}^2 - x_{j_k}^2}$. Тогда в векторе $x(t)$ компонента $x_{j_k}(t) = \bar{x}_k^1 + t\bar{x}_k^2$ при $t > \bar{t}$ становится больше своей верхней границы $d_{j_k}^1 + t d_{j_k}^2$. В векторе $\tilde{x}(t)$ будет $\tilde{x}_{j_k}(t) = d_{j_k}^1 + t d_{j_k}^2$. Так как $j_k \bar{\in} \tilde{J}_1$, то $j_k \in \tilde{J}_2$. Как и выше, номер j' определяется с помощью процедуры двойственного метода последовательного улучшения. Находим вектор $\tilde{y}$ в виде $\tilde{y} = y + \lambda B_k^{-1}$, определяя величину λ из условий (5), (6) и условия $(\tilde{y}, A^{j_k}) \geq c_{j_k}$, из которого следует, что $\lambda \geqslant 0$. Тогда из (5) и (6) получаем

$$\lambda = \min \begin{cases} \lambda' = \min\limits_{g_k^j>0} \dfrac{\Delta_j}{g_k^j}, & j \bar{\in} J_1 \cup J_2, \\ \lambda'' = \min\limits_{g_k^j<0} \dfrac{\Delta_j}{g_k^j}, & j \in J_2, \end{cases}$$

где, как и раньше, $\Delta_j = c_j - (y, A^j)$, $g_k^j = (B_k^{-1}, A^j)$.

Если $\lambda = \lambda' = \dfrac{\Delta_{j'}}{g_k^{j'}}$, то элемент j', который будет включен в множество $\tilde{J}_1$, нашелся не в J_2, и так как $j_k \in \tilde{J}_2$, то $\tilde{J}_2 = J_2 \cup \{j_k\}$.

Если же $\lambda = \lambda'' = \frac{\Delta_{j'}}{q_{\ell}^{j'}}$, то это значит, что номер j' переходит в $\tilde{J}_1$ из множества J_2 и $\tilde{J}_2 = J_2 \cup \{j_\ell\} \setminus \{j'\}$.

После того, как будут найдены множества $\tilde{J}_1$, $\tilde{J}_2$ и вектор $\tilde{x}(t)$, можно определить границу оптимальности для этого вектора. Доказательство того, что $\tilde{x}(t)$ будет оптимальным хотя бы для одного значения параметра t и что интервалы оптимальности примыкают друг к другу, т.е. $\bar{t} = \underline{t}$, проводится аналогично доказательству этих фактов для параметрической задачи без ограничений сверху. В способах преодоления вырождения также принципиальных отличий нет.

В заключение укажем одну из возможных ситуаций, в которой возникают задачи указанного класса. При решении больших задач линейного программирования методами, основанными на идеях разложения правой части ограничений [3], на каждом шаге процесса возникает задача определения длины шага по выбранному направлению вариации параметров разложения. В случае узкоблочных задач эта задача может быть решена с помощью описанного алгоритма.

Литература

1. ГАСС С. Линейное программирование. Физматгиз, 1961.
2. ЮДИН Д.Б. и ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Линейное программирование. Физматгиз, М., 1963, с. 346-357.
3. ПЕРВОЗВАНСКАЯ Т.Н., ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А. Алгоритм поиска оптимального распределения централизованных ресурсов. -"Известия АН СССР, Техническая кибернетика",1966, № 3, с.16-19.

Поступила в ред.-изд.отд.
10. VI. 1974 г.