1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Модели динамики и равновесия

УДК 330.115.001.57 (047)

# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОДНОПРОДУКТОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В.И.Жиянов

В настоящей заметке получено решение системы уравнений, описывающей однопродуктовую динамическую модель экономики, построенную в работе [I]. Вычислены некоторые экономические параметры, характеризующие развитие экономической системы, заданное полученным решением.

Для удобства кратко напомним построение модели. Рассматривается экономическая система, в которой создается один продукт. $T(t)$ - ресурсы труда в момент $t$ - заданная функция. Вводится параметр $\lambda(t)$ - тип (или структура) создаваемых в момент времени $t$ новых фондов, характеризуемый ценой (выраженной в продукте) единичных фондов (фондов, приходящихся на единицу труда). Предполагается, что фонды, создаваемые в каждый момент времени $t$, однотипные ( $\lambda(t)$ - однозначная функция $t$ ). Через $\varphi(t)$ обозначается интенсивность создания фондов, т.е. $\varphi(t)dt$ - количество новых рабочих мест, созданных за время $[t, t+dt]$, тогда $\lambda(t)\cdot\varphi(t)dt$ - объем вновь созданных фондов в том же интервале. Функции $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ в модели подлежат нахождению.

Предполагается, что возможные производственные способы характеризуются производственной функцией $U(x,y)$, которая показывает количество чистого продукта, создаваемого трудом $y$ при использовании основных фондов $x$ в единицу времени (на начальный момент). Относительно функции $U(x,y)$ предполагается, что она является положительно однородной первой степени, т.е. $U[\lambda x, \lambda y] = \lambda U[x, y]$ при $\lambda > 0$, и базируется на оптимальных способах, что делает естественным предположение о выпуклости $U(x, 1)$.

Учёт технического прогресса в модели производится следующим способом. Предполагается, что количество чистого продукта, произведенного в единицу времени при данном размере фондов и затратах труда, возрастает экспоненциально в зависимости от момента создания фондов $\tau$ – превосходит в $e^{\delta\tau}$ раз ( $\delta$ – фиксированное неотрицательное число) количество продукции, производимое на фондах, созданных в начальный момент, при тех же условиях.

Предполагается также, что в процессе развития экономики происходит снятие трудовых ресурсов с фондов низкой структуры, ранее созданных. Трудовые ресурсы, высвободившиеся со снятых фондов, используются на вновь создаваемых фондах, оставленные фонды в дальнейшем не используются. В предположении непрерывного роста органического строения капитала (новых фондов) политика вывода фондов из производства характеризуется функцией $m(t)$, именно к моменту времени $t$ высвобождаются все фонды, созданные до некоторого момента времени $m(t)$. Функция $m(t)$ в модели подлежит определению.

Капиталовложения, идущие на увеличение основных и оборотных фондов, задаются через их интенсивность так, что $x(t)dt$ – объем капиталовложений во временном интервале $[t, t+dt]$. Функция $x(t)$ является в модели заданной, однако $x(t)$ может быть поставлена в зависимость от национального дохода в момент $t$ или других параметров модели.

Система уравнений, описывающих модель, имеет вид:

$$\varphi(t) = T'(t) + \varphi[m(t)]\, m'(t), \tag{I.1}$$

$$\lambda(t)\varphi(t) = x(t), \tag{I.2}$$

$$\varphi(t)U[\lambda(t),1] - x(t)U'_x[\lambda(t),1] - e^{\delta[m(t)-t]}\varphi(t)U[\lambda[m(t)],1] = 0 \tag{I.3}$$

Система решается для $t > t_H$ ( $t_H$ – фиксированное число). Начальные условия задаются в виде $m(t_H) = m_H$ ($m_H \le t_H$), $\lambda(t) = \lambda_H(t)$ и $\varphi(t) = \varphi_H(t)$ при $t \in [m_H, t_H]$, где $m_H$ – заданное число, а $\lambda_H(t)$ и $\varphi_H(t)$ – функции, задающие начальное распределение (при $t \in [m_H, t_H]$) фондов и труда.

Уравнение (I.I) отражает баланс по труду. Уравнение (I.2) отражает баланс по фондам. Уравнение (I.3) является условием дифференциальной оптимизации. Это условие означает, что прирост чистой продукции в каждый момент времени должен быть максимальным, другими словами, функции $m(t)$, $\varphi(t)$, $\lambda(t)$ должны быть определены так, чтобы функция $dP(t)/dt$ была максимальной в каждый момент времени $t$. Здесь $P(t)$ – количество чистой продукции (национальный доход), производимый в момент $t$ в расчёте на единицу времени. Для $P(t)$ справедлива формула:

$$P(t)=\int_{m(t)}^{t} e^{\delta t} U[\lambda(\tau),1]\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{I.4}$$

2. В этом пункте зададимся конкретным видом функций $U(x,y)$, $T(t)$ и $x(t)$. Производственная функция имеет вид $U(x,y)=x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ ($0<\alpha<1$) – функция Кобба-Дугласа. Ресурсы труда растут экспоненциально $T(t)=T_0 e^{\rho t}$, где $\rho$ – демографическая норма роста, $T_0=T(t_н)$ – трудовые ресурсы на начальный момент. Плотность капиталовложений постоянна, $x(t)=x$ – положительное число.

При таком задании экзогенных переменных система уравнений (I.I) – (I.3), описывающих модель, приобретает следующий вид:

$$\varphi(t)=T_0 e^{\rho t}+\varphi[m(t)]\,m'(t), \tag{2.1}$$

$$\lambda(t)\varphi(t)=x, \tag{2.2}$$

$$\varphi(t)\lambda^{\alpha}(t)-x\alpha\lambda^{\alpha-1}(t)-e^{\delta[m(t)-t]}\varphi(t)\lambda^{\alpha}[m(t)]=0. \tag{2.3}$$

Будем искать решение этой системы уравнений для $t>0$ ($t_н=0$), $m_н=0$. Интервал $[m_н, t_н]$ в этом случае вырождается в точку, следовательно, начальные распределения фондов и труда задавать не нужно.

Будем считать, что величины $\rho$ и $\delta$ ($\delta$ – показатель, характеризующий технический прогресс) малы, что согласуется со статистическими данными. Предположим, что система уравнений (2.I)-(2.3) имеет решение и функции $m(t)$, $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$ можно на интервале $(0, T)$ разложить в ряд по степеням $\delta$ и $\rho$:

$$m(t)=m_0(t)+\delta m_\delta(t)+pm_p(t)+\delta^2 m_{\delta 2}(t)+p\delta m_{p\delta}(t)+p^2 m_{p2}(t)+\dots$$

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)+\delta\varphi_\delta(t)+p\varphi_p(t)+\delta^2\varphi_{\delta 2}(t)+p\delta\varphi_{p\delta}(t)+p^2\varphi_{p2}(t)+\dots$$

$$\lambda(t)=\lambda_0(t)+\delta\lambda_\delta(t)+p\lambda_p(t)+\delta^2\lambda_{\delta 2}(t)+p\delta\lambda_{p\delta}(t)+p^2\lambda_{p2}(t)+\dots$$

Подставим эти ряды в систему уравнений (2.I)-(2.3) и последовательно определим функции $m_0(t)$, $\varphi_0(t)$, $\lambda_0(t)$, затем $m_\delta(t)$, $\varphi_\delta(t)$, $\lambda_\delta(t)$ и $m_p(t)$, $\varphi_p(t)$, $\lambda_p(t)$. Членами порядка малости выше первой относительно $\delta$ и $p$ пренебрегаем. Рассмотрим этот процесс подробнее.

## Нахождение функций $m_0(t)$, $\varphi_0(t)$ и $\lambda_0(t)$

Полагаем $\delta=0$ и $p=0$. Система уравнений (2.I)-(2.3) приобретает следующий вид:

$$\varphi_0(t)=\varphi_0[m_0(t)]\,m_0'(t), \tag{2.4}$$

$$\varphi_0(t)\lambda_0(t)=\varkappa, \tag{2.5}$$

$$\varphi_0(t)\lambda_0^\alpha(t)-\varkappa\alpha\lambda_0^{\alpha-1}(t)-\varphi_0(t)\lambda_0^\alpha[m_0(t)]=0. \tag{2.6}$$

Воспользовавшись уравнением (2.5), запишем (2.6) в виде:

$$\varkappa^\alpha\varphi_0^{1-\alpha}(t)-\varkappa\alpha\frac{\varkappa^{\alpha-1}}{\varphi^{\alpha-1}(t)}-\frac{\varphi_0(t)\varkappa^\alpha}{\varphi_0^\alpha[m_0(t)]}=0.$$

Заменяя $\varphi_0[m_0(t)]$ через $\dfrac{\varphi_0(t)}{m_0'(t)}$ (из уравнения (2.4)), получаем из предыдущего равенства такое уравнение:

$$\varkappa^\alpha\varphi_0^{\alpha}(t)\{(1-\alpha)-[m_0'(t)]^\alpha\}=0,$$

или

$$m_0'(t)=\beta,$$

где $\beta=(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Интегрируя это уравнение, имеем: $m_0(t)=\beta t+c$. Из условия $0\le m_0(t)<t$ при $t>0$ заключаем, что $c=0$. Получаем для $m_0(t)$ следующий вид:

$$m_0(t)=\beta t. \tag{2.7}$$

Подставляем найденный вид функции $m_0(t)$ в (2.4) и получаем функциональное уравнение для $\varphi_0(t)$.

$$\varphi_0(t)=\varphi_0(\beta t)\beta.$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\varphi_0(t)=Ct^{\gamma}+B$. Для определения $C$, $B$ и $\gamma$ подставляем $\varphi_0(t)$ с неопределенными коэффициентами в уравнение и приравниваем члены с одинаковой степенью $t$. Зная, что $\varphi_0(t)$ должна быть положительной функцией (по построению модели), получаем для неё следующий вид:

$$\varphi_0(t)=\frac{C}{t}, \tag{2.8}$$

где $C$ — произвольная положительная константа.

Подставляем найденный вид функции $\varphi_0(t)$ в (2.5) и находим

$$\lambda_0(t)=\frac{\varkappa t}{C}. \tag{2.9}$$

Решение (2.7)-(2.9) характеризует развитие экономической системы, описанной в модели при отсутствии технического прогресса и постоянных трудовых ресурсах.

Положим значение $C=1$, тогда решение (2.7)-(2.9) имеет вид :

$$m_0(t)=\beta t, \tag{2.7a}$$

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{t}, \tag{2.8a}$$

$$\lambda_0(t)=\varkappa t. \tag{2.9a}$$

Для экономии места в дальнейшем будем оперировать с решением (2.7а)-(2.9а), а общее решение (с произвольными константами) приведем в конце.

## Нахождение функций $m_\delta(t)$, $\varphi_\delta(t)$ и $\lambda_\delta(t)$

Для нахождения вида этих функций полагаем $\rho=0$ и подставляем в систему (2.I)-(2.3) $m(t)=m_0(t)+\delta m_\delta(t)$, $\varphi(t)=\varphi_0(t)+\delta\varphi_\delta(t)$, $\lambda(t)=\lambda_0(t)+\delta\lambda_\delta(t)$. Получаем следующую систему уравнений:

$$\varphi_0(t)+\delta\varphi_\delta(t)=\{\varphi_0[m_0(t)+\delta m_\delta(t)]+\delta\varphi_\delta[m_0(t)+\delta m_\delta(t)]\}[m_0'(t)+\delta m_\delta'(t)],$$

$$[\lambda_0(t)+\delta\lambda_\delta(t)][\varphi_0(t)+\delta\varphi_\delta(t)]=\varkappa,$$

$$\varkappa^{\alpha}[\varphi_0(t)+\delta\varphi_\delta(t)]^{\alpha}\{(1-\alpha)-e^{\delta[m_0(t)+\delta m_\delta(t)-t]}[m_0'(t)+\delta m_\delta(t)]^{\alpha}\}=0.$$

Отбрасываем величины порядка малости выше первой по $\delta$ и заменяем $\varphi(x+\delta y)$ на $\varphi(x)+\delta\varphi'(x)y$, а $e^{\delta x}$ на $1+\delta x$.

Затем приравниваем члены, содержащие $\delta$ в первой степени, и получаем систему уравнений для определения $m_\gamma(t)$, $\varphi_\gamma(t)$ и $\lambda_\gamma(t)$.

$$\varphi_\gamma(t)=\varphi_0'[m_0(t)]m_0'(t)m_\gamma(t)+m_0'(t)\varphi_\gamma[m_0(t)]+\varphi_0[m_0(t)]m_\gamma'(t) \qquad (2.10)$$

$$\lambda_0(t)\varphi_\gamma(t)+\varphi_0(t)\lambda_\gamma(t)=0, \qquad (2.11)$$

$$m_\gamma'(t)+\frac{1}{\alpha}m_0(t)m_0'(t)-\frac{1}{\alpha}m_0'(t)=0. \qquad (2.12)$$

Пользуясь видом $m_0(t)$, из уравнения (2.12) получаем:

$$m_\gamma'(t)=\frac{\beta(1-\beta)}{\alpha}t.$$

Интегрируя, получаем $m_\gamma(t)=\dfrac{\beta(1-\beta)t^2}{2\alpha}+C$. Константа $C=0$, так как $0<m_0(t)+\delta m_\gamma(t)<t$ при любом $t>0$. Для функции $m_\gamma(t)$ получаем такое выражение:

$$m_\gamma(t)=\frac{\beta(1-\beta)}{2\alpha}t^2. \qquad (2.13)$$

Подставим в (2.10) полученные выражения для $m_0(t)$, $\varphi_0(t)$ и $m_\gamma(t)$. Имеем функциональное уравнение для нахождения $\varphi_\gamma(t)$:

$$\varphi_\gamma(t)=\beta\varphi_\gamma[\beta t]+\frac{1-\beta}{2\alpha}.$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\varphi_\gamma(t)=Ct^\gamma+B$. Подставляем этот вид функции $\varphi_\gamma(t)$ в уравнение и определяем неизвестные константы $C$, $B$ и $\gamma$. Получаем:

$C$ произвольное, $B=\dfrac{1}{2\alpha}$, $\gamma=-1$.

И выражение для функции $\varphi_\gamma(t)$ имеет следующий вид:

$$\varphi_\gamma(t)=\frac{C}{t}+\frac{1}{2\alpha}.$$

Константу $C$ полагаем равной $\dfrac{1}{2\alpha}$ и получаем $\varphi_\gamma(t)$ в виде:

$$\varphi_\gamma(t)=\frac{t+1}{2\alpha t}. \qquad (2.14)$$

Теперь из (2.11) находим вид функции $\lambda_\gamma(t)$:

$$\lambda_\gamma(t)=-\frac{\varkappa t(t+1)}{2\alpha}. \qquad (2.15)$$

Найденные функции (2.7)-(2.9) и (2.13)-(2.15) позволяют нам проанализировать развитие экономики в рамках построенной модели при постоянных трудовых ресурсах и малом влиянии технического прогресса. Рассмотрим одно из решений уравнений модели (задаваемое выбором констант):

$$m(t)=m_0(t)+\delta m_\delta(t)=\beta t[1+\delta \frac{1-\beta}{2\alpha}t],$$

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)+\delta\varphi_\delta(t)=\frac{1}{t}[1+\delta\frac{(t+1)}{2\alpha}],$$

$$\lambda(t)=\lambda_0(t)+\delta\lambda_\delta(t)=\varkappa t[1-\delta\frac{t+1}{2\alpha}].$$

Это решение показывает, что при учёте технического прогресса спектр типов фондов несколько уже, а вводимые фонды имеют более низкое строение капитала и вводятся они с большей интенсивностью, чем в случае отсутствия технического прогресса.

## Нахождение функций $m_p(t)$, $\varphi_p(t)$ и $\lambda_p(t)$

Полагаем $\delta=0$ и подставляем в систему уравнений (2.I)-(2.3) $m(t)=m_0(t)+pm_p(t)$, $\varphi(t)=\varphi_0(t)+p\varphi_p(t)$, $\lambda(t)=\lambda_0(t)+p\lambda_p(t)$.
Получаем систему уравнений:

$$\varphi_0(t)+p\varphi_p(t)-pT_0e^{pt}\{\varphi_0[m_0(t)+pm_p(t)]+p\varphi_p[m_0(t)+pm_p(t)]\}[m_0'(t)+pm_p'(t)]$$
$$[\lambda_0(t)+p\lambda_p(t)][\varphi_0(t)+p\varphi_p(t)]=\varkappa,$$

$$\varkappa^{\alpha}[\varphi_0(t)+p\varphi_p(t)]^{\alpha}\{(1-\alpha)-[m_0'(t)+pm_p'(t)]^{\alpha}\}=0.$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, заключаем, что

$$m_p(t)=0, \tag{2.I6}$$

$$\varphi_p(t)=T_0(t+1)/(1-\beta)t, \tag{2.I7}$$

$$\lambda_p(t)=-T_0\varkappa t\frac{t+1}{(1-\beta)}. \tag{2.I8}$$

Окончательно вид функций $m(t)$, $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$, дающий решение модели при малом росте трудовых ресурсов и слабом влиянии технического прогресса, выглядит так:

$$m(t)=m_0(t)+\delta m_\delta(t)+pm_p(t)=\beta t[1+\delta\frac{1-\beta}{2\alpha}t]. \tag{2.I9}$$

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)+\delta\varphi_\delta(t)+\rho\varphi_\rho(t)=\frac{1}{t}\Big[1+\delta\frac{t+1}{2\alpha}+\rho\frac{T_0(t+1)}{1-\beta}\Big], \tag{2.20}$$

$$\lambda(t)=\lambda_0(t)+\delta\lambda_\delta(t)+\rho\lambda_\rho(t)=\varkappa t\Big[1-\delta\frac{t+1}{2\alpha}-\rho T_0\frac{t+1}{1-\beta}\Big]. \tag{2.21}$$

Из этого решения можно заключить, что рост трудовых ресурсов не влияет на политику вывода фондов из производства, увеличивая лишь интенсивность создания новых фондов. При этом (вследствие постоянной интенсивности капиталовложений) вводимые в производство фонды имеют более низкое органическое строение капитала, чем в случае постоянных трудовых ресурсах.

Приведем решение системы уравнений (2.I)-(2.3), содержащее константы, которые могут быть определены не произвольно, как это сделано выше, а состоянием модели в некоторый момент времени.

$$m(t)=\beta t\Big[1+\delta\frac{1-\beta}{2\alpha}t\Big],$$

$$\varphi(t)=\frac{C_1}{t}\Big[1+\delta\frac{t+C_2}{2\alpha}+\rho T_0\frac{t+C_3}{1-\beta}\Big],$$

$$\lambda(t)=\frac{\varkappa t}{C_1}\Big[1-\delta\frac{t+C_2}{2\alpha}-\rho T_0\frac{t+C_3}{1-\beta}\Big].$$

Здесь $C_1>0$. Напомним, что $\delta$ и $\rho$ – достаточно малые величины, такие что, например, условие $m(t)<t$ будет выполнено.

3. В этом пункте найдём выражения некоторых экономических параметров, характеризующих развитие экономической системы в рамках построенной модели.

<u>Национальный доход $P(t)$ (в единицу времени)</u>

Для функции $P(t)$ выше была приведена следующая формула:

$$P(t)=\int_{m(t)}^{t} e^{\delta\tau}\,U[\lambda(\tau),1]\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Представим функцию $P(t)$ в виде

$$P(t)=P_0(t)+\delta P_\delta(t)+\rho P_\rho(t)+\dots$$

Воспользовавшись видом функций $U(x,y)$, $m(t)$, $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$, получим вид $P(t)$, соответствующий данному решению.

Нахождение $P_0(t)$. При $\delta=0$ и $\rho=0$: $m(t)=m_0(t)$, $\varphi(t)=\varphi_0(t)$, $\lambda(t)=\lambda_0(t)$. Соответственно для $P_0(t)$ получаем выражение

$$P_0(t)=\int\limits_{m_0(t)}^{t}\lambda_0^{\alpha}(\tau)\varphi(\tau)d\tau=\varkappa^{\alpha}\int\limits_{m_0(t)}^{t}\lambda^{\alpha-1}(\tau)d\tau=\varkappa^{\alpha}t^{\alpha}. \qquad (3.\text{I})$$

Полагая $\rho=0$, находим $P_\delta(t)$, затем определяем $P_\rho(t)$. Не приводя выкладок, запишем окончательный вид функции $P(t)$.

$$P(t)=\varkappa^{\alpha}t^{\alpha}[1+\delta(dt+b)+\rho T_0(ct+a)], \qquad (3.2)$$

где

$$a=\frac{2\alpha-1+\beta^{2\alpha+1}}{2\alpha^2};\ b=\frac{\alpha-1}{2\alpha};\ c=\frac{(1-\alpha)(1-\beta^{\alpha+1})}{(1-\beta)(1+\alpha)};\ d=\frac{\alpha-1}{1-\beta}.$$

Выражение (3.2) дает зависимость роста национального дохода (в единицу времени) от демографической нормы роста трудовых ресурсов (параметр $\rho$) и параметра, характеризующего технический прогресс.

## Норматив эффективности капиталовложений.

Этот параметр экономической системы определяется приростом (в единицу времени) произведенной продукции, отнесенной к вызвавшим его дополнительным капиталовложениям. В работе [I] была найдена формула для вычисления значения норматива эффективности (функция $n(t)$).

$$n(t)=e^{\delta t}U'_{\varkappa}[\lambda(t),1].$$

Представляя функцию $n(t)$ в параметрическом виде

$$n(t)=n_0(t)+\delta n_\delta(t)+\rho n_\rho(t)$$

и воспользовавшись видом функций $U(x,y)$, $m(t)$, $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$, находим зависимость норматива эффективности капиталовложений от демографической нормы роста трудовых ресурсов и параметра, характеризующего технический прогресс. Не приводя промежуточных выкладок, запишем окончательную формулу

$$n(t)=\alpha\varkappa^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\left\{1+\delta\frac{(1+\alpha)t+(1-\alpha)}{2\alpha}+\rho T_0\frac{t+1}{1-\beta}\right\}. \qquad (3.3)$$

Автор благодарит Л.В.Канторовича за научное руководство при написании настоящей заметки.

## Литература

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЖИЯНОВ В.И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса. - "Докл. АН СССР", 1973, т. 211, № 6, с. 1280-1283.

Поступила в ред.-изд. отд.

3. X. 1974 г.