1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Численные методы

УДК 512.25/26

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ В ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА МНОГОГРАННОЕ МНОЖЕСТВО

А.И.Лобырев

В статье рассматриваются три варианта метода, ранее изложенного автором [5]. Этот метод позволяет находить точку множества $R \subset E^n$, ближайшую к некоторой заданной точке $x^0 \in E^n$. Рассматриваются случаи, когда множество R задано системой равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} &(a_i, x) \geq b_i \, , \ i \in I \setminus \bar{I}, \\ &(a_i, x) = b_i \, , \ i \in \bar{I}. \end{aligned} \tag{1}$$

Для сокращения формул везде будем предполагать, что $|a_i| = 1$, $i \in I$.

Пусть A_i - множество, заданное i-м ограничением системы (1). Рассмотрим следующий итеративный процесс. Берем произвольное множество $Q_0 \supset R$, выбираем номер $i(x^0)$ и в множестве $Q_0 \cap A_{i(x^0)}$ находим точку x^1, ближайшую к x^0. В качестве множества $Q_1 \supset Q_0 \cap A_{i(x^0)}$ выберем такое множество, что точка x^1 тоже является ближайшей к x^0 в множестве Q_1. Затем выберем $i(x^1)$ и в множестве $Q_1 \cap A_{i(x^1)}$ найдем точку x^2, ближайшую к x^0, и т.д. Возможны различные варианты этого метода, отличающиеся друг от друга правилом выбора индекса $i(x^0)$ и множеств Q_y. Описанные ниже итеративные процессы построены так, что вспомогательные множества Q_y определяются некоторыми следствиями системы (1). Схема доказательства сходимости этих процессов приведена в цитированной выше работе автора.

Обозначив через $\bar{x}$ предельную точку процесса, введем в рассмотрение множество индексов

$$I(\bar{x}) = \bar{I} \cup \{i : (a_i, \bar{x}) = b_i,\ i \in I \setminus \bar{I}\}. \tag{2}$$

Если $i \in I(\bar{x})$, то соответствующее ограничение системы (I) называется существенным, а если $i \in I \setminus I(\bar{x})$ - несущественным. Исследования показали, что если в формировании множеств Q_ν участвуют несущественные ограничения, то скорость сходимости итеративного процесса может оказаться очень малой. Поэтому желательно построить итеративный процесс так, чтобы, начиная с какого-то момента, в определении множеств Q_ν участвовали только существенные ограничения. Тогда при $h^\nu = x^\nu - \bar{x}$ оказывается

$$|h^\nu|^2 = |h^0|^2 - |h^0 - h^\nu|^2,\ |h^{\nu+1}|^2 = |h^0|^2 - |h^0 - h^{\nu+1}|;\ |h^0 - h^{\nu+1}|^2 = |h^0 - h^{\nu+1}|^2 - |h^0 - h^\nu|^2 - 2(h^{\nu+1} - h^\nu, h^\nu - h^0) \le |h^0 - h^{\nu+1}|^2 - |h^0 - h^\nu|^2,$$

откуда находим

$$|h^\nu|^2 - |h^{\nu+1}|^2 \ge |h^\nu - h^{\nu+1}|^2$$

или

$$|h^\nu|^2 - |h^{\nu+k}|^2 \ge \sum_{i=1}^{k} |h^{\nu+i-1} - h^{\nu+i}|^2.$$

Так как

$$|h^0 - h^{\nu+k}|^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{k} |h^{\nu+i-1} - h^{\nu+i}|\Big)^2 = \sum_{i=1}^{k} |h^{\nu+i-1} - h^{\nu+i}|^2 + 2\sum_{j\ne s} |h^{\nu+j-1} - h^{\nu+j}| \cdot |h^{\nu+s-1} - h^{\nu+s}| \le \sum_{i=1}^{k} |h^{\nu+i-1} - h^{\nu+i}|^2 + \sum_{j\ne s} \big(|h^{\nu+j-1} - h^{\nu+s}|^2 + |h^{\nu+s-1} - h^{\nu+s}|^2\big) = k\sum_{i=1}^{k} |h^{\nu+i-1} - h^{\nu+i}|^2,$$

то

$$|h^\nu|^2 - |h^{\nu+k}|^2 \ge \frac{1}{k} |h^\nu - h^{\nu+k}|^2, \tag{3}$$

для любого $k \ge 1$.

Нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1. Для всякого конечного конуса $\Gamma \subset E^n$ с образующими $a_s \neq 0,\ s=1,2,\dots,r$, существует число $\gamma > 0$ такое, что $\max\limits_{s=1,2,\dots,r} (h, a_s) \geq \gamma |h|$ при любом $h \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено, например, в [2].

ЛЕММА 2. Пусть $M = \{x \in E^n : (x, a_i) \geq 0,\ i=1,2,\dots,m\}$, L - линейная оболочка векторов $a_i,\ i=1,2,\dots,m$, и Q - такой замкнутый конус, что $Q \cap M = \{x \in E^n : (x, a_i) = 0,\ i=1,2,\dots,m\}$. Тогда существует такое число $\gamma > 0$, что $\max\limits_{i=1,2,\dots,m} \{-(h, a_i)\} \geq \gamma |h|$ при любом $h \in Q \cap L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для каждого ν найдется $h^\nu \in Q \cap L$ такой, что $|h^\nu| = 1$ и $-(h^\nu, a_i) \leq \frac{1}{\nu}$ при $i=1,2,\dots,m$. Для предельной точки h^* последовательности $\{h^\nu\}$ тогда получим: $h^* \in Q \cap L$, $|h^*| = 1$. При этом $(h^*, a_i) \geq 0$ для $i=1,2,\dots,m$, т.е. $h^* \in Q \cap L \cap M$.

Но $h^* = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, так что $|h^*|^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i (h^*, a_i) = 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 1. Первый вариант метода

Для простоты изложения будем считать, что множество R задано системой неравенств

$$(a_i, x) \geq b_i,\quad i \in I = \{1,2,\dots,m\}. \tag{4}$$

Рассмотрим следующий итеративный процесс. Начинаем с некоторой точки $x^0 \in E^n$. Если точка $x^\nu \in E^n$ и множество Q_ν уже получены, то, выбрав некоторым образом индекс $i(x^\nu)$, находим в множестве $Q_\nu \cap \{x \in E^n : (a_{i(x^\nu)}, x) \geq b_{i(x^\nu)}\}$ точку $x^{\nu+1}$, ближайшую к x^0. Множество Q_ν на каждом шаге определяется двумя линейными неравенствами $(P_1^{(\nu)}, x) \geq b_1^{(\nu)}$, $(P_2^{(\nu)}, x) \geq b_2^{(\nu)}$. Здесь $P_1^{(\nu)} = \sum_{i \in I_1^{(\nu)}} \bar{V}_i^{(\nu)} a_i$, $P_2^{(\nu)} = \sum_{i \in I_2^{(\nu)}} \bar{\bar{V}}_i^{(\nu)} a_i$,

$$b_1^{(\nu)}=\sum_{i\in I_1^{(\nu)}}\bar{V}_i^{(\nu)}b_i, \qquad b_2^{(\nu)}=\sum_{i\in I_2^{(\nu)}}\bar{\bar{V}}_i^{(\nu)}b_i,$$

где все $\bar{V}_i^{(\nu)}>0$ и $\bar{\bar{V}}_i^{(\nu)}>0$, а $I_2^{(\nu)}\subset I^{(\nu)}\subset I$. Таким образом, множество, на которое осуществляется проектирование, описывается системой:

$$
\begin{aligned}
(P_1^{(\nu)},x) &\geq b_1^{(\nu)}, \\
(P_2^{(\nu)},x) &\geq b_2^{(\nu)}, \qquad\qquad (5)\\
(a_{i(x^\nu)},x) &\geq b_{i(x^\nu)}.
\end{aligned}
$$

При нахождении точки $x^{\nu+1}$ получаются неотрицательные оценки ψ, χ, φ ограничений (5), для которых $x^{\nu+1}=x^0+\psi P_1^{(\nu)}+\chi P_2^{(\nu)}+\varphi a_{i(x^\nu)}$. При этом оценки несущественных (в точке $x^{\nu+1}$) ограничений равны нулю. В нашем процессе $(P_1^{(\nu)},x^\nu)=b_1^{(\nu)}$, $(P_2^{(\nu)},x^\nu)=b_2^{(\nu)}$ и $(a_{i(x^\nu)},x^\nu)<b_{i(x^\nu)}$. Поэтому всегда $\varphi>0$. В остальном возможны четыре случая.

1. Если $\psi>0$, $\chi>0$, то новое множество $Q_{\nu+1}$ получаем по следующему правилу:

а) если $i(x^\nu)\in I_1^{(\nu)}$, то $P_2^{(\nu+1)}=P_2^{(\nu)}+\frac{\varphi}{\chi}a_{i(x^\nu)}$, $b_2^{(\nu+1)}=b_2^{(\nu)}+\frac{\varphi}{\chi}b_{i(x^\nu)}$, $P_1^{(\nu+1)}=P_1^{(\nu+1)}$, $b_1^{(\nu+1)}=b_1^{(\nu)}$, $I_1^{(\nu+1)}=I_1^{(\nu)}$;

если при этом $i(x^\nu)\in I_2^{(\nu)}$, то $I_2^{(\nu+1)}=T_2^{(\nu)}$, $\qquad$ (6)

иначе $I_2^{(\nu+1)}=I_2^{(\nu)}\cup\{i(x^\nu)\}$;

б) если $i(x^\nu)\notin I_1^{(\nu)}$, то $P_1^{(\nu+1)}=P_1^{(\nu)}+\frac{\varphi}{\psi}a_{i(x^\nu)}$, $b_1^{(\nu+1)}=b_1^{(\nu)}+\frac{\varphi}{\psi}b_{i(x^\nu)}$, $P_2^{(\nu+1)}=P_2^{(\nu)}$, $b_2^{(\nu+1)}=b_2^{(\nu)}$, $I_2^{(\nu+1)}=I_2^{(\nu)}$, $I_1^{(\nu+1)}=I_1^{(\nu)}\cup\{i(x^\nu)\}$.

2. Если $\psi=0$, $\chi=0$, то делаем замены $\chi\Rightarrow\psi$, $1\Rightarrow\chi$, $I_2^{(\nu)}\Rightarrow I_1^{(\nu)}$, $P_2^{(\nu)}\Rightarrow P_1^{(\nu)}$, $0\Rightarrow P_2^{(\nu)}$, $b_2^{(\nu)}\Rightarrow b_1^{(\nu)}$, $\phi\Rightarrow I_2^{(\nu)}$, $0\Rightarrow b_2^{(\nu)}$ и применим преобразование (6).

3. Если $\psi > 0$, $\chi = 0$, то делаем замены $\phi \Rightarrow I_2^{(\nu)}$, $1 \Rightarrow \chi$, $0 \Rightarrow P_2^{(\nu)}$, $0 \Rightarrow b_2^{(\nu)}$ и применим преобразование (6).

4. Если $\psi = 0$, $\chi = 0$, то полагаем $P_1^{(\nu+1)} = a_{i(x^\nu)}$,

$$b_1^{(\nu+1)} = b_{i(x^\nu)},\ I_1^{(\nu+1)} = \{i(x^\nu)\},\ I_2^{(\nu+1)} = \phi,\ P_2^{(\nu+1)} = 0,\ b_2^{(\nu+1)} = 0.$$

В качестве множества Q_0 можно взять все E^n, т.е. положить $I_1^{(0)} = I_2^{(0)} = \phi$.

В силу сходимости [5] описанного процесса, существует такой номер N, что при $\nu < N$ в итерациях участвуют только ограничения с номерами $i(x^\nu)$ из $I(\bar{x})$. Для номеров $\nu \geqslant N$ справедлива следующая

ЛЕММА I.I. 1) Если $I_1^{(\nu)} \cap (I \setminus I(\bar{x})) \neq \phi$, то на некотором шаге с номером $\bar{\nu} \geqslant \nu$ окажется $\psi = 0$.

2) Существует номер $\bar{N} \geqslant N$ такой, что при

$$\nu \geqslant \bar{N} \quad I_1^{(\nu)} \cap (I \setminus I(\bar{x})) = I_2^{(\nu)} \cap (I \setminus I(\bar{x})) = \phi .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что

$$I_1^{(\nu)} \cap (I \setminus I(\bar{x})) \neq \phi \tag{7}$$

и, начиная с некоторого номера $N_1 \geqslant N$, ограничение $(P_1^{(\nu)}, x) \geqslant b_1^{(\nu)}$ не меняется. Ввиду (7), $(P_1^{(\nu)}, \bar{x}) - b_1^{(\nu)} = \tau_1 > 0$, и в силу сходимости итерационного процесса, начиная с некоторого шага $\bar{\nu} \geqslant N_1$, это ограничение становится несущественным, т.е. $\psi = 0$. Если при этом реализовался случай 2 и снова оказалось $I_1^{(\nu)} \cap (I \setminus I(\bar{x})) \neq \phi$, то, повторив рассуждения, докажем, что, начиная с некоторого номера $\bar{N}$, всегда выполняется $I_1^{(\nu)} \cap (I \setminus I(\bar{x})) = I_2^{(\nu)} \cap (I \setminus I(\bar{x}) = \phi$. Лемма доказана.

Таким образом, при $\nu \geqslant \bar{N}$ итерационный процесс полностью определяется системой неравенств

$$(a_i, x) \geqslant b_i, \quad i \in I(\bar{x}). \tag{8}$$

Для исследования скорости сходимости сделаем замену переменных: $x = h + \bar{x}$. Тогда система (8) заменится системой

$$(a_i, h) \geqslant 0, \quad i \in I(\bar{x}), \tag{9}$$

множество решений которой обозначим через M. Положим $h^0 =$

$=x^0-\bar{x}$, $Q=\{x:(h^0,x)\geq 0\}$, $S=M\cap Q\cap\{h:|h|^2\leq 1\}$

и $I^*(\bar{x})=\{i\in I(\bar{x}): \sup\limits_{h\in S}(a_i,h)>0\}$. В этих обозначениях справедлива следующая

ЛЕММА I.2. $h^0=-\sum\limits_{i\in I(\bar{x})\setminus I^*(x)}\alpha_i a_i$, где $\alpha_i\geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $(-h^0,h)\geq 0$ является следствием системы (9). Поэтому $-h^0=\sum\limits_{i\in I(\bar{x})}\alpha_i a_i$ при $\alpha_i\geq 0$. Предположим, что $\alpha_{i_0}>0$ при некотором $i_0\in I^*(\bar{x})$. Тогда

$$0<\alpha_{i_0}\sup_{h\in S}(a_{i_0},h)\leq\sup_{h\in S}(-h^0,h)\leq\sup_{h\in Q}(-h^0,h)=0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим два способа выбора очередного индекса $i(x^\nu)$.

I. Пусть $I=\{1,2,\ldots,m\}$. Будем брать индексы в циклическом порядке, пропуская те, для которых неравенство в текущей точке выполнено.

II. Определим последовательность $\{B(x^\nu)\}$, задав произвольно $B(x^0)$ и положив $B(x^\nu)=\min\{B(x^{\nu-1}),\eta\max\limits_{i\in I}(b_i-(x^\nu,a_i))\}$, где $0<\eta<1$. В качестве $i(x^\nu)$ выберем первый индекс, для которого выполняется условие $b_i-(x^\nu,a_i)\geq B(x^\nu)$. Если множество индексов $I^*(\bar{x})=\emptyset$, то справедлива следующая

ТЕОРЕМА I.3. I. При циклическом способе выбора очередного индекса $i(x^\nu)$ в последовательности $\{x^\nu\}$, сходящейся к $\bar{x}$, подпоследовательность $\{x^{\nu_N}\}$, в которую включены члены x^ν соответствующие началам циклических просмотров, сходится не медленнее чем геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt{1-\frac{1}{m}\gamma^2}$.

П. Если индекс $i(x^\nu)$ выбирается с помощью барьера, т.е. вторым способом, то последовательность $\{x^\nu\}$ сходится к точке $\bar{x}$ не медленней чем геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt{1-\eta^2\gamma^2}$, где γ не зависит от выбора η.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Будем считать, что $\nu \geq \bar{N}$, где $\bar{N}$ - номер, гарантированный леммой I.I. Докажем первое утверждение. Так как $\nu \geq \bar{N}$, то $I_2^{(\nu)} \subset I_1^{(\nu)} \subset I(\bar{x})$ и вектор $h^\nu = x^\nu - \bar{x}$ принадлежит линейной оболочке L векторов $a_i, i \in I(\bar{x})$. Поэтому, по лемме 2, выбрав снова $Q=\{x:(h^\circ, x)\geq 0\}$, получаем, что $\max_{i\in I(\bar{x})}\{-(a_i, h^\nu)\} = -(a_{i_0}, h^\nu) \geq \gamma|h^\nu|$, где $\gamma > 0$ определяется лишь коэффициентами задачи. Поскольку за полный цикл мы побываем в каждом полупространстве $(a_i, x) \geq b_i$, $i\in I(\bar{x})$, то найдется такой номер k, $\nu_\mu < k \leq \nu_{\mu+1}$, что $(a_{i_0}, x^k) \geq b_{i_0}$. Используя соотношение (3), получим

$$\frac{|h^k|^2}{|h^\nu|^2} \leq \frac{|h^\nu|^2 - \frac{1}{m}|h^\nu - h^k|^2}{|h^\nu|^2} \leq \frac{|h^\nu|^2 - \frac{1}{m}\gamma^2|h^\nu|^2}{|h^\nu|^2} = 1 - \frac{1}{m}\gamma^2.$$

Следовательно, $\dfrac{|h^{\nu_{\mu+1}}|}{|h^{\nu_\mu}|} < \sqrt{1-\frac{1}{m}\gamma^2}$.

II. Пусть $\nu \geq \bar{N}$ и очередной индекс $i(x^\nu)$ выбирается по способу II. Обозначим через $\{S_k\}$ подпоследовательность номеров, на которых меняется барьер, т.е.

$$B(h^{S_k}) = \min\{B(h^{S_{k-1}}), \eta \max_{i\in I(\bar{x})}\{-(a_i, h^{S_k})\}\} =$$

$$= \eta_i \max_{i\in I(\bar{x})}\{-(a_i, h^{S_k})\} \geq \eta\gamma|h^{S_k}|.$$

Используя (3), получаем

$$\frac{|h^{\nu+1}|^2}{|h^\nu|^2} \leq \frac{|h^\nu|^2 - |h^\nu - h^{\nu+1}|^2}{|h^\nu|^2} \leq \frac{|h^\nu|^2 - \eta^2\gamma^2|h^\nu|^2}{|h^\nu|^2} = 1 - \eta^2\gamma^2,$$

где $\bar{N} \leq S_k \leq \nu < S_{k+1}$. Теорема доказана.

§ 2. Второй вариант метода

Пусть требуется найти точку множества $R \subset E^n$, ближайшую к заданной точке x^0. Множество R в рассматриваемом случае задается системой ограничений:

$$(a_i, x) = b_i\ ,\quad i \in I = \{1, 2, \dots, m\},$$
$$x_j \geq 0\ ,\quad j \in J. \tag{10}$$

Здесь a_i – векторы из E^n, x_j – компоненты вектора $x \in E^n$. На шаге с номером ν итерационного процесса множество Q_ν будем задавать такой системой ограничений:

$$(P^\nu, x) = b^\nu,$$
$$x_j \geq 0\ ,\ j \in J,$$

где $P^\nu = \sum\limits_{i \in I} v_i a_i$, $b^\nu = \sum\limits_{i \in I} v_i b_i$.

Шаг состоит из следующих этапов.

1. Выбирается очередной индекс $i(x^\nu)$.

2. Ищется проекция точки x^0 на множество $Q_\nu \cap \{x : (a_{i(x^\nu)}, x) = b_{i(x^\nu)}\}$, т.е. на множество решений системы:

$$(P^\nu, x) = b^\nu,$$
$$(a_{i(x^\nu)}, x) = b_{i(x^\nu)}\ , \tag{11}$$
$$x_j \geq 0,\ j \in J.$$

В результате проектирования получим точку $x^{\nu+1}$ и веса ограничений системы (11) соответственно φ , ψ . Новое множество $Q_{\nu+1}$ будет иметь вид:

$$(P^{\nu+1}, x) = b^{\nu+1},$$
$$x_j \geq 0,\ j \in J,$$

где $P^{\nu+1} = \varphi P^\nu + \psi a_{i(x^\nu)}$, $b^{\nu+1} = \varphi b^\nu + \psi b_{i(x^\nu)}$. Для описанного итерационного процесса верна следующая

ТЕОРЕМА 2.1. При циклическом переборе в последовательности $\{x^\nu\}$, сходящейся к $\bar{x}$, подпоследовательность $\{x^{\nu_\mu}\}$, в которую включены члены x^ν, соответствующие началам циклических просмотров, сходится не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt{1-\frac{1}{m}\gamma^2}$.

При втором способе выбора очередного номера $i(x^\nu)$ последовательность сходится не медленней чем геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt{1-p^2\gamma^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{J}(\bar{x})=\{j:\bar{x}_j=0\}$. Будем считать ν настолько большим, что $x_j^\nu>0$ при $j\notin\mathcal{J}(\bar{x})$. Заменой переменных $x=h+\bar{x}$, как и раньше, от системы (10) можно перейти к системе:

$$\begin{aligned}&(a_i,h)=0,\quad i\in I,\\ &h_j\geq 0,\quad j\in\mathcal{J}(\bar{x}).\end{aligned}\tag{12}$$

В нашем случае вектор $h^\nu=x^\nu-\bar{x}$, как нетрудно проверить, принадлежит конической оболочке Γ векторов a_i, $-a_i$, $i\in I$; $-e_j$, $j\in\mathcal{J}(\bar{x})$; e_j, $j\in\mathcal{J}(x^\nu)=\{j:x_j^\nu=0\}$.

Поэтому, по лемме I,

$$\begin{aligned}&\max\{\max_{i\in I}|(a_i,h^\nu)|,\max_{j\in\mathcal{J}(\bar{x})}-h_j^\nu,\max_{j\in\mathcal{J}(x^\nu)}h_j^\nu\}=\\ &=\max_{i\in I}|(a_i,h^\nu)|\geq\gamma|h^\nu|.\end{aligned}\tag{13}$$

Здесь в качестве γ взята наименьшая из границ, гарантируемых леммой I для различных множеств $\mathcal{J}(x^\nu)$.

Пусть $i(x^\nu)$ выбирается циклически и i_0 - номер уравнения системы (12), для которого $|(a_{i_0},h^\nu)|=\max_{i\in I}|(a_i,h^\nu)|$. Поскольку за полный цикл мы побываем на каждом ограничении $(a_i,x)=b_i$, $i\in I$, то в очередном цикле проектирования найдется такой номер k, $\nu_\mu<k\leq\nu_{\mu+1}$, что $(a_{i_0},x^k)=b_{i_0}$. Тогда, используя (3) и (13), получаем:

$$\frac{|h^k|^2}{|h^{\nu_\mu}|} \le \frac{|h^{\nu_\mu}|^2 - \frac{1}{m}|h^{\nu_\mu} - h^k|^2}{|h^{\nu_\mu}|^2} \le$$

$$\le \frac{|h^{\nu_\mu}|^2 - \frac{1}{m}\gamma^2|h^{\nu_\mu}|^2}{|h^{\nu_\mu}|^2} = 1 - \frac{1}{m}\gamma^2,$$

т.е. $$\frac{|h^{\nu_{\mu+1}}|}{|h^{\nu_\mu}|} \le \sqrt{1 - \frac{1}{m}\gamma^2}.$$

Пусть в качестве очередного индекса $i(x^\nu)$ берется первый индекс, для которого выполняется условие $|b_i - (x^\nu, a_i)| \ge B(x^\nu)$, где $B(x^\nu) = \min\{B(x^{\nu-1}), \eta \max_{i\in I}|b_i - (x^\nu, a_i)|\}$, а $B(x^0)$, как и раньше, произвольно. Обозначим через $\{\nu_\mu\}$ подпоследовательность номеров, на которых меняется барьер, т.е.

$$B(x^{\nu_\mu}) = \eta \max_{i\in I}|b_i - (a_i, x^{\nu_\mu})| = \eta \max_{i\in I}|(a_i, h^{\nu_\mu})|.$$

Тогда

$$\frac{|h^{\nu+1}|^2}{|h^\nu|^2} \le \frac{|h^\nu|^2 - |h^\nu - h^{\nu+1}|^2}{|h^\nu|^2} \le \frac{|h^\nu|^2 - \eta^2\gamma^2|h^{\nu_\mu}|^2}{|h^\nu|^2} \le$$

$$\le 1 - \eta^2, \qquad \frac{|h^{\nu+1}|}{|h^\nu|} \le \sqrt{1 - \eta^2\gamma^2},$$

где $\nu_\mu \le \nu < \nu_{\mu+1}$. Теорема доказана.

§ 3. Третий вариант метода

Ищется решение системы линейных неравенств

$$(a_i, x) \ge b_i, \quad i = I = \{1, 2, \ldots, m\}, \qquad (14)$$

ближайшее к заданной точке $x^0 \in E^n$. На каждом шаге итерационного процесса множество Q_ν, вдоль которого осуществляется проектирование, определяется неравенством

$$\Big(\sum_{i\in I_\nu} V_i^{(\nu)} a_i, x\Big) \ge \sum_{i\in I_\nu} V_i^{(\nu)} b_i,$$

где все $V_i^{(\nu)} > 0$, $i \in I_\nu \subset I$. Предположим, что мы выбрали очередной индекс $i(x^\nu)$.

1. Если $i(x^\nu)\in I\setminus I_\nu$, то в качестве $x^{\nu+1}$ берем точку множества $Q_\nu\cap\{x:(a_{i(x^\nu)},x)\geq b_{i(x^\nu)}\}$, ближайшую к x^0. В результате проектирования, как и раньше, получаем оценки ψ и φ ограничений:

$$(\sum_{i\in I_\nu} V_i^{(\nu)} a_i, x)\geq \sum_{i\in I_\nu} V_i^{(\nu)} b_i,$$

$$(a_{i(x^\nu)}, x)\geq b_{i(x^\nu)}.$$

Если $\psi=0$, то полагаем $I_{\nu+1}=\{i(x^\nu)\}$, а $V_{i(x^\nu)}^{(\nu+1)}=\varphi$; в противном случае $I_{\nu+1}=I_\nu\cup\{i(x^\nu)\}$, $V_{i(x^\nu)}^{(\nu+1)}=\varphi$, а $V_i^{(\nu+1)}=\psi V_i^{(\nu)}$ для $i\in I_\nu$.

2. Когда $i(x^\nu)\in I_\nu$, то проектируем на множество, заданное неравенствами:

$$(\sum_{i\in I_\nu\setminus\{i(x^\nu)\}} V_i^{(\nu)} a_i, x)\geq \sum_{i\in I_\nu\setminus\{i(x^\nu)\}} V_i^{(\nu)} b_i,$$

$$(a_{i(x^\nu)}, x)\geq b_{i(x^\nu)}. \qquad (15)$$

Помимо точки $x^{\nu+1}$, получаются оценки ограничений системы (15) соответственно ψ и φ. Пусть $\psi>0$. Если $\varphi>0$, то полагаем $I_{\nu+1}=I_\nu$, $V_i^{(\nu+1)}=\psi V_i^{(\nu)}$, для $i\in I_{\nu+1}\setminus\{i(x^\nu)\}$, а $V_i^{(\nu+1)}=\varphi$; если же $\varphi=0$, то $I_{\nu+1}=I_\nu\setminus\{i(x^\nu)\}$, а $V_i^{(\nu+1)}=V_i^{(\nu)}$, для $i\in I_{\nu+1}$. Если же $\psi=0$, то полагаем $I_{\nu+1}=\{i(x^0)\}$, $V_{i(x^\nu)}^{\nu+1}=\varphi$.

Таким образом, мы либо проектируем на выбранное ограничение с номером $i(x^\nu)$, либо это ограничение выбрасывается из определения множества $Q_{\nu+1}$. Число стоящих подряд выбрасываний не больше числа неравенств в системе (14). Выбирать очередной индекс $i(x^\nu)$ будем одним из следующих способов.

I. Индексы перебираются в циклическом порядке.

II. Определим последовательность $\{B(x^\nu)\}$, задав произвольно $B(x^0)$ и положив $B(x^\nu)=\min\{B(x^{\nu-1}),\eta\cdot\max\{\max_{i\in I\setminus I_\nu}(b_i-(a_i,x^\nu)),\ \max_{i\in I_\nu}|(b_i-(a_i,x^\nu)|\}\}$, где $0<\eta\leq 1$. В качестве $i(x^\nu)$ выберем первый индекс, для которого выполняется одно из условий:

$$\begin{cases} b_i - (a_i, x^\nu) \geq B(x^\nu), i \in I \setminus I_\nu, \\ |b_i - (a_i, x^\nu)| \geq B(x^\nu), i \in I_\nu. \end{cases}$$

ЛЕММА 3.1. Найдется такое число $\bar{N}$, что $I_\nu \cap (I \setminus I(\bar{x})) = \emptyset$ при $\nu \geq \bar{N}$. Здесь $\bar{x}$ - предельная точка последовательности $\{x^\nu\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сходимости описанного процесса, для шара с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в точке $\bar{x}$ можно указать такое число $N(\varepsilon)$, что при $\nu \geq N(\varepsilon)$ все члены последовательности $\{x^\nu\}$ попадут в этот шар. Возьмем $\varepsilon = (\min_{i \in I \setminus I(\bar{x})} (a_i, x) - b_i)) / 3$. Допустим, что еще $I_{N(\varepsilon)} \cap (I \setminus I(\bar{x})) \neq \emptyset$. Тогда $\bar{N} \leq N(\varepsilon) + m$ при первом способе выбора индекса $i(x^\nu)$. При втором способе выбора индекса $i(x^\nu)$ получим $\bar{N} \leq \max\{N(\varepsilon), \min_{B(x^{s_k}) \leq 2/3 \cdot \varepsilon} s_k\} + m$, где последовательность номеров s_k такова, что

$$B(x^{s_k - 1}) > B(x^{s_k}). \tag{16}$$

Заметим, что $\min_{B(x^{s_k}) \leq 2/3} s_k < +\infty$, так как система (14) совместна. Лемма доказана.

Таким образом, для достаточно далеких шагов заменой $x = h + \bar{x}$ можно систему (14) свести к системе однородных неравенств

$$(a_i, h) \geq 0, \quad i \in I(\bar{x}).$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\nu \geq \bar{N}$. При циклическом выборе индекса $i(x^\nu)$ для подпоследовательности $\{x^{\nu_k}\}$ последовательности $\{x^\nu\}$, образованной членами, соответствующими началам циклических просмотров, имеет место неравенство

$$\frac{|x^{\nu_{k+2}} - \bar{x}|}{|x^{\nu_k} - \bar{x}|} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{m}\gamma^2}}, \quad \nu_{k+2} - \nu_k \leq 2m.$$

При выборе очередного индекса $i(x^\nu)$ вторым способом существует подпоследовательность $\{x^{\nu_\mu}\}$ последовательности $\{x^\nu\}$, для которой $\frac{|x^{\nu_{\mu+1}} - \bar{x}|}{|x^{\nu_\mu} - \bar{x}|} \le \sqrt{1-\eta^2\gamma^2}$, где γ не зависит от выбора η и $\nu_{\mu+1} - \nu_\mu \le m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при циклическом переборе индексов между соседними членами последовательности $\{x^{\nu_\mu}\}$ реализуется один полный цикл итерационного процесса. Вектор $h^{\nu_{\mu+1}} = x^{\nu_{\mu+1}} - \bar{x}$ принадлежит конической оболочке L векторов a_i, $i \in I_{\nu_{\mu+1}}$, и $-a_i$, $i \in I(\bar{x})$, откуда, по лемме I, получим: $\max(\max_{i\in I_{\nu_{\mu+1}}} |(a_i, h^{\nu_{\mu+1}})|, \max_{i\in I(\bar{x})\setminus I_{\nu_{\mu+1}}} (-a_i, h^{\nu_{\mu+1}})) \ge \gamma |h^{\nu_{\mu+1}}|$, где $\gamma > 0$. Если

$$\max(\max_{i\in I_{\nu_{\mu+1}}} |(a_i, h^{\nu_{\mu+1}})|, \max_{i\in I(\bar{x})\setminus I_{\nu_{\mu+1}}} (-a_i, h^{\nu_{\mu+1}})) =$$
$$= \max_{i\in I_{\nu_{\mu+1}}} |(a_i, h^{\nu_{\mu+1}})| = |(a_{i_0}, h^{\nu_{\mu+1}})|,$$

то в предыдущем цикле мы проектировали на ограничение с номером i_0 (в противном случае его номер не содержался бы в $I_{\nu_{\mu+1}}$) и, следовательно, найдется номер k, $\nu_{\mu+1} > k \ge \nu_\mu$, такой, что $(a_{i_0}, h^k) = 0$, т.е. $|h^k - h^{\nu_{\mu+1}}|^2 \ge \gamma^2 |h^{\nu_{\mu+1}}|^2$. Тогда, согласно (3),

$$\frac{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2}{|h^k|^2} \le \frac{|h^k|^2 - \frac{1}{m}|h^k - h^{\nu_{\mu+1}}|^2}{|h^k|^2} \le 1 - \frac{\frac{1}{m}\gamma^2 |h^{\nu_{\mu+1}}|^2}{|h^k|^2},$$

поэтому

$$\frac{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2}{|h^k|^2} \le \frac{1}{1+\frac{1}{m}\gamma^2},$$

следовательно,

$$\frac{|h^{\nu_{\mu+2}}|}{|h^{\nu_\mu}|} \le \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{m}\gamma^2}},$$

где $\nu_{\mu+2} - \nu_\mu \le 2m$.

Предположим, что

$$\max\big(\max_{i\in I_{\nu_{\mu+1}}} |(h^{\nu_{\mu+1}}, a_i)|, \max_{i\in I(\bar{x})\setminus I_{\nu_{\mu+1}}} (-a_i, h^{\nu_{\mu+1}})\big) =$$

$$= \max_{i\in I(\bar{x})\setminus I_{\nu_{\mu+1}}} (-a_i, h^{\nu_{\mu+1}}) = (-a_{i_0}, h^{\nu_{\mu+1}}).$$

Тогда в следующем цикле мы либо спроектируем точку x_0 на ограничение с номером i_0, либо нет (если оно не будет нарушено). И в том и в другом случае найдется номер k, $\nu_{\mu+1} < k \le \nu_{\mu+2}$, такой, что $(a_{i_0}, h^k) \ge 0$, т.е. $|(h^{\nu_{\mu+1}} - h^k)| \ge \gamma^2 |h^{\nu_{\mu+1}}|^2$. Тогда, используя (3), получаем

$$\frac{|h^{\nu_{\mu+2}}|^2}{|h^{\nu_\mu}|^2} \le \frac{|h^{\nu_{\mu+2}}|^2}{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2} \le \frac{|h^k|^2}{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2} \le \frac{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2 - \frac{1}{m}|h^{\nu_{\mu+1}} - h^k|^2}{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2} \le$$

$$\le \frac{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2 - \frac{1}{m}\gamma^2 |h^{\nu_{\mu+1}}|^2}{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2} = 1 - \frac{1}{m}\gamma^2$$

или $\dfrac{|h^{\nu_{\mu+2}}|^2}{|h^{\nu_\mu}|^2} \le \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{m}\gamma^2}}$.

При втором способе выбора индекса $i(x^\nu)$ в качестве искомой подпоследовательности $\{x^{\nu_\mu}\}$ возьмем последовательность $\{x^\nu\}$ за исключением тех членов, для которых оценка $\varphi = 0$, т.е. на соответствующих шагах происходило выбрасывание. Так как число выбрасываний подряд не превосходит m, то $\nu_{\mu+1} - \nu_\mu \le m$ и $|h^{\nu_{\mu+1}-1} - h^{\nu_{\mu+1}}|^2 \ge \eta^2\gamma^2 |h^{\theta_\mu}|^2$, где $\theta_\mu = \max_{\bar{N} \le s_k \le \nu_\mu} s_k$, а последовательность $\{s_k\}$ определяется согласно (16). При этом мы считаем, что $\nu_\mu \ge \bar{N}$. Таким образом,

$$\frac{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2}{|h^{\nu_\mu}|^2} \le \frac{|h^{\nu_{\mu+1}}|^2}{|h^{\nu_{\mu+1}-1}|^2} \le \frac{|h^{\nu_{\mu+1}-1}|^2 - |h^{\nu_{\mu+1}} - h^{\nu_{\mu+1}-1}|^2}{|h^{\nu_{\mu+1}-1}|^2} \le$$

$$\le \frac{|h^{\nu_{\mu+1}-1}|^2 - \eta^2\gamma^2 |h^{\theta_\mu}|^2}{|h^{\nu_{\mu+1}-1}|^2} \le 1 - \eta^2\gamma^2.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. За счет небольшого усложнения каждого шага итерационного процесса (вместо проектирования на очередное ограничение, как это делается, например, в [1], для аналогичной задачи, ищется проекция на это ограничение вдоль множества Q_y) удается добиться строгого роста функционала $/x^0 - x^\nu/$, а при $\nu \geq \bar{N}$ еще и строгого убывания функционала $/\bar{x} - x^\nu/$ на каждом шаге.

Литература

1. БРЭГМАН А.Э. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. - "Журн. вычислит. математики и мат. физики", М., 1967, т.7, № 3, с. 620-631.
2. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном типе проекционных методов в математическом программировании. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22), Новосибирск, 1972, с. 11-22.
3. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. Автореферат кандидатской диссертации. Новосибирск, 1962.
4. БУЛАВСКИЙ В.А. Один специальный алгорифм квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22), Новосибирск, 1972, с. 23-36.
5. ЛОБЫРЕВ А.И. О минимизации строго выпуклой функции на пересечении выпуклых множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22), Новосибирск, 1972, с. 128-132.

Поступила в ред.-изд. отд.
5. V. 1974 г.