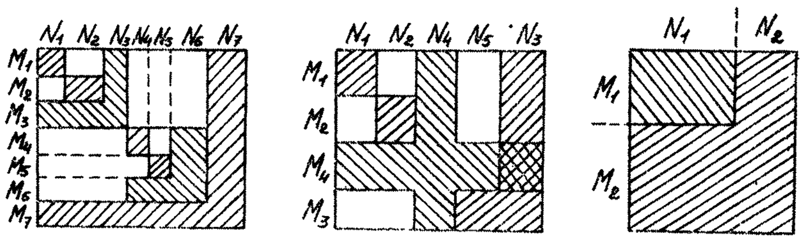
1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Численные методы

УДК 512.25 : 519.12

МНОГОСТУПЕНЧАТАЯ ОКАЙМЛЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Р.А.Звягина

В статье рассматривается общий подход к выявлению и учету иерархической окаймленности в матрице A системы уравнений при решении задачи линейного программирования. Предполагается, что в этой матрице имеются строки и столбцы (общего вида), окаймляющие ее блочно-диагональную часть, в каждом из блоков этой части, в свою очередь, имеются строки и столбцы, окаймляющие блочно-диагональную часть блока и т.д. Ясно, что число l ступеней такой иерархии может быть произвольным. Например, $l=3$ на рис. I,а и $l=2$ на рис. I,в, причем в последнем случае число блоков после выделения окаймляющих строк и столбцов равно I. Основой учета такой структуры в рамках метода последовательного улучшения [I] является представление базисной



а б в

Рис. I

матрицы в виде произведения двух матриц блочно-треугольного типа, пересчет которых в связи с заменой одного столбца в базисной матрице сводится к процедурам усечения и окаймления двух соседних блоков в матрицах разложения. Требования, налагаемые на выбор неособенных блоков на диагонали в одной из матриц разложения, позволяют, с одной стороны, достаточно хорошо учитывать имеющуюся специфику матрицы A, а с другой — избегать появления на диагонали блоков, близких к вырожденным.

Как и в рассмотренном ранее случае [2], сложность предлагаемого алгоритма зависит в основном от числа иерархических ступеней в матрице A.

§ I. Блочная структура и согласованное с ней отношение порядка

Пусть $M=\{1,2,\dots,m\}$ — множество номеров строк, а $N=\{1,2,\dots,n\}$ — множество номеров столбцов в матрице $A[M,N]$ ранга $m\le n$. Предположим, что при некотором $P=\{1,2,\dots,p\}$ ($p\ge 2$) заданы разбиения M_k ($k\in P$) и N_k ($k\in P$) множеств M и N соответственно (здесь и далее элементы семейства, образующего разбиение некоторого множества, могут быть пустыми). Кроме того, предположим, что для каждого $k\in P$ заданы множества $\tilde{M}_k$ и $\tilde{N}_k$ такие, что $M_k\subset\tilde{M}_k\subset M$ и $N_k\subset\tilde{N}_k\subset N$. Семейство пар

$$\{(M_k,\tilde{N}_k),(\tilde{M}_k,N_k):k\in P\} \tag{I.I}$$

назовем **б л о ч н о й с т р у к т у р о й** матрицы $A[M,N]$, если все её ненулевые элементы заключены в подматрицах (блоках) $A[M_k,\tilde{N}_k]$, $A[\tilde{M}_k,N_k]$, $k\in P$ (сравни [2]). Например, на рис. I заштрихованные части соответствуют ненулевым блокам, причем для матрицы, изображенной на рис. I,а, естественно задать $\tilde{M}_k=M_k$, $\tilde{N}_k=N_k$ ($k=1,2,4,5$), $\tilde{M}_k=\bigcup_{k-2\le i\le k}M_i$, $\tilde{N}_k=\bigcup_{k-2\le i\le k}N_i$ ($k=3,6$), $\tilde{M}_7=M$, $\tilde{N}_7=N$; для матрицы на рис. I,б при $M_5=\varnothing$ можно положить, например, $\tilde{M}_k=M_k$, $\tilde{N}_k=N_k$ ($k=1,2,5$), $\tilde{M}_k=M$, $\tilde{N}_k=N$ ($k=3,4$); наконец, для матрицы на рис. I,в — $\tilde{M}_1=M_1$, $\tilde{N}_1=N_1$, $\tilde{M}_2=M$, $\tilde{N}_2=N$.

Заметим, что если все матрицы

$$A[\tilde{M}_k\setminus M_k,N_k],\quad k\in P, \tag{I.2}$$

нулевые, то $A[M,N]$ можно отнести в класс, рассмотренный ранее [2]. Аналогично, если все матрицы

$$A[M_k, \tilde N_k \setminus N_k], \ k \in P, \tag{I.3}$$

нулевые, то в указанный класс можно отнести матрицу, транспонированную по отношению к $A[M,N]$. Здесь и далее блок $A[X,Y]$, в котором хотя бы одно из множеств X или Y пусто, считается нулевым.

При заданной блочной структуре (I.1) матрицы $A[M,N]$ положим

$$R = \{[k,\tau] : \tilde M_k \cap \tilde M_\tau \neq \phi \ \text{ или } \tilde N_k \cap \tilde N_\tau \neq \phi \ (k \neq \tau;\ k, \tau \in P)\} \tag{I.4}$$

и предположим, что в множестве P введен иерархический порядок $\preccurlyeq$, согласованный с R, то есть для любого $k \in P$ множество $L_k = \{\tau \in P : \tau \succcurlyeq k\}$ является линейно упорядоченным, и, кроме того, для любой пары $[k,\tau] \in R$ выполнено соотношение $k \preccurlyeq \tau$ или $\tau \preccurlyeq k$ (см. [2]).

При заданном порядке $\preccurlyeq$, согласованном с (I.4), положим

$$\bar M_k = \bigcup_{\tau \preccurlyeq k} M_\tau, \ \bar N_k = \bigcup_{\tau \preccurlyeq k} N_\tau, \quad k \in P. \tag{I.5}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Семейство пар $\{(M_k, \bar N_k), (\bar M_k, N_k) : k \in P\}$ является блочной структурой матрицы $A[M,N]$, порядок $\preccurlyeq$ согласован с множеством

$\bar R = \{[k,\tau] : \bar M_k \cap \bar M_\tau \neq \phi$ или $\bar N_k \cap \bar N_\tau \neq \phi \ (k \neq \tau;\ k, \tau \in P)\}$,

и множества $(M_k \times \bar N_k) \cup (\bar M_k \times N_k)$ попарно не пересекаются для всех $k \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Если элемент $A[i,j]$ в матрице $A[M,N]$ отличен от нуля и $i \in M_{k_i}$, $j \in N_{k_j}$ ($k_i, k_j \in P$), то, по определению блочной структуры (I.I), пара (i,j) принадлежит хотя бы одному из множеств

$(M_{k_i} \times \tilde N_{k_i}) \cup (\tilde M_{k_i} \times N_{k_i})$ или $(M_{k_j} \times \tilde N_{k_j}) \cup (\tilde M_{k_j} \times N_{k_j})$.

В первом случае $\tilde N_{k_i} \cap \tilde N_{k_j} \neq \phi$, а во втором – $\tilde M_{k_i} \cap \tilde M_{k_j} \neq \phi$. Следовательно, $[k_i, k_j] \in R$ и элементы k_i и k_j сравнимы в силу согласованности $\preccurlyeq$ с множеством (I.4). Из сравнимости элементов k_i и k_j следует, что $(i,j) \in M_{k_i} \times \bar N_{k_i}$, если $k_j \preccurlyeq k_i$, или $(i,j) \in \bar M_{k_j} \times N_{k_j}$, если $k_i \preccurlyeq k_j$.

(б) Из включения $[k,\tau] \in \bar R$ следует существование такого элемента $\sigma \in P$, что $\sigma \preccurlyeq k$ и $\sigma \preccurlyeq \tau$. Это означает, что элементы k и τ сравнимы, так как в противном случае L_σ не является линейно упорядоченным множеством.

(в) Последнее из доказываемых утверждений следует из того, что

$\bar{N}_k \cap N_\tau = \phi$ и $\bar{M}_k \cap M_\tau = \phi$, если $k \prec \tau$,

$M_k \cap \bar{M}_\tau = \phi$ и $N_k \cap \bar{N}_\tau = \phi$, если $k \succ \tau$,

$M_k \cap \bar{M}_\tau = \phi$ и $\bar{M}_k \cap M_\tau = \phi$ ($\bar{N}_k \cap N_\tau = \phi$ и $N_k \cap \bar{N}_\tau = \phi$),

если k и τ несравнимы. Предложение доказано.

При любом $r = 1,2,\ldots,l$, где $l = \max_{k \in P} |L_k|$ - число иерархических ступеней, а $|L_k|$ - число элементов в L_k, положим

$$U_r = \{k \in P : |L_k| = l - r + 1\} \quad (r = 1,2,\ldots,l). \qquad (1.6)$$

Не нарушая общности, можно считать, что U_l состоит из одного элемента (если $|U_l| > 1$, то матрица $A[M,N]$ блочно-диагональная, и соответствующая задача линейного программирования распадается на $|U_l|$ независимых подзадач) и этим элементом является номер p. На рис. 2 при $l = 5$ элементы множества U_r $(1 \le r \le l)$ расположены на одном уровне. Как будет показано ниже, эффективность предлагаемого алгоритма повышается с уменьшением l. Однако на задаче отыскания в множестве P оптимального порядка $\preccurlyeq$, согласованного с (1.4), мы не останавливаемся, так как при заданном множестве R она уже рассматривалась [2]. Заметим лишь, что величина l, отвечающая оптимальному порядку $\preccurlyeq$, не возрастает при сужении множеств P и R, поэтому для блочной структуры (1.1) естественно считать выполненными следующие требования:

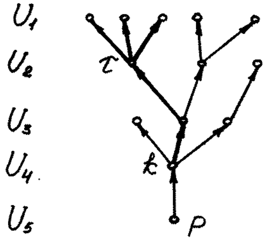


Рис. 2

1) для любого $k \in P$ хотя бы одно из множеств M_k или N_k непусто (в противном случае номер k, для которого $M_k = N_k = \phi$, можно исключить из множества P);

2) в каждой из матриц (1.2) при $N_k \ne \phi$ нет нулевых строк, а в каждой из матриц (1.3) при $M_k \ne \phi$ нет нулевых столбцов (в противном случае номер $i \in \bar{M}_k \setminus M_k$, для которого $A[i, N_k] = 0$, можно исключить из $\bar{M}_k$, а номер $j \in \bar{N}_k \setminus N_k$, для которого $A[M_k, j] = 0$, можно исключить из $\bar{N}_k$).

§ 2. Определение первичного базисного разбиения

Пусть в матрице $A[M,N]$ выделена квадратная неособенная подматрица $A[M,K]$ с индуцированной блочной структурой $\{(M_k, \bar N_k \cap K), (\bar M_k, N_k \cap K): k \in P\}$, с которой, очевидно, согласован порядок $\preccurlyeq$ (множества $\bar M_k$, $\bar N_k$ определены в (1.5)).

Для любого $K \subset N$, при котором матрица $A[M,K]$ квадратная и неособенная, существуют такие разбиения

$$I_k \ (k \in P) \qquad \text{и} \qquad J_k \ (k \in P) \tag{2.1}$$

множеств M и K соответственно, что

$$I_k \subset \bar M_k, \quad J_k \subset \bar N_k, \quad k \in P, \tag{2.2}$$

и в разложении

$$A[M,K] = V[M,K] \cdot \{E[K,K] + W[K,K]\}, \tag{2.3}$$

однозначно определяемом разбиениями (2.1), $E[K,K]$ – единичная матрица; $V[M,K]$ – нижняя блочно-треугольная матрица с квадратными неособенными подматрицами $V[I_k, J_k]$ ($k \in P$) на диагонали; $W[K,K]$ – верхняя блочно-треугольная матрица.

Здесь блочная треугольность указанных матриц означает, что для каждого $k \in P$ в матрице $V[M, J_k]$ отличны от нуля разве лишь блоки $V[I_\tau, J_k], \tau \succcurlyeq k$, а в матрице $W[J_k, K]$ – разве лишь блоки $W[J_k, J_\tau], \tau \succ k$. В то же время это означает, что для каждого $k \in P$ в матрице $V[I_k, K]$ отличны от нуля разве лишь блоки $V[I_k, J_\tau]$, $\tau \preccurlyeq k$, а в матрице $W[K, J_k]$ – разве лишь блоки $W[J_\tau, J_k]$, $\tau \prec k$. Далее, каждая из неособенных матриц $V[I_k, J_k], k \in U_r$ ($1 \le r \le l$) имеет блочную структуру

$$\{(I_k \cap M_k, J_k), (I_k, J_k \cap N_k)\}, \{(I_k \cap \bar M_\sigma, J_k \cap \bar N_\sigma): \sigma \prec k, \sigma \in U_{r-1}\} \tag{2.4}$$

(множества U_r, $1 \le r \le l$, определены в (1.6), а U_0 можно считать пустым), а каждая из матриц $V[I_\tau, J_k]$ ($k \prec \tau \preccurlyeq p$) имеет блочную структуру

$$\{(I_\tau \cap \bar M_k, J_k)\}, \{(I_\tau \cap M_\sigma, J_k): k \prec \sigma \preccurlyeq \tau\} \quad (\tau \succ k). \tag{2.5}$$

Аналогично каждая из матриц $W[J_k, J_\tau]$ ($k \prec \tau \preccurlyeq p$) имеет блочную структуру

$$\{(J_k, J_\tau \cap \bar N_k)\}, \{(J_k, J_\tau \cap N_\sigma): k \prec \sigma \preccurlyeq \tau\} \quad (\tau \succ k). \tag{2.6}$$

Таким образом, блочную структуру с окаймлением имеют лишь неособенные матрицы $V[I_k, J_k]$, $k \in P$, причем в каждой из них сохраняется в худшем случае двухступенчатая иерархия.

Семейства (2.I), обладающие перечисленными свойствами, назовем **первичным** базисным разбиением, а разложение (2.3) - с ним **согласованным**.

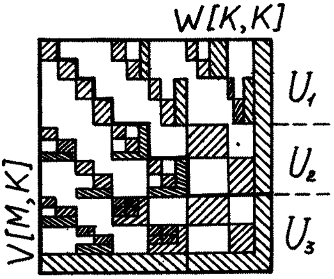


Рис. 3

На рис. 3 для $l=3$ матрицы $V[M,K]$ и $W[K,K]$, соответствующие матрице $A[M,K]$ на рис. I,a, расположены в одной квадратной таблице. Заметим, что при линейном порядке $\preccurlyeq$ получается обычная блочная треугольность матриц $V[M,K]$ и $W[K,K]$, определяемая множествами (2.I).

Единственность разложения (2.3) при каждом первичном базисном разбиении (2.I) получается индуктивным путем из соотношения

$$V[M,K]\cdot\{E[K,K]+W[K,K]\}=V'[M,K]\cdot\{E[K,K]+W'[K,K]\} \qquad (2.7)$$

и из предположения, что для некоторого $Q\subset P$, в частности, для $Q=\varnothing$, справедливы равенства

$$V[M,J_k]=V'[M,J_k],\ W[J_k,K]=W'[J_k,K],\ k\in Q.$$

При этом предполагается, что множество $\{\sigma\in P:\sigma\prec k\}$ содержится в Q для каждого $k\in Q$. Полагая τ равным одному из минимальных элементов множества $P\setminus Q$ (при $Q\neq P$) и умножая (2.7) справа на $E[K,J_\tau]$, в силу блочной треугольности матриц в (2.3) получим

$$V[M,J_\tau]+V[M,\bigcup_{\sigma\prec\tau}J_\sigma]\cdot W[\bigcup_{\sigma\prec\tau}J_\sigma,J_\tau]=V'[M,J_\tau]+V'[M,\bigcup_{\sigma\prec\tau}J_\sigma]\cdot W'[\bigcup_{\sigma\prec\tau}J_\sigma,J_\tau],$$

откуда в силу индуктивного предположения следует $V[M,J_\tau]=V'[M,J_\tau]$. Аналогично, умножив (2.7) слева на подматрицу $E[I_\tau,M]$ единичной матрицы $E[M,M]$, получим

$$V[I_\tau,K]+V[I_\tau,\bigcup_{\sigma\prec\tau}J_\sigma]\cdot W[\bigcup_{\sigma\prec\tau}J_\sigma,K]=V'[I_\tau,K]+V'[I_\tau,\bigcup_{\sigma\prec\tau}J_\sigma]\cdot W'[\bigcup_{\sigma\prec\tau}J_\sigma,K]$$

откуда в силу индуктивного предположения имеем

$$V[I_\tau, J_\tau]\cdot W[J_\tau, K] = V[I_\tau, J_\tau]\cdot W'[J_\tau, K],$$

а из неособенности матрицы $V[I_\tau, J_\tau]$ следует $W[J_\tau, K] = W'[J_\tau, K]$. Таким образом, множество Q можно заменить на $Q\cup\{\tau\}$.

Существование первичного базисного разбиения не вызывает сомнения - достаточно положить

$$I_k = J_k = \phi \ (1 \le k < p),\ I_p = M,\ J_p = K;\ V[M,K] = A[M,K],\ W[K,K] = 0. \quad (2.8)$$

Однако при таком выборе семейства (2.1) в разложении (2.3) учитывается лишь одна (старшая) ступень иерархии в матрице $A[M,K]$. Чтобы учесть все l ступеней этой иерархии, достаточно на первичное базисное разбиение (2.1) наложить, например, условие

$$\operatorname{rang} V[I_k \setminus M_k, J_k \cap N_k] = \operatorname{rang} V[I_k \setminus M_k, J_k],\ k \in P. \quad (2.9)$$

Действительно, нарушение условия (2.9) для $k \in U_s$ $(1 < s \le l)$ означает, что для некоторых номеров $\tau \prec k$ порядок матриц $V[I_\tau, J_\tau]$ слишком занижен, а блочно-диагональная часть $V[I_k \setminus M_k, J_k \setminus N_k]$ матрицы $V[I_k, J_k]$ отлична от нуля (рис. 4). Как будет показано в § 4, выбрав элемент $V[i,j] \ne 0$, $i \in I_k \cap \bar{M}_\tau$, $j \in J_k \cap \bar{N}_\tau$ $(\tau \prec k, \tau \in U_{s-1})$, можно перейти к первичному базисному разбиению (2.1) и к согласованному с ним разложению (2.3) (перебрасыванием номера i от I_k к I_τ, а номера j от J_k к J_τ), более полно учитывающему специфику в матрице $A[M,K]$.

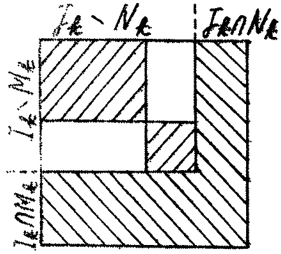


Рис. 4

§ 3. Вторичное базисное разбиение

Предположим, что для каждого $k \in P$ имеются такие разбиения $\{I_{k1}, I_{k2}\}$ и $\{J_{k1}, J_{k2}\}$ множеств I_k и J_k соответственно, что квадратная матрица $V[I_{k1}, J_{k1}]$ неособенная. Для каждого $k \in Q = \{\tau \in P : I_{\tau 1} \ne \phi\}$ представим матрицу $V[I_k, J_k]$ (очевидно, однозначно) как произведение двух матриц:

$$V[I_k,J_k]=\left[\begin{array}{c|c} V[I_{k1},J_{k1}] & 0 \\ \hline V[I_{k2},J_{k1}] & B[I_{k2},J_{k2}] \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} E[J_{k1},J_{k1}] & \Lambda[J_{k1},J_{k2}] \\ \hline 0 & E[J_{k2},J_{k2}] \end{array}\right], \quad (3.1)$$

где $\Lambda[J_{k1},J_{k2}]$ - решение уравнения $V[I_{k1},J_{k1}]\cdot\Lambda[J_{k1},J_{k2}] = V[I_{k1},J_{k2}]$, а блок $B[M,J_{k2}]$ определяется формулой

$$B[M,J_{k2}]=V[M,J_{k2}]-V[M,J_{k1}]\cdot\Lambda[J_{k1},J_{k2}]. \quad (3.2)$$

При этом квадратная матрица $B[I_{k2},J_{k2}]$ - неособенная в силу выбора $V[I_{k1},J_{k1}]$ и неособенности матрицы $V[I_k,J_k]$.

Для каждого $k\in Q$ блок $V[M,J_{k2}]$ в матрице $V[M,K]$ заменим блоком (3.2) и получившуюся матрицу обозначим через $B[M,K]$. Аналогично в матрице $T[K,K]=E[K,K]+W[K,K]$ блок $T[J_{k1},K]$ для $k\in Q$ заменим блоком

$$S[J_{k1},K]=T[J_{k1},K]+\Lambda[J_{k1},J_{k2}]\cdot T[J_{k2},K] \quad (3.3)$$

и получившуюся матрицу обозначим через $S[K,K]$.

Таким образом, в т о р и ч н о е по отношению к (2.I) базисное разбиение

$$(I_{k1},J_{k1}),\ (I_{k2},J_{k2}),\ k\in P, \quad (3.4)$$

однозначно определяет разложение

$$A[M,K]=B[M,K]\cdot S[K,K], \quad (3.5)$$

в котором $B[M,K]$ - нижняя блочно-треугольная матрица с квадратными неособенными подматрицами $B[I_{kt},J_{kt}]$ ($k\in P;\ t=1,2$) на диагонали;

$$S[K,K]=E[K,K]+\Lambda[K,K],$$

где $\Lambda[K,K]$ - верхняя блочно-треугольная матрица. При этом из (3.I) - (3.3) следует, что структуры матриц $V[M,K]$ и $B[M,K]$ отличаются разве лишь в подматрицах $V[M,J_{k2}]$ и $B[M,J_{k2}]$ ($k\in P$), в последней из которых блок $B[I_{k1},J_{k2}]$ нулевой, а структуры матриц $W[K,K]$ и $\Lambda[K,K]$ отличаются разве лишь в блоках $W[J_k,J_k]$ и $\Lambda[J_k,J_k]$ ($k\in P$), первый из которых нулевой, а последний имеет блочную структуру $\{(J_{k1},J_{k2})\}$.

Таким образом, учитывая (3.2) и блочные структуры (2.5) и (2.6), можно заключить, что каждый из блоков $B[M,J_k]$ ($k\in P$) имеет блочную структуру

$$\{(I_{k2},J_k),(I_k,J_{k1})\};\{(I_\tau\cap\bar{M}_k,J_k)\},\{(I_\tau\cap M_\sigma,J_k):k<\sigma\leq\tau\},\tau>k, \quad (3.6)$$

а каждый из блоков $\Lambda[J_k, K]$ ($k \in P$) имеет блочную структуру

$$\{(J_{k1}, J_{k2})\}; \{(J_k, J_\tau \cap \bar{N}_k)\}, \{(J_k, J_\tau \cap N_\sigma) : k < \sigma \preccurlyeq \tau\}, \tau \succ k. \quad (3.7)$$

При этом поскольку матрицы $V[M, J_{k1}]$ и $B[M, J_{k1}]$ ($k \in U_r, 1 \le r \le l$) совпадают, то каждая из них имеет блочную структуру (2.4) и (2.5) с заменой J_k на J_{k1}.

Основной результат этого параграфа теперь становится очевидным: если первичное базисное разбиение (2.I) удовлетворяет условию (2.9), то вторичное базисное разбиение (3.4) можно выбрать таким образом, что

$$I_{k2} = I_k \cap M_k, \; J_{k1} \subset N_k, \; k \in P, \quad (3.8)$$

а вместе с условиями (2.2) это влечет

$$I_{k1} \subset \bar{M}_k \setminus M_k, \; J_{k2} \subset \bar{N}_k, \; k \in P. \quad (3.9)$$

Принимая описанные свойства разложений (2.3) и (3.5) в качестве индуктивного предположения с базой (2.8), мы докажем с помощью процедур, описанных в следующем параграфе, как обратное утверждение, так и

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. *От любого вторичного по отношению к (2.I) базисного разбиения можно перейти к базисному разбиению (3.4), удовлетворяющему условиям (3.8), (3.9).*

Для доказательства этого предложения необходимо выявить еще некоторые свойства разложения (3.5), согласованного с произвольным вторичным базисным разбиением (3.4). Для любого $k \in P$ и любого $\tau \preccurlyeq k$ положим

$$D_{k\tau} = \{\sigma \in P : \sigma \preccurlyeq \tau\} \cup \{\sigma \in P : \tau \prec \sigma \preccurlyeq k\}$$

(на рис. 2 элементы этого множества соединены жирными линиями).

I) Если $i \in I_k \cap M_{k_l}$ ($k_l \preccurlyeq k \preccurlyeq \rho$), то в строке $B[i, K]$ отличны от нуля разве лишь части $B[i, J_\sigma]$, $\sigma \in D_{kk_l} \setminus \{k\}$, а также часть $B[i, J_{k1}]$, если $i \in I_{k1}$, или часть $B[i, J_k]$, если $i \in I_{k2}$. Иначе говоря,

$$B[i, J_\sigma] = 0, \sigma \in P \setminus D_{kk_l}, \text{ а также } B[i, J_{k2}] = 0, \text{ если } i \in I_{k1}. \quad (3.10)$$

Действительно, из блочной треугольности матрицы $B[M, K]$ следует, что в каждой ее подматрице $B[I_k, K]$, $k \in P$, отличны от нуля разве лишь блоки $B[I_k, I_\sigma]$, $\sigma \preccurlyeq k$. Если для

$i\in I_k \cap M_{k_i}$ имеется отличная от нуля часть $B[i,J_{k'}]$ с номером $k'\prec k$, несравнимым с k_i, то пара $(I_k \cap M_{k_i}, J_{k'})$ входит в блочную структуру матрицы $B[M,J_{k'}]$, что невозможно.

2) Если $j\in J_k \cap N_{k_j}$ $(k_j \preccurlyeq k \preccurlyeq P)$, то в столбце $\Lambda[K,j]$ отличны от нуля разве лишь части $\Lambda[J_\sigma,j]$, $\sigma\in D_{kk_j}\setminus\{k\}$, а также часть $\Lambda[J_{k1},j]$, если $j\in J_{k2}$. Другими словами,

$$\begin{cases}\Lambda[J_\sigma,j]=0,\ \sigma\in P\setminus D_{kk_j},\\ \Lambda[J_{k2},j]=0,\ \text{если } j\in J_{k2}, \text{ или } \Lambda[J_k,j]=0,\ \text{если } j\in J_{k1}.\end{cases} \tag{3.11}$$

Это свойство доказывается так же, как предыдущее.

3) Умножая (3.5) справа на $E[K,j]$ и используя (3.11), для любого $j\in J_k \cap N_{k_j}$ $(k_j \prec k)$ получаем

$$B[M,j]=A[M,j]-\sum_{\sigma\in D_{kk_j}} B[M,J_\sigma]\cdot\Lambda[J_\sigma,j], \tag{3.12}$$

где слагаемое с номером k либо нулевое (при $j\in J_{k1}$), либо равно $B[M,J_{k1}]\cdot\Lambda[J_{k1},j]$ (при $j\in J_{k2}$).

4) Для любого $j\in J_k \cap N_{k_j}$ $(k_j \preccurlyeq k)$ выберем $i\in I_k$ из условия $B[i,j]\neq 0$. Умножая (3.5) слева на $E[i,M]$ и используя (3.10), получаем

$$\begin{aligned} S[j,K]=\frac{1}{B[i,j]}\{A[i,K]-\sum_{\sigma\in D_{kk_j}\setminus\{k\}} B[i,J_\sigma]\cdot S[J_\sigma,K]-\\ -B[i,J_k\setminus\{j\}]\cdot S[J_k\setminus\{j\},K]\},\end{aligned} \tag{3.13}$$

где слагаемое с номером k равно $B[i,J_{k1}\setminus\{j\}]\cdot S[J_{k1}\setminus\{j\},K]$ при $j\in J_{k1}$.

Полезно отметить, что в столбце $A[M,j]$ $(j\in N_{k_j})$ отличны от нуля разве лишь части $A[\bar{M}_{k_j},j]$ и $A[M_\sigma,j]$, $\sigma\succ k_j$, а в строке $A[i,N]$ $(i\in M_{k_i})$ – разве лишь части $A[i,\bar{N}_{k_i}]$ и $A[i,N_\sigma]$, $\sigma\succ k_i$.

§ 4. Основные процедуры

Пары множеств (I,J) и (I_+,J_+) в семействе (3.4) назовем **с о с е д н и м и**, если при некотором $k\in P$ выполнены соотношения

$$(I,J)=(I_{k1},J_{k1}),\quad (I_+,J_+)=(I_{k2},J_{k2}). \tag{4.1}$$

Кроме того, соседними назовем пары, если при некотором $k \in U_r$ $(1 \le r < l)$ и $(k+) \in U_{r+1}$, $(k+) \succ k$, верны равенства

$$(I,J) = (I_{k2}, J_{k2}), \; (I_+, J_+) = (I_{(k+)1}, J_{(k+)1}), \tag{4.2}$$

или при некотором $k \in U_r$ $(1 < r \le l)$ и некотором $\tau \in U_{r-1}$, $\tau \prec k$, верны равенства

$$(I,J) = (I_{\tau 2}, J_{\tau 2}), \quad (I_+, J_+) = (I_{k1}, J_{k1}). \tag{4.3}$$

При этом номер $(k+)$ в силу иерархичности порядка $\preccurlyeq$ определяется по номеру $k \prec p$ однозначно [2], а число номеров $\tau \prec k$ в множестве U_{r-1} (при $k \in U_r$), вообще говоря, больше I.

Для любых соседних пар (I,J), (I_+,J_+) вторичного базисного разбиения (3.4) и согласованного с ним разложения (3.5) построим две процедуры:

(I) усечение матрицы $B[I,J]$ с окаймлением матрицы $B[I_+,J_+]$;

(II) окаймление матрицы $B[I,J]$ с усечением матрицы $B[I_+,J_+]$.

В первом случае будем предполагать $I \ne \varnothing$, $J \ne \varnothing$, а во втором – $I_+ \ne \varnothing$, $J_+ \ne \varnothing$.

(I) При заданной паре (I,J) и заданном номере $i \in I$ $(j \in J)$ выберем номер $j \in J$ $(i \in I)$ таким образом, чтобы операция усечения матрицы $B[I,J]$ была выполнимой. Для этого достаточно в качестве j (в качестве i) взять номер наибольшего по абсолютной величине элемента столбца $u[J]$ (строки $v[I]$), где $u[J]$, $v[I]$ – решения систем

$$B[I,J]\cdot u[J] = E[I,i], \quad v[I]\cdot B[I,J] = E[j,J] \tag{4.4}$$

соответственно. Соседняя пара (I_+,J_+) при этом выбирается по правилу (4.I) или (4.2).

Множества I, I_+, J, J_+ в разбиении (3.4) заменим соответственно на $I\setminus\{i\}$, $I_+\cup\{i\}$, $J\setminus\{j\}$, $J_+\cup\{j\}$. Тогда этому новому разбиению отвечает (единственное) разложение

$$A[M,K] = \widehat{B}[M,K]\cdot\widehat{S}[K,K], \tag{4.5}$$

где $\widehat{S}[K,K] = E[K,K] + \widehat{\Lambda}[K,K]$. С помощью приема, использованного в § 2 при доказательстве единственности разложения (2.3), можно показать, что представление (4.5) получается из (3.5) преобразованием лишь блоков $B[M, J_+\cup\{j\}]$ и $S[J,K]$. При этом, умножая соотношение

$$B[M,K]\cdot S[K,K] = \widehat{B}[M,K]\cdot\widehat{S}[K,K] \tag{4.6}$$

слева на матрицу $E[I\setminus\{i\},M]$, получаем

$$\tilde{S}[J\setminus\{j\},K]=S[J\setminus\{j\},K]-\frac{1}{u[j]}u[J\setminus\{j\}]\cdot S[j,K], \quad (4.7)$$

а умножая (4.6) справа на $E[K,J_+\cup\{j\}]$ и используя (4.7), получаем

$$\tilde{B}[M,J_+]=B[M,J_+]+\tilde{B}[M,j]\cdot S[j,J_+], \quad (4.8)$$

где столбец $\tilde{B}[M,j]$ вычисляется по формуле

$$\tilde{B}[M,j]=B[M,j]-B[M,J\setminus\{j\}]\cdot\tilde{S}[J\setminus\{j\},j]. \quad (4.9)$$

Наконец, умножая (4.6) слева на строку $E[i,M]$ и используя (4.8), (4.9), получаем

$$\tilde{S}[j,K]=S[j,K]-\Lambda[j,J_+]\cdot S[J_+,K], \quad (4.10)$$

а блок $\tilde{\Lambda}[J,K]$ получается заменой в $\tilde{S}[J,K]$ единичных блоков $\tilde{S}[J\setminus\{j\},J\setminus\{j\}]$ и $\tilde{S}[j,j]$ нулевыми.

Покажем, что разложение (4.5) по отношению к новому разбиению обладает теми же свойствами, что и разложение (3.5) по отношению к (3.4).

В самом деле, в силу выбора $j\in J$ (или $i\in I$) матрицы $B[I\setminus\{i\},J\setminus\{j\}]$ и $\tilde{B}[I_+\cup\{i\},J_+\cup\{j\}]$ неособенные. Кроме того, из (4.9) и определения (4.4) вектора $u[J]$ следует, что $\tilde{B}[I\setminus\{i\},j]=\mathbf{0}$, а из (4.10) $-\tilde{\Lambda}[j,J_+]=\mathbf{0}$.

Для случая (4.1) из соотношений (4.7) - (4.10) сразу же следует, что блочные структуры матриц $\tilde{B}[M,J_k]$ и $\tilde{\Lambda}[J_k,K]$ получаются соответственно из семейств (3.6) и (3.7) перебрасыванием номера i от I_{k1} к I_{k2}, а номера j от J_{k1} к J_{k2}.

Для случая (4.2) блочная структура матриц $\tilde{B}[M,J_k\setminus\{j\}]$ и $\tilde{\Lambda}[J_k\setminus\{j\},K]$ получается соответственно из семейств (3.6) и (3.7) исключением номера i из множеств I_k, I_{k1}, номера j из множеств J_k, J_{k1}, а также расширением множеств $I_{(k+)}$, $I_{(k+)1}$ номером i, множеств $J_{(k+)}$, $J_{(k+)1}$ номером j.

Далее, поскольку в столбце $\tilde{B}[M,j]$ отличны от нуля разве лишь те же части, что и в столбцах блока $B[M,J_{(k+)}]$, а именно: $\tilde{B}[I_\tau\cap\bar{M}_k,j]$ и $\tilde{B}[I_\tau\cap M_\sigma,j]$, $(k+)\leqslant\sigma\leqslant\tau$, для всех $\tau\geqslant(k+)$, - то из (4.8) следует, что блочная структура матрицы $\tilde{B}[M,J_{(k+)}\cup\{j\}]$ получается из семейства, задающего структуру в $B[M,J_{(k+)}]$, путем расширения в последнем множеств $I_{(k+)}$, $I_{(k+)1}$ элементом i, а множеств $J_{(k+)}, J_{(k+)1}$ - элементом j. Поскольку в строке $\tilde{S}[j,K]$, определенной в (4.10), отличны от нуля разве лишь те же части, что и в строках блока $S[J_{(k+)},K]$, то блочная структура в матрице $\tilde{\Lambda}[J_{(k+)}\cup\{j\},K]$ получается из семейства, задающего структуру в $\Lambda[J_{(k+)},K]$, расширением в последнем множества $J_{(k+)}$ элементом j.

В силу специфики столбца $\tilde{B}[M,j]$ и строки $S[j,J_{(k+)}]$, в которой отличны от нуля разве лишь части $S[j,J_{(k+)}\cap N_k]$ и $S[j,J_{(k+)}\cap N_{(k+)}]$, в матрице $\tilde{B}[I_{(k+)1}\cup\{i\},J_{(k+)1}\cup\{j\}]$ сохраняется двухступенчатая иерархия, которой обладала матрица $B[I_{(k+)1}, J_{(k+)1}]$.

(II) При заданной паре (I_+,J_+) и заданном номере $i\in I_+$ ($j\in J_+$) выберем $j\in J_+$ ($i\in I_+$) таким образом, чтобы операция окаймления матрицы $B[I,J]$ была выполнимой. Для этого достаточно в качестве j (в качестве i) взять номер наибольшего по абсолютной величине элемента строки $B[i,J_+]$ (столбца $B[I_+,j]$). При этом соседняя пара (I,J) выбирается по правилу (4.1), если $(I_+,J_+)=(I_{k2},J_{k2})$, $k\in P$, или по правилу (4.3), если $(I_+,J_+)=(I_{k1},J_{k1})$, $k\in U_r$ $(1<r\le l)$. В последнем случае, чтобы не нарушить условие (2.2), будем предполагать относительно задаваемого номера i (или j), что

$$i\in\bar{M}_{\tau_i}\cap I_{k1}(\tau_i\in U_{r-1},\tau_i<k) \text{ или } j\in\bar{N}_{\tau_j}\cap J_{k1}(\tau_j\in U_{r-1},\tau_j<k). \quad (4.11)$$

Тогда в силу блочной структуры матрицы $B[I_{k1},J_{k1}]$ при заданном $i\in\bar{M}_{\tau_i}$ выбираемый номер j принадлежит $\bar{N}_{\tau_i}\cap J_{k1}$, а при заданном $j\in\bar{N}_{\tau_j}$ выбираемый номер i принадлежит $\bar{M}_{\tau_j}\cap I_{k1}$ (рис. 4). Поэтому номер τ_i (или τ_j) можно взять в качестве $\tau=k$ в (4.3).

Множества I, I_+, J, J_+ в семействе (3.4) заменим соответственно на $I\cup\{i\}$, $I_+\setminus\{i\}$, $J\cup\{j\}$, $J_+\setminus\{j\}$, и пусть этому новому семейству отвечает разложение (4.5), которое можно получить из (3.5) преобразованием лишь блоков $B[M,J_+]$ и $S[J\cup\{j\},K]$. Умножая соотношение (4.6) справа на $E[K,j]$, получаем

$$\tilde{B}[M,j]=B[M,j]+B[M,J]\cdot\Lambda[J,j], \quad (4.12)$$

а умножая (4.6) слева на $E[I,M]$, а затем на $E[i,M]$, получаем

$$\tilde{S}[J,K]=S[J,K]-S[J,j]\cdot\tilde{S}[j,K], \quad (4.13)$$

где строка $\widetilde{S}[j,K]$ вычисляется по формуле

$$\widetilde{S}[j,K]=S[j,K]+\frac{1}{B[i,j]}B[i,J_+\setminus\{j\}]\cdot S[J_+\setminus\{j\},K]. \tag{4.14}$$

Наконец, умножая (4.6) справа на $E[K,J_+\setminus\{j\}]$ и используя (4.12), (4.13), получаем

$$\widetilde{B}[M,J_+\setminus\{j\}]=B[M,J_+\setminus\{j\}]-B[M,j]\cdot\widetilde{S}[j,J_+\setminus\{j\}]. \tag{4.15}$$

Как и в процедуре (I), покажем, что разложения (4.5) и (3.5) обладают одними и теми же свойствами по отношению к разбиениям, с которыми они согласованы.

Прежде всего заметим, что в силу выбора i (или j) матрица $B[I\cup\{i\}\ ,J\cup\{j\}]$ неособенная, следовательно, матрицы $\widetilde{B}[I\cup\{i\},J\cup\{j\}]$ и $\widetilde{B}[I_+\setminus\{i\},J_+\setminus\{j\}]$ также неособенные. Кроме того, из (4.14), (4.15) следует, что $\widetilde{B}[i,J_+\setminus\{j\}]=0$, а из (4.13), (4.14) – $\widetilde{\Lambda}[J,j]=0$.

Случай (4.1) в процедуре (II) отличается от этого же случая в процедуре (I) лишь тем, что номер i перебрасывается от I_{k2} к I_{k1}, а номер j – от J_{k2} к J_{k1}. При этом если в (4.12) подставить выражение (3.12) для столбца $B[M,j]$ ($j\in J_k\cap N_{k_j}$, $k_j\prec k$) и заменить J на J_{k1}, то легко видеть, что слагаемые с номером k в (3.12) и (4.12) взаимно уничтожаются. Следовательно, в столбце $\widetilde{B}[M,j]$ отличны от нуля разве лишь те же части, что и в столбцах блока $B[\bigcup_{\sigma\succ k} I_\sigma, J_{\tau_j}]$, где $\tau_j\succ k_j$ $\tau_j\in U_{r-1}$ (при $k\in U_r$, $1<r\leq l$). Таким образом, матрица $\widetilde{B}[M,J_{k1}\cup\{j\}]$ имеет блочную структуру (2.4) и (2.5) с заменой J_k на $J_{k1}\cup\{j\}$.

Для случая (4.3) при $\tau=\bar{k}$ ($\bar{k}\prec k$, $\bar{k}\in U_{r-1}$) из соотношений (4.14), (4.13) следует, что блочные структуры матриц $\widetilde{B}[M,J_k\setminus\{j\}]$ и $\widetilde{\Lambda}[J_k\setminus\{j\},K]$ получаются соответственно из семейств, задающих структуры матриц $B[M,J_k]$ и $\Lambda[J_k,K]$, путем исключения номера i из множеств I_k, I_{k1}, а номера j из множеств J_k, J_{k1}.

Далее, поскольку в столбце $\widetilde{B}[M,j]$ ($j\in J_k\cap N_{k_j}$, $k_j\preccurlyeq\bar{k}$), определенном в (4.12) с учетом (3.12), отличны от нуля разве лишь те же части, что и в столбцах блока $B[M,J_{\bar{k}2}]$, то из (4.12) следует, что блочная структура матрицы $\widetilde{B}[M,J_{\bar{k}}\cup\{j\}]$ получается из семейства, задающего структуру матрицы $B[M,J_{\bar{k}}]$, путем расширения в последнем множеств $I_{\bar{k}}$, $I_{\bar{k}1}$ номером i , множеств $J_{\bar{k}}$, $J_{\bar{k}1}$ номером j , а также исключением номера i из множеств I_k , I_{k1}, номера j из множеств J_k , J_{k1}.

Если в (4.14) подставить выражение (3.13) для строки $S[j,K]$ ($j\in J_k \cap N_{k_j}, k_j<\bar{k}$) и заменить J_+ на J_{k1} , то легко видеть, что слагаемые с номером k в (4.14) и (3.13) взаимно уничтожаются. Следовательно, в строке $\bar{\Lambda}[j,K]$ отличны от нуля разве лишь те же части, что и в строках матрицы $\Lambda[J_{k2},K]$. Отсюда и из (4.13) следует, что блочная структура матрицы $\bar{\Lambda}[J_{\bar{k}} \cup \{j\},K]$ получается из семейства, задающего структуру матрицы $\Lambda[J_{\bar{k}},K]$, путем расширения в последнем множеств $J_{\bar{k}}$, $J_{\bar{k}2}$ номером j и исключением j из множеств J_k , J_{k1}.

Докажем теперь предложение 3.1. Предположим, что для некоторого $r>1$, в частности для $r=l$, условия (3.8) при всех $k\in U_s$ ($r<s\leq l$) выполнены и для некоторого $k\in U_r$ хотя бы одно из этих условий нарушено. Для каждого $i\in I_{k1}\cap M_k$ применим процедуру (I) в условиях (4.1), а для каждого $i\in I_{k2}\setminus M_k$ применим процедуру (II) также в условиях (4.1); наконец, для каждого $j\in J_{k1}\setminus N_k$ применим процедуру (II) при $(I_+,J_+)=(I_{k1},J_{k1})$. После цепочки процедур (I), (II) получим семейство (3.4), для которого условия (3.8), а следовательно, и (3.9), выполнены для всех $k\in U_s$ ($r\leq s\leq l$). Если $r=1$, то процесс окончен, причем $I_{k2}\subset M_k$, $I_{k1}=\phi$ для $k\in U_1$. В противном случае (при $r>1$) следует перейти к $r-1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если для некоторого базисного разбиения (3.4) выполнены условия (3.8) и (3.9) для всех $k\in P$, то существует первичное базисное разбиение (2.1) со свойством (2.9): достаточно для каждого $k\in P$ и каждого $i\in I_{k2}$ (или $j\in J_{k2}$) применить процедуру (II) в условиях (4.1) и положить $I_k = I_{k1}\cup I_{k2}$, $J_k=J_{k1}\cup J_{k2}$ $(k\in P)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При реализации описанных процедур на ЭВМ, по-видимому, нецелесообразно использовать матрицу $B^{-1}[J,I]$, где $I=I_{kt}$, $J=J_{kt}$ ($k\in P, 1\leq t\leq 2$), для решения систем с матрицей $B[I,J]$, поскольку это потребовало бы хранения (или вычисления) как прямой матрицы $B[I,J]$, так и обратной к ней $B^{-1}[J,I]$. В самом деле, для определения номера $j\in J$ ($i\in I$) при заданном $i\in I$ ($j\in J$) необходимо иметь i-й столбец (j-ю строку) матрицы $B^{-1}[J,I]$ в процедуре (I) и i-ю строку (j-й столбец) матрицы $B[I,J]$ в процедуре (II). Если же матрицу $B[I,J]$ представить в виде

$$B[I,J] = D[I,J] \cdot F[J,J], \qquad (4.16)$$

где $D[I,J]$ - нижняя, а $F[J,J]$ - верхняя треугольные матрицы (последняя с единицами на главной диагонали), то как решение системы с матрицей $B[I,J]$, замененной в соответствии с (4.16), так и вычисление строки $B[i,J]$ (столбца $B[I,j]$) потребуют порядка $|I|^2$ операций:

$$B[i,J] = D[i,J] \cdot F[J,J],\ B[I,j] = D[I,J] \cdot F[J,j].$$

§ 5. Пересчет матриц $B[M,K]$ и $S[K,K]$

Предположим, что для множеств M и $K \subset N$, при которых матрица $A[M,K]$ квадратная и неособенная, имеется вторичное базисное разбиение (3.4), удовлетворяющее условиям (3.8), (3.9), и разложение (3.5) с ним согласовано. Пусть для некоторого $j_0 \in J_{k_0}$ ($k_0 \in P$) матрица $A[M, K' \setminus \{j_0\}]$, где $K' = K \cup \{j'\}$ ($j' \in N \setminus K$), также неособенная. Отсюда, в частности, следует

$$g[j_0, j'] = S[j_0, j'] - \Lambda[j_0, K] \cdot g[K, j'] \neq 0, \qquad (5.1)$$

где $g[K,j']$ - решение системы $A[M,K] g[K,j'] = A[M,j']$, а $S[K,j']$ - решение системы

$$B[M,K] \cdot S[K,j'] = A[M,j']. \qquad (5.2)$$

К матрице $S[K,K]$ припишем столбец $S[K,j']$ и в процедурах (I), (II) вместо $S[K,K]$ будем рассматривать матрицу $S[K,K']$. Процесс перехода от разложения (3.5) к разложению

$$A[M, K' \setminus \{j_0\}] = B'[M, K' \setminus \{j_0\}] \cdot S'[K' \setminus \{j_0\}, K' \setminus \{j_0\}]$$

(при замене в множестве K номера j_0 на j') состоит в следующем.

1. Предположим, что $j_0 \in J_{p\ell}$ и что условия (3.8), (3.9) нарушаются лишь для номеров k из множества Q_0, которое содержится в интервале $k_0 \leqslant k \leqslant p$, причем эти нарушения состоят в том, что

$$I_{k\ell} \setminus \{i_k\} = I_k \cap M_k, \quad i_k \in I_{k\ell} \setminus M_k, \qquad (5.3)$$

для каждого $k \in Q_0$ (здесь, как и ранее, p - наибольший элемент в упорядоченном множестве P). Тогда номер j_0 следует заменить на j', то есть положить

$$J'_{p\ell} = (J_{p\ell} \setminus \{j_0\}) \cup \{j'\}, \qquad (5.4)$$

а остальные множества семейства (3.4) оставить без изменения. Столбец $S[K \setminus J_{p\ell}, j_0]$ следует заменить на $S[K \setminus J_{p\ell}, j']$, а столбец $B[M, j_0]$ заменить столбцом

$$B[M, j'] = A[M, j'] - B[M, K \setminus J_{p\ell}] \cdot S[K \setminus J_{p\ell}, j'],$$

который вычисляется в процессе решения системы (5.2). При этом матрица $B[I_{p\ell}, J'_{p\ell}]$ неособенная в силу условий (5.I) и $\Lambda[j_0, K] = 0$.

Если $Q_0 = \emptyset$, то процесс пересчета матриц $B[M, K]$ и $\Lambda[K, K]$ закончен.

2. Пусть условия (3.8) нарушены лишь таким образом, что для номеров k из некоторого непустого множества $Q_h \subset P$ ($h \geq 0$, $|Q_h| \leq |Q_0|$) выполняются соотношения (5.3). Применяя последовательно процедуру (II) при $i = i_k$ в условиях (4.I) (с заменой $J_{p\ell}$ на (5.4)), для каждого $k \in Q_h$ получим вместо J_{k1} множество $J_{k1} \cup \{j_k\}$, где $j_k \in N_k$ - номер, выбираемый в качестве j при каждом $k \in Q_h$ в процедуре (II).

Если $j_k \in N_k$ для всех $k \in Q_h$, то процесс пересчета матриц $B[M, K]$ и $\Lambda[K, K]$ закончен.

3. Пусть условия (3.8) нарушены лишь таким образом, что для номеров k некоторого непустого множества $Q'_h \subset Q_h$ выполняются соотношения

$$J_{k1} \setminus \{j_k\} \subset N_k, \; j_k \in J_{k1} \setminus N_k \quad (k \in Q'_h).$$

Применяя последовательно процедуру (II) при $(I_+, J_+) = (I_{k1}, J_{k1})$, $j = j_k$, для каждого $k \in Q'_h$ получим вместо $I_{\tau_k \ell}$ множество $I_{\tau_k \ell} \cup \{i_k\}$, где τ_k и i_k - номера, выбираемые соответственно в качестве k и i в процедуре (II) при каждом $k \in Q'_h$. Обозначим через Q_{h+1} множество тех номеров τ_k ($k \in Q'_h$), для которых $i_k \notin M_{\tau_k}$. Если $Q_{h+1} = \emptyset$ (во всяком случае при $h = \ell - 1$ это действительно так), то пересчет матриц $B[M, K]$ и $S[K, K]$ закончен. В противном случае (при $Q_{h+1} \neq \emptyset$) следует провести преобразования п.2 с заменой h на $h+1$.

В силу строгого неравенства $\tau_k \prec k$ ситуация $Q_h \neq \emptyset$ возможна не более чем $\ell - 1$ раз.

Покажем теперь, что к ситуации п. 1 сводятся все возможные случаи для номера j_0. Действительно, если $j_0 \in J_{k1}$ или $j_0 \in J_{k2}$ (при $k_0 \leqslant k \leqslant p$), то первый случай можно свести ко второму, а второй (при $k < p$) – к первому, применив процедуру (I) в первом случае в условиях (4.I), а во втором – в условиях (4.2), и положив $j = j_0$ в обоих случаях. При этом для первого случая $i_k \notin M_k$, а для второго $(k+) \succ k$, где i_k – номер, выбираемый в процедуре (I) в качестве i. В силу строгого неравенства $(k+) \succ k$ после конечного числа применений процедуры (I) в порядке возрастания номеров k в интервале $k_0 \leqslant k \leqslant p$ (начиная с $k = k_0$) придем к ситуации п. I.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если условия (3.8), (3.9) выполнены, но в матрице $S[J_{k1}, J_{k2} \setminus N_k]$ $(k \in P)$ наибольший по абсолютной величине элемент $S[j_{k1}, j_{k2}]$ отличен от нуля, то перестановкой номеров j_{k1} и j_{k2} можно получить множество $\tilde{J}_{k1} = (J_{k1} \setminus \{j_{k1}\}) \cup \{j_{k2}\}$, для которого нарушено условие $\tilde{J}_{k1} \subset N_k$. Цепочкой процедур (II) можно ликвидировать это и вызываемые процедурой (II) нарушения, что, очевидно, приведёт к ещё более полному учету блочной структуры матрицы $A[M, K]$. Однако при малом $|S[j_{k1}, j_{k2}]|$ матрица $\tilde{B}[I_{k1}, J_{k1}]$, получаемая из $B[I_{k1}, J_{k1}]$ заменой j_{k1}-го столбца на $V[J_{k1}, j_{k2}] = B[I_{k1}, J_{k1}] \cdot S[J_{k1}, j_{k2}]$, почти вырожденная, поскольку элементы столбца $V[I_{k1}, j_{k2}]$ также малы по абсолютной величине. Поэтому при выполнении условий (3.8), (3.9) проведение указанных преобразований нежелательно, за исключением, разумеется, тех случаев, когда их неособенность при $S[j_{k1}, j_{k2}] \neq 0$ гарантируется [3].

Литература

I. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд. АН СССР, 1959.

2. ЗВЯГИНА Р.А. Иерархическое упорядочение в линейном программировании. – В кн.: Оптимизация, I4(3I), Новосибирск, 1974, с. 28-54.

3. ЯКОВЛЕВА М.А. Транспортная задача с окаймлением. – В кн.: Оптимизация, I5(32), Новосибирск, 1974, с. 79-89.

Поступила в ред.-изд.отд.
30. VI. 1974 г.