1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Численные методы

УДК 519.3

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД С РЕГУЛИРУЕМОЙ ТОЧНОСТЬЮ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.А.Булавский

При решении некоторых задач, в частности задач математического программирования, имеются случаи, когда естественно возникающий метод решения носит итеративный характер, а каждая итерация, в свою очередь, формулируется в терминах таких операций, которые не могут быть выполнены точно в конечное число действий. Для их выполнения приходится применять итеративные методы. Это требует дополнительных обоснований внешнего метода. Поэтому уже основной итеративный процесс должен предполагать выполнение итераций с определенной точностью. Как правило, эта точность должна возрастать по мере приближения к решению, но слишком быстрое ее возрастание также нежелательно, так как влечет увеличение трудоемкости каждой итерации. В предлагаемой статье на примере задачи математического программирования рассматривается некоторая схема автоматического регулирования точности выполнения итераций. При этом получается метод, в котором как уклонение от допустимого множества, так и значение максимизируемой функции ведут себя немонотонно. Тем не менее для компактного случая удается доказать сходимость.

Предположим, что на выпуклом замкнутом множестве Q в вещественном гильбертовом пространстве H нужно максимизировать значение линейной непрерывной формы ℓ. Общий случай максимизации вогнутой функции f сводится к максимизации числа t при дополнительном ограничении $t-f(x)\le 0$. Ниже будем исходить из того, что мы умеем с любой степенью точности какодить проекцию любой точки на множество Q. Сначала рассмотрим идеальный случай, когда проекция на Q находится точно.

Выберем последовательность строго положительных чисел $\{\lambda_n\}$ и точку $y_0 \in H$. Построим последовательность $\{y_n\}$, определив y_{n+1} как проекцию на Q точки $y_n + \lambda_n \ell = z_n$.

ТЕОРЕМА. Если форма ℓ достигает максимума на множестве Q и ряд $\sum \lambda_n$ расходится, то последовательность $\{y_n\}$ слабо сходится к некоторой точке максимума формы ℓ на Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что доказательства требует лишь случай $\|\ell\| \neq 0$. Для каждой точки $z \in H$ через Pz обозначим точку множества Q, ближайшую к z. В силу выпуклости множества Q при всех $z', z'' \in H$ имеет место неравенство $\|Pz' - Pz''\| \le \|z' - z''\|$. В частности, если $\tilde{z}$ - некоторая точка максимума формы ℓ на Q и, следовательно, $P(\tilde{z} + \alpha \ell) = \tilde{z}$ при любом $\alpha \ge 0$, то $\|y_{n+1} - \tilde{z}\| = \|P(y_n + \lambda_n \ell) - P(\tilde{z} + \lambda_n \ell)\| \le \|y_n - \tilde{z}\|$, т.е. расстояние от y_n до любой точки максимума формы ℓ не возрастает с ростом n. Таким образом, последовательность $\{y_n\}$ ограничена.

Покажем, что $z_{n+1} \notin Q$, если $z_n \notin Q$. Действительно, если бы точка z_{n+1} принадлежала Q, то точка $(\lambda_n z_{n+1} + \lambda_{n+1} y_n)/(\lambda_n + \lambda_{n+1}) = [\lambda_n (y_{n+1} + \lambda_{n+1} \ell) + \lambda_{n+1}(z_n - \lambda_n \ell)]/(\lambda_n + \lambda_{n+1}) =$

$$= (\lambda_n y_{n+1} + \lambda_{n+1} z_n)/(\lambda_n + \lambda_{n+1}) = \tilde{y}$$

также принадлежала бы Q. Но $y_{n+1} \neq z_n$, так как $y_{n+1} \in Q$, а $z_n \notin Q$. Поэтому $\|\tilde{y} - z_n\| = \lambda_n \|y_{n+1} - z_n\|/(\lambda_n + \lambda_{n+1}) < \|y_{n+1} - z_n\|$, что противоречит равенству $y_{n+1} = Pz_n$, поскольку точка $\tilde{y} \in Q$ оказалась ближе к z_n, чем y_{n+1}. С другой стороны, если бы точки z_n принадлежали Q при всех n, то при всех n было бы $y_{n+1} = y_n + \lambda_n \ell$ и форма ℓ была бы неограниченной на Q. Поэтому, начиная с некоторого n, все точки z_n не принадлежат Q, и $\|z_n - y_{n+1}\| > 0$. Можно считать, что это неравенство имеет место при всех n.

Положим $s_{n+1}=(z_n-y_{n+1})/\|z_n-y_{n+1}\|$. Понятно, что $(\ell,s_n)\le\|\ell\|$. Так как y_n и y_{n+1} принадлежат Q, а y_n - ближайшая к z_{n-1} точка множества Q, то $(y_{n+1}-y_n,y_n-z_{n-1})\geq 0$, или

$$(z_n-y_n,y_n-z_{n-1})\geq(z_n-y_{n+1},y_n-z_{n-1}). \tag{I}$$

Точно так же y_{n+1} - ближайшая к z_n точка Q, и поэтому $(y_n-y_{n+1},y_{n+1}-z_n)\geq 0$, или

$$(z_n-y_n,z_n-y_{n+1})\geq\|z_n-y_{n+1}\|^2. \tag{2}$$

Разделим (I) на $\|z_{n-1}-y_n\|$, (2) - на $\|z_n-y_{n+1}\|$, сложим и учтем, что $z_n-y_n=\lambda_n\ell$. Тогда получим

$$\lambda_n[(\ell,s_{n+1})-(\ell,s_n)]\geq\|z_n-y_{n+1}\|-(z_n-y_{n+1},s_n)\geq 0.$$

Таким образом, последовательность $\{(\ell,s_n)\}$ неубывающая и ограниченная.

Пусть $\alpha=\lim(\ell,s_n)$. Так как $\|z_n-y_{n+1}\|\le\|z_n-y_n\|=\lambda_n\|\ell\|$, то

$$\Delta_n=(\ell,y_{n+1})-(\ell,y_n)=(\ell,y_{n+1})-(\ell,z_n-\lambda_n\ell)=\lambda_n\|\ell\|^2-(\ell,z_n-y_{n+1})=$$

$$=\lambda_n\|\ell\|^2-(\ell,s_{n+1})\cdot\|z_n-y_{n+1}\|\geq\lambda_n\|\ell\|^2-\alpha\cdot\|z_n-y_{n+1}\|\geq\lambda_n\|\ell\|(\|\ell\|-\alpha).$$

Поскольку ряд $\sum\Delta_n$ ввиду ограниченности формы ℓ на Q сходится, а ряд $\sum\lambda_n$ расходится, то $\alpha=\|\ell\|$. Если при некотором n окажется $(\ell,s_n)=\|\ell\|$, т.е. $s_n=\ell/\|\ell\|$, то это означает, что $(\ell,x-y_n)\le 0$ при $x\in Q$, т.е. что y_n - точка максимума формы ℓ. При этом $y_{n+k}=y_n$ при $k=1,2,\dots$.

Пусть $(\ell,s_n)<\|\ell\|$ при всех n. Так как

$$\left\|s_n-\frac{\ell}{\|\ell\|}\right\|^2=\frac{2}{\|\ell\|}(\|\ell\|-(\ell,s_n)),$$

то последовательность $\{s_n\}$ сильно сходится к $\frac{\ell}{\|\ell\|}$. Ввиду ограниченности последовательности $\{y_n\}$ существует подпоследовательность $\{y_{n_\nu}\}$, слабо сходящаяся к некоторой точке $\bar{y}$ из Q (так как Q выпукло и замкнуто). Поскольку $(s_{n_\nu},x-y_{n_\nu})\le 0$ при любом $x\in Q$, то в силу ограниченности y_{n_ν} в пределе получим, что $(\ell,x-\bar{y})\le 0$ при $x\in Q$. Таким образом, точка $\bar{y}$ максимизирует форму ℓ на множестве Q. Поэтому $\|y_{n+1}-\bar{y}\| \le \|y_n-\bar{y}\|$ при всех n. Если $\bar{\bar{y}}$ - другая слабо предельная точка последовательности $\{y_n\}$, то она тоже является точкой максимума формы ℓ на Q и $\|y_{n+1}-\bar{\bar{y}}\| \le \|y_n-\bar{\bar{y}}\|$ при всех n. Поэтому существует $\lim(y_n, \bar{\bar{y}}-\bar{y})$, так что $(\bar{y}, \bar{\bar{y}}-\bar{y}) = (\bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}-\bar{y})$, т.е. $\bar{y}=\bar{\bar{y}}$. Из ограниченности последовательности $\{y_n\}$ и единственности слабо предельной точки следует слабая сходимость этой последовательности. Теорема доказана.

При практических вычислениях проекция на множество Q конечно определяется с некоторой погрешностью. Естественно построить процесс так, чтобы эта погрешность уменьшалась по мере приближения к решению. Чтобы иметь возможность оценивать погрешность, с которой найдена проекция, предположим, что выбрана неотрицательная функция φ на H, обладающая следующим свойством: $d(\varepsilon) = \sup\{\inf\{\|x-y\| : y \in Q\} : \varphi(x) \le \varepsilon\} < +\infty$ при $\varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} d(\varepsilon) = 0$. Если множество Q задано системой уравнений и неравенств, то в качестве φ часто может выступать некоторая функция невязок при подстановке x в систему, например максимальная невязка или (взвешенная) сумма невязок. Опишем и обоснуем некоторую вычислительную процедуру, каждый шаг которой требует конечного числа действий. При этом необходимая точность проекции определяется в значительной степени автоматически. Как и раньше, через Py будем обозначать точную проекцию точки y на множество Q.

Выберем две убывающие и стремящиеся к нулю последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_k : k=0,1,\dots\}$ и $\{\delta_k : k=0,1,\dots\}$, а также точку $y_0 \in H$, для которой $\varphi(y_0) \le \varepsilon_0$. Выполнения последнего условия можно добиться либо выбором соответствующего ε_0, либо предварительным поиском с нужной точностью решения системы, описывающей множество Q. Будем последовательно строить приближения $y_1, y_2, \dots$, сопоставляя каждому y_n номер k_n, характеризующий точность попадания y_n в множество Q. Именно, всегда будет выполняться условие $\varphi(y_n) \le \varepsilon_{k_n}$. При этом, однако, не обязательно $\varphi(y_n) > \varepsilon_{k_n+1}$. Так что мы положим $k_0 = 0$, хотя y_0 может даже принадлежать Q.

Пусть уже построены $y_0, y_1, \dots, y_n$. Определим числа $r_k^{(n)}$, $k=0,1,\dots$, равенством $r_k^{(n)} = \max\{(\ell, y_s) : k_s \ge k\}$. При переходе от n к $n+1$ числа $r_k^{(n+1)}$ можно вычислять по $r_k^{(n)}$, а именно: $r_k^{(n+1)} = r_k^{(n)}$, если $k_{n+1} < k$, и $r_k^{(n+1)} = \max\{r_k^{(n)}, (\ell, y_{n+1})\}$

если $k_{n+1} \geq k$. Заметим, что при каждом n нужно иметь лишь конечное число $r_k^{(n)}$, так как $r_k^{(n)} = -\infty$ при $k > max\{k_s : 0 \leq s \leq n\}$.

Опишем очередной шаг. Будем искать проекцию на множество Q точки $y_n + \lambda_n \ell$. При этом будем применять один из методов, дающих вместе с приближением к проекции такое полупространство, что оно содержит множество Q, а найденное приближение является проекцией $y_n + \lambda_n \ell$ на это полупространство [I – 4]. Мы получим последовательность $\{x_n^{(\nu)} : \nu = 0, 1, \ldots\}$, которая сходится к $P(y_n + \lambda_n \ell)$, причем $(y_n + \lambda_n \ell - x_n^{(\nu)}, x - x_n^{(\nu)}) \leq 0$ при $x \in Q$. Для каждого ν обозначим через $\varkappa_\nu$ наименьший номер, для которого $\varphi(x_n^{(\nu)}) \geq \varepsilon_{\varkappa_\nu}$ (если оказалось, что $\varphi(x_n^{(\nu)}) = 0$, то будем считать $\varkappa_\nu = +\infty$). В итерационном процессе поиска проекции $P(y_n + \lambda_n \ell)$ остановимся на первом $\bar\nu$, для которого $\varphi(x_n^{(\bar\nu)}) \leq \varepsilon_0$ и выполнено одно из следующих (исключающих друг друга) условий:

а) $\varkappa_{\bar\nu} \leq k_n$, причем $(\ell, x_n^{(\bar\nu)}) \geq r_{\varkappa_{\bar\nu}}^{(n)} + \delta_{\varkappa_{\bar\nu}} \cdot \lambda_n$;

б) $\varkappa_{\bar\nu} > k_n$ и $(\ell, x_n^{(\bar\nu)}) \geq r_{k_n}^{(n)} + \delta_{k_n} \cdot \lambda_n$;

в) $\varkappa_{\bar\nu} > k_n$, но $(\ell, x_n^{(\bar\nu)}) < r_{k_n}^{(n)} + \delta_{k_n} \cdot \lambda_n$.

Поскольку последовательность $\{x_n^{(\nu)} : \nu = 0, 1, \ldots\}$ сходится к $P(y_n + \lambda_n \ell)$, а $\varepsilon_{k_n} > 0$, то такой номер $\bar\nu$ найдется и мы примем $y_{n+1} = x_n^{(\bar\nu)}$. Если реализовался случай а), то положим $k_{n+1} = \varkappa_{\bar\nu}$, если реализовался случай б), то положим $k_{n+1} = k_n$, а если реализовался случай в), то $k_{n+1} = k_n + 1$. Заметим, что в качестве $x_n^{(0)}$ можно (и, как правило, целесообразно) взять проекцию точки $y_n + \lambda_n \ell$ на полупространство $\{x \in H : (y_{n-1} + \lambda_{n-1} \ell - y_n, x - y_n) \leq 0\}$, так как оно содержит Q. Доказываемая ниже теорема служит обоснованием описанного метода.

ТЕОРЕМА 2. Пусть множество Q компактно и $0 < \alpha \leq \lambda_n \leq \beta < +\infty$. Тогда $\lim [\min\{\|y_n - y\| : y \in Q_0\}] = 0$, где Q_0 – множество точек максимума формы ℓ на Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что $\|y_n - Py_n\| \leq \leq d(\varphi(y_n)) \leq d(\varepsilon_0)$. Поэтому $(\ell, y_n) = (\ell, Py_n) + (\ell, y_n - Py_n) \leq \leq \ell_{max} + \|\ell\| \cdot d(\varepsilon_0)$. Здесь $\ell_{max} = max\{(\ell, x) : x \in Q\}$.

Покажем, что в последовательности $\{k_n\}$ каждый номер встречается лишь конечное число раз и, следовательно, $\lim \varphi(y_n)=0$. Действительно, предположим, что номера $0,1,\dots,s-1$ встречаются конечное число раз. Тогда найдется такое N, что $k_n \geq s$ при $n \geq N$. Это значит, что если $n \geq N$ и $k_{n+1}=s$, то $k_n \geq s$ и, следовательно, $(\ell, y_{n+1}) \geq r_s^{(n)} + \delta_s \cdot \lambda_n$. При этом $r_s^{(n+1)} = (\ell, y_{n+1}) \geq r_s^{(n)} + \delta_s \alpha$. Так как $\delta_s > 0$, а числа $r_k^{(n)}$ не убывают при возрастании n, то ввиду ограниченности (ℓ, y_n) такая ситуация может повториться лишь конечное число раз, т.е. s также лишь конечное число раз встречается в последовательности $\{k_n\}$.

Положим теперь при $x \in Q$ и $\lambda \geq 0$

$$\Delta(x,\lambda) = (\ell, P(x+\lambda\ell) - x).$$

Функция Δ непрерывна по паре (x,λ) и $\Delta(x,0)=0$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Так как $P(x+\lambda_1 \ell) \in Q$ и $P(x+\lambda_2 \ell) \in Q$, то, по определению P,

$$(x+\lambda_1 \ell - P(x+\lambda_1 \ell),\ P(x+\lambda_2 \ell) - P(x+\lambda_1 \ell)) \leq 0,$$

$$(x+\lambda_2 \ell - P(x+\lambda_2 \ell),\ P(x+\lambda_1 \ell) - P(x+\lambda_2 \ell)) \leq 0.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$((\lambda_1-\lambda_2)\ell + P(x+\lambda_2 \ell) - P(x+\lambda_1 \ell),\ P(x+\lambda_2 \ell) - P(x+\lambda_1 \ell)) \leq 0,$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)[\Delta(x,\lambda_1) - \Delta(x,\lambda_2)] \geq \|P(x+\lambda_2 \ell) - P(x+\lambda_1 \ell)\|^2.$$

Таким образом, Δ - неубывающая по λ функция. Заметим, что если $\Delta(\bar{x}, \alpha)=0$ при $\alpha > 0$, то $P\bar{x} = \bar{x}$ и точка $\bar{x}$ является точкой максимума формы ℓ на Q.

Покажем теперь, что для всякого $\delta > 0$ найдется такой номер N_δ, что $(\ell, y_{n+1}) - (\ell, y_n) \geq \frac{\delta}{2}$ для тех $n \geq N_\delta$, для которых $\Delta(Py_n, \alpha) \geq \delta$. Выберем $\epsilon > 0$ из условия

$$3\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \beta \cdot \|\ell\| \cdot \epsilon} \leq \frac{\delta}{\|\ell\|},$$

а номер N_δ так, что $\|Py_n - y_n\| \leq \epsilon$ при $n > N_\delta$. Положим для краткости $z = P(\lambda_n \ell + Py_n)$. Так как $z \in Q$ и $Py_{n+1} \in Q$, то, по определению оператора P и способу получения y_{n+1},

$$(y_n+\lambda_n\ell-y_{n+1},\ z-y_{n+1})\le 0,$$
$$(Py_n+\lambda_n\ell-z,\ Py_{n+1}-z)\le 0.$$

Из этих неравенств найдем

$$\|z-y_{n+1}\|^2\le(y_n+\lambda_n\ell-z,\ y_{n+1}-z)=(y_n-Py_n,\ y_{n+1}-z)+$$
$$+(Py_n+\lambda_n\ell-z,\ y_{n+1}-Py_{n+1})+(Py_n+\lambda_n\ell-z,\ Py_{n+1}-z)\le$$
$$\le\|y_n-Py_n\|\cdot\|y_{n+1}-z\|+\|Py_n+\lambda_n\ell-z\|\cdot\|y_{n+1}-Py_{n+1}\|.$$

Но Py_n тоже принадлежит Q. Поэтому $(Py_n+\lambda_n\ell-z,\ Py_n-z)\le 0$ и, следовательно, $\|Py_n+\lambda_n\ell-z\|\le\lambda_n\|\ell\|\le\beta\|\ell\|$. Таким образом, $\|z-y_{n+1}\|^2\le\varepsilon\|z-y_{n+1}\|+\varepsilon\beta\cdot\|\ell\|$, откуда получаем

$$\|P(\lambda_n\ell+Py_n)-y_{n+1}\|=\|z-y_{n+1}\|\le\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\beta\cdot\|\ell\|\cdot\varepsilon}\right).$$

Оценим приращение формы ℓ.

$$(\ell,y_{n+1})-(\ell,y_n)=(\ell,P(\lambda_n\ell+Py_n))-(\ell,Py_n)+(\ell,Py_n-y_n)+$$
$$+(\ell,y_{n+1}-P(\lambda_n\ell+Py_n))\ge\Delta(Py_n,\lambda_n)-\|\ell\|\cdot\|Py_n-y_n\|-$$
$$-\|\ell\|\cdot\|y_{n+1}-z\|\ge\delta-\|\ell\|\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\beta\cdot\|\ell\|\cdot\varepsilon}}{2}\right)\ge\frac{\delta}{2}.$$

Таким образом, существует нужное N_δ. Для определенности можно считать, что N_δ – наименьший из пригодных номеров.

Положим для $\eta>0$

$$\gamma(\eta)=\inf\{\Delta(x,\alpha):x\in Q,\ (\ell,x)\le\ell_{max}-\eta\}$$

и покажем, что $\gamma(\eta)>0$. Действительно, пусть существует такая последовательность $\{x_\tau,\ \tau=1,2,\dots\}$, что $(\ell,x_\tau)\le\ell_{max}-\eta$ и $\lim\Delta(x_\tau,\alpha)=0$. В силу непрерывности Δ для предельной точки $\bar{x}$ получим $(\ell,\bar{x})\le\ell_{max}-\eta$ и $\Delta(\bar{x},\alpha)=0$, что невозможно, так как при $\Delta(\bar{x},\alpha)=0$ должно быть $(\ell,\bar{x})=\ell_{max}$.

Покажем теперь, что $\lim (l, y_n) = l_{max}$. Заметим прежде всего, что при всех n

$$(y_n + \lambda_n l - y_{n+1}, Py_n - y_{n+1}) \le 0,$$

и поэтому

$$\lambda_n (l, Py_n - y_{n+1}) \le -\|Py_n - y_{n+1}\|^2 + (Py_n - y_n, Py_n - y_{n+1}) \le$$

$$\le -\|Py_n - y_{n+1}\|^2 + \|Py_n - y_n\| \cdot \|Py_n - y_{n+1}\| \le \frac{\|Py_n - y_n\|^2}{4}.$$

Таким образом,

$$(l, Py_n) \le (l, y_{n+1}) + \frac{\|Py_n - y_n\|^2}{4\alpha}. \qquad (3)$$

Возьмем $\eta > 0$ и выберем N настолько большим, что $N > N_{\gamma(\frac{\eta}{2})}$ и $\|Py_n - y_n\| \le \sqrt{2\eta\alpha}$ при $n \ge N$ (напомним, что в начале доказательства было получено равенство $\lim \varphi(y_n) = 0$ и, следовательно, $\lim \|Py_n - y_n\| = 0$). Предположим, что при некотором $n > N$ оказалось $(l, y_n) \le l_{max} - \eta$. Тогда согласно (3)

$$(l, Py_{n-1}) \le (l, y_n) + \frac{\|Py_{n-1} - y_{n-1}\|^2}{4\alpha} \le l_{max} - \frac{\eta}{2}.$$

Поэтому $\Delta(Py_{n-1}, \alpha) \ge \gamma(\frac{\eta}{2})$, и так как $n-1 \ge N_{\gamma(\frac{\eta}{2})}$, то

$$(l, y_{n-1}) \le (l, y_n) - \frac{1}{2}\gamma(\tfrac{\eta}{2}) < l_{max} - \eta.$$

Таким образом, если для некоторого $m > 0$ оказалось $(l, y_{N+m}) \le l_{max} - \eta$, то

$$(l, y_N) \le (l, y_{N+m}) - \frac{m}{2}\gamma(\tfrac{\eta}{2}) \le l_{max} - \eta - \frac{m}{2}\gamma(\tfrac{\eta}{2}).$$

Так что

$$m \le \frac{2[l_{max} - \eta - (l, y_N)]}{\gamma(\frac{\eta}{2})} = M.$$

Мы установили, что $(l, y_n) > l_{max} - \eta$ при $n > N + M$. Поскольку η было произвольным, то $\lim (l, y_n) = l_{max}$

Так как $\lim \| P y_n - y_n \| = 0$, то $\lim (l, P y_n) = l_{max}$, и ввиду компактности множества Q получаем, что

$$\lim [\min \{ \| P y_n - y \| : y \in Q \}] = 0 ,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Судить о достигнутой точности для приближения y_n можно по значению $\varphi(y_n)$, что характеризует точность попадания в Q, и по величине

$$\frac{(l, y_{n-1} + \lambda_{n-1} l - y_n)}{\| l \| \cdot \| y_{n-1} + \lambda_{n-1} l - y_n \|} .$$

Отклонение от единицы этой величины при малом $\varphi(y_n)$ характеризует отклонение l от конуса нормалей к множеству Q в точке $P y_n$, т.е. точность выполнения признака максимума.

Литература

1. БУЛАВСКИЙ В.А. Один специальный алгорифм квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5, Новосибирск, 1972, с. 23-26.
2. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном типе проекционных методов в математическом программировании. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5, Новосибирск, 1972, с. 11-22.
3. БУЛАВСКИЙ В.А. О конечномерной аппроксимации в некоторых выпуклых задачах. - В кн.: Оптимизация. Вып. 9, Новосибирск, 1973, с. 181-187.
4. ЛОБЫРЕВ А.И. О минимизации строго выпуклой функции на пересечении выпуклых множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5, Новосибирск, 1972, с. 128-132.

Поступила в ред.-изд. отд.
28. VI. 1974 г.