1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 14(31)
Смежные математические вопросы

УДК 513.88

О ГРАНИЦЕ МАРТИНА В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э.О.Рапопорт

Предлагаемая статья посвящена построению границы Мартина для полугруппы, действующей в полуупорядоченном пространстве. Подобные построения для счётных пространств сделаны в [1-3]. Предлагаемая схема позволяет отказаться от условия счетности пространства. Мы будем придерживаться терминологии работы [4].

Пусть L - K-пространство с единицей такое, что в его подпространстве ограниченных элементов $\bar{L}$ существует существенно положительный (o)-линейный функционал γ, причем $\gamma(1)=1$. Как показано в [5,стр.416] такое пространство является пространством счетного типа. Через G будем обозначать базу этого пространства.

Рассмотрим в L полугруппу положительных (o)-линейных операторов $\{T_t\}$ такую, что

1. $(o)-\lim T_t g = g \quad \forall g \in L$;

2. $T_t 1 \leqslant 1$.

Заметим, что эти условия обеспечивают (o)-непрерывность функции $u_g(t) = T_t g$ в области $t \geqslant 0$ для каждого $g \in \bar{L}$.

Определим (o)-инфинитезимальный оператор A полугруппы $\{T_t\}$ по формуле

$$Ag = (o)-\lim_{t \to +0} \frac{T_t g - g}{t}.$$

Через $\mathcal{D}(A)$ обозначим область определения оператора A.

Резольвентой полугруппы естественно назвать оператор R_λ

$(\lambda > 0)$ такой, что

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f\,dt, \quad f \in \overline{L}.$$

Так как функция $u_f(t)$ (o)-непрерывна, то рассматриваемый интеграл есть обычный интеграл Римана со значениями в $\overline{L}$. Ясно, что R_λ определен на $\overline{L}$ и в этом подпространстве он аддитивен, однороден, положителен и ограничен. Кроме того, справедливы следующие утверждения:

1) A - замкнутый оператор;
2) $\forall f \in \overline{L}$ $(o)-\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda f = f$;
3) $\forall f \in \overline{L}$ и $\forall \lambda > 0$, уравнение $\lambda g - Ag = f$ имеет единственное решение $g = R_\lambda f$;
4) $R_\lambda f - R_\mu f = -(\lambda-\mu) R_\lambda R_\mu f$.

Эти утверждения доказываются обычными методами (см., например, [6]). Из них вытекает, что область значений $\mathcal{D}$ оператора R_λ не зависит от λ и совпадает с $\mathcal{D}(A)$ - областью определения A. Легко увидеть, что $\mathcal{D}$ всюду плотно в $\overline{L}$. Наложим еще одно условие на полугруппу.

($*$) Существует такое множество $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$ попарно дизъюнктных элементов из G, что

$$\sum_{i=1}^\infty e_i = 1 \quad \text{и} \quad Re_i = (o)-\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda e_i \in \overline{L}.$$

Отметим, что если полугруппа определяет случайное блуждание, то условие ($*$) эквивалентно условию невозвратности этого блуждания.

Пусть Ω - множество единичных элементов таких, что

$$\forall e \in \Omega \qquad Re = (o)-\lim R_\lambda e \in \overline{L}.$$

Из условия ($*$) следует, что Ω - полное множество.

Для каждого $e \in \Omega$ положим

$$\varphi(e) = \frac{Re}{\gamma(Re)}. \tag{I}$$

Заметим, что $\varphi(e) \in \mathcal{D}$, причем если $e_1 d e_2$, ($e_1 \in \Omega$, $e_2 \in \Omega$), то $Pr_{e_1}(A\varphi(e_2)) = 0$. Отсюда следует, что если $\varphi(e_1) = \varphi(e_2)$, то $e_1 = e_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Элемент $f \in L$ будем называть <u>эксцессивным</u>, если $f \geq 0$ и $T_t f \leq f$. Эксцессивный элемент f будем называть <u>строго эксцессивным</u>, если $T_t f \searrow 0$. Элемент f будем называть гармоническим, если $f \geq 0$ и $T_t f = f$.

Отметим, что $\varphi(e)$, определённое по формуле (I), - эксцессивный элемент, так как

$$T_t \varphi(e) = \frac{T_t Re}{\gamma(Re)} \leq \frac{Re}{\gamma(Re)} = \varphi(e).$$

ЛЕММА I. Для каждого счетного набора $\{e_n\} \subset \Omega$ существует такое полное множество $H \subset G$ попарно дизъюнктных элементов, что для каждого $s \in H$

$$Pr_s\, \varphi(e_n) \leq \frac{3s}{\gamma(s)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $Re \in L$, то существует такая последовательность попарно дизъюнктных единичных элементов $\{s_i\}$, что

$$Re = (r) - \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i ;$$

с единицей в качестве регулятора сходимости. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma(Re)$. Для этого ε существует N такое, что для всех $n \geq N$

$$-\varepsilon \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \leq Re \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i + \varepsilon \mathbf{1}.$$

Разделим это неравенство на $\gamma(Re)$ и спроектируем на компоненту, порожденную s_i. Получим

$$\frac{(\lambda_i - \varepsilon) s_i}{\gamma(Re)} \leq \frac{Pr_{s_i}(Re)}{\gamma(Re)} \leq \frac{(\lambda_i + \varepsilon) s_i}{\gamma(Re)}.$$

Ясно, что

$$\gamma(Re) \geq -\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma(s_i).$$

Если $\lambda_i < \frac{\gamma(Re)}{2} = \varepsilon$, то

$$\frac{Pr_{s_i}(Re)}{\gamma(Re)} \leq \frac{\gamma(Re_i) s_i}{\gamma(Re)} \leq -\frac{3s_i}{\gamma(s_i)} \quad (\gamma(s_i) < 1).$$

Если $\lambda_i > \frac{r(Re)}{2}$, то

$$r(Re) \geq -\frac{1}{2} r(Re) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(s_i) ,$$

или

$$\frac{3}{2} r(Re) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(s_i) \geq \lambda_i r(s_i).$$

Поэтому

$$\frac{Pr_{s_i}(Re)}{r(Re)} \leq \frac{2\lambda_i s_i}{\frac{2}{3}\lambda_i r(s_i)} = \frac{3 s_i}{r(s_i)} .$$

Таким образом, показано, что для каждого $e \in \Omega$ требуемый набор единичных элементов существует. Заметим теперь, что если $a \in G$ и $a \leq s_i$, то

$$\frac{Pr_a Re}{r(Re)} = \frac{Pr_a(Pr_{s_i} Re)}{r(Re)} \leq \frac{Pr_a(3s_i)}{r(s_i)} = \frac{3a}{r(s_i)} \leq \frac{3a}{r(a)} ,$$

так как $r(a) \leq r(s_i)$.

Для каждого $e_n \in \Omega$ рассмотрим разбиение H_{e_n} - совокупность единичных элементов таких, что выполняется утверждение леммы.

Рассмотрим множество H всех ненулевых элементов вида

$$e = \bigwedge_n e_n^{i_n},\ 1 \leq i_n \leq k_n,\ e_n^{i_n} \in H_{e_n}.$$

Пусть $e', e'' \in H$. Ясно, что $e' d e''$, поскольку найдется хотя бы одно n такое, что

$$(e_n^{i_n})' \neq (e_n^{i_n})'' \text{ и } e_n^i d e_n^j \ (i \neq j).$$

Легко видеть также, что $\sum_{e \in H} e = 1$. Следовательно, множество H, состоящее из счетного числа попарно дизъюнктных элементов, искомое.

СЛЕДСТВИЕ. Множество $\{\varphi(e)\}$, $e \in \Omega$, ограничено в Σ-максимальном расширении пространства L.

Действительно, в L ряд $\sum_i \frac{s_i}{r(s_i)}$ (o)- сходится. Поэтому множество $\{\varphi(e_n)\}$ (o)- аннулируемо для любой последовательности $\{e_n\}$ элементов из Ω, что и влечет ограниченность множества $\{\varphi(e)\}$.

ТЕОРЕМА I. Множество $\{\varphi(e)\}$ относительно компактно в (o)-топологии пространства $\tilde{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{s_i\}$ – разбиение единицы на дизъюнктные единичные элементы такие, что

$$\forall e \in \Omega \cdot \quad Pr_{s_i}\, \varphi(e) \le \frac{3s_i}{\gamma(s_i)}.$$

Зафиксируем компоненту L_i, порожденную элементом s_i. Множество Ω_i – проекция на эту компоненту множества $\{\varphi(e)\}_{e\in\Omega}$ – ограниченное множество ограниченных элементов. Поэтому каждый $x\in\Omega_i$ представим как (r)-предел последовательности конечнозначных элементов с s_i в качестве регулятора сходимости:

$$x = (r)-\lim \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j k_j.$$

Как и в доказательстве леммы I, для каждого δ можно получить счетный набор попарно дизъюнктных единичных элементов k_j таких, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_j = s_i \quad \text{и} \quad |x - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x) k_j| \le \delta s_i.$$

Заметим, что $0 \le \lambda_j(x) \le \frac{3}{\gamma(s_i)}$ для любого $x\in\Omega_i$. Поскольку $\sum_{j=1}^{\infty} k_j = s_i$, то $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma(k_j) = \gamma(s_i)$. Поэтому существует m такое, что

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma(k_j) \le \delta(\gamma(s_i))^2.$$

Пусть Δ – конечная δ – сеть для отрезка $[0, 3/\gamma(s_i)]$. Рассмотрим множество Ψ_δ – совокупность всех конечнозначных элементов ψ таких, что $\psi = \sum_{j=1}^{m} \mu_j k_j$, $\mu_j \in \Delta$. Тогда для каждого x найдется элемент $\psi_x \in \Psi_\delta$ такой, что для всех j, не превосходящих m, $|\lambda_j(x) - \lambda_j(\psi_x)| < \delta$. Поэтому

$$\gamma(|x-\psi_x|) = \gamma(|x - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(\psi_x) k_j|) \le \gamma(|x - \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(x) k_j| +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{\infty}\lambda_j(x) k_j + \sum_{j=1}^{m}|\lambda_j(x) - \lambda_j(\psi_x)| k_j) \le \delta\gamma(s_i) +$$

$$+ \frac{3\delta(\gamma(s_i))^2}{\gamma(s_i)} + \delta\gamma(s_i) = 5\delta\gamma(s_i).$$

Множество Ψ_δ состоит из конечного числа элементов и образует " ε -сеть" по функционалу γ, где $\varepsilon = 5\delta \cdot \gamma(s_i)$. Однако функционал γ не является метрикой. Пусть x_n - проекции на L_i произвольной последовательности $\varphi(e_n), e_n \in \Omega$. Возьмем последовательность $\varepsilon_k \to 0$ и построим, как показано выше, множество Ψ_{δ_k} - конечную " ε_k -сеть". Пусть $B_k(\psi) = \{x \in \Omega_i^k : \gamma(|x-\psi|) < \varepsilon_k\}$. Множества $B_k(\psi)$, $\psi \in \Psi_{\delta_k}$, образуют покрытие множества Ω_i. Определим по индукции последовательность P_k. Пусть P_1 - множество из семейства $\{B_1(\psi)\}$, $\psi \in \Psi_{\delta_1}$, содержащее бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Положим $P_k = P_{k-1} \cap S_k(\psi)$, где $S_k(\psi)$ - множество из семейства $\{B_k(\psi)\}$, $\psi \in \Psi_{\delta_k}$, содержащее бесконечно много элементов из $\{x_n\}$. Ясно, что $P_k \supset P_{k+1}$. Выберем последовательность $x_{n_k} \in P_k \setminus P_{k+1}$. Поскольку $x_{n_{k+s}} \in P_k$, $s > 0$, то

$$\gamma(|x_{n_k} - x_{n_{k+s}}|) \leq \gamma(|x_{n_k} - \psi_k|) + \gamma(|x_{n_{k+s}} - \psi_k|) \leq 2\varepsilon_k,$$

где $\psi_k \in \Psi_{\delta_k} \cap P_k$. Отсюда $\gamma(|x_{n_k} - x_{n_{k+s}}|) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ равномерно по s. Но тогда и $\gamma(\operatorname{arctg}|x_{n_k} - x_{n_{k+s}}|) \to 0$. Поскольку $\rho(x) = \gamma(\operatorname{arctg} x)$ является метрической функцией, то по теореме о метрической полноте KM -пространства (см. [5], стр. 198) последовательность x_{n_k} имеет предел. Для завершения доказательства теоремы нужно выбирать сходящуюся подпоследовательность по очереди в каждой компоненте.

Пусть Q - вполне несвязный экстремальный компакт, совокупность открыто-замкнутых множеств которого изоморфна G - базе пространства L. Как известно [4], элементами Q являются все максимальные центрированные системы (или ультрафильтры), заданные на G. Отображение φ, определенное формулой (I), задано на множестве $\Omega \subset G$. Элементы Ω являются открыто-замкнутыми подмножествами компакта Q. Пусть $E = \bigcup_{e \in \Omega} e$. Ясно, что E - открытое множество (по определению топологии в Q).

ЛЕММА 2. З а м ы к а н и е E с о в п а д а е т с Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку компакт Q экстремальный, то $\bar{E}$ - замыкание множества E - открыто-замкнутое множество. Но для каждого открыто-замкнутого множества $K \subset Q$ существует

$e \in G$ такое, что $K = \{q : e \in q\}$. Предположим теперь, что $\bar{E}$ не совпадает с Q. Тогда $Q \setminus \bar{E}$ является открыто-замкнутым множеством, т.е. существует $v \in G$ такое, что $Q \setminus \bar{E} = \{q : v \in q\}$. По условию (✱), существует $w < v$, $w \in G$ $w \in E$, $w \neq 0$. Рассмотрим $K_w = \{q : w \in q\}$. Так как $K_w \subset E$ и $K_w \subset Q \setminus \bar{E}$, получаем противоречие. Следовательно, $\bar{E} = Q$, и лемма доказана.

Рассмотрим множество Ξ всех последовательностей $\{e_k\}$, $e_k \in \Omega$ таких, что $\{\varphi(e_k)\}$ сходится. В дальнейшем мы будем предполагать, что если $\{e_k\} \in \Xi$, то $(o)-\lim \varphi(e_k) \in L$.

ЛЕММА 3. Пусть последовательности $\{e_n\} \in \Xi$ и $\{v_n\} \in \Xi$ таковы, что $(o)-\lim \varphi(e_n) = (o)-\lim \varphi(v_n) = f$. Тогда $\bigcap_n \overline{\bigcup_{m \geq n} K_{e_m}} = \bigcap_n \overline{\bigcup_{m \geq n} K_{v_m}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $q \bar{\in} \bigcap_n \overline{\bigcup_{m \geq n} K_{e_m}}$. Тогда $\exists n_0$ такое, что $q \bar{\in} \overline{\bigcup_{m \geq n_0} K_{e_m}}$. Значит, найдется такое $e \in G$, что $K_e \cap \overline{\bigcup_{m \geq n_0} K_{e_m}} = \emptyset$, $q \in K_e$. Поскольку $(o)-\lim\limits_{t \to 0} \frac{T_t\varphi(e_n) - \varphi(e_n)}{t} = -e_n / \gamma(Re_n)$, то существует такое t_0, что $\forall t < t_0$ множество K_e имеет пустое пересечение с замыканием множества, являющегося объединением (по всем t, $0 < t < t_0$) компонент, порожденных элементами $T_t\varphi(e_m) - \varphi(e_m)$, т.е. K_e имеет пустое пересечение с компонентой, порожденной элементом $T_t f - f$.

С другой стороны, если $q \in \bigcap_n \overline{\bigcup_{m \geq n} K_{v_m}}$, то для любой окрестности K_e точки q найдутся сколь угодно большие номера n, что $K_e \cap K_{e_n} \neq \emptyset$. Поэтому K_e имеет непустое пересечение с компонентой, порожденной элементом $T_t f - f$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $\{e_k\} \in \Xi$ будем называть <u>максимальной</u>, если для любой последовательности $\{v_k\} \in \Xi$ такой, что $\sup\limits_{j \geq k} v_j \leq \sup\limits_{j \geq k} e_j$, справедливо равенство .

$$(o)-\lim (e_k) = (o)-\lim \varphi(v_k), k \to \infty.$$

ЛЕММА 4. Для того, чтобы последовательность $\{e_k\} \in \Xi$ была максимальной, необходимо и достаточно, чтобы $f = (o)-\lim \varphi(e_k)$ была крайней точкой множества $\overline{\varphi(\Omega)}$.

Необходимость. Пусть $\{e_n\}$ - максимальная последовательность. Рассмотрим сначала случай, когда $\sup\limits_k e_k \in \Omega$. Не ограничивая общности, можно считать, что $e_k > e_{k+1}$. Поскольку оператор A замкнутый, то $A\varphi(e_k) \to A_f$ (Af очевидно, существует, поскольку e_k монотонно убывают).

Пусть $f = \alpha f_1 + \beta f_2$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Так как, по лемме 3, существует взаимно-однозначное соответствие между $f \in \overline{\varphi(\Omega)}$ и $F_f \subset Q$ (F_f - замкнутое подмножество типа G_δ), то легко видеть, что $F_{f_1} \subset F$, $F_{f_2} \subset F$. Пусть $F_{f_1} = \bigcap K_{c_n}$. Тогда $\{e_n \wedge c_n\} \in \Xi$ и $\varphi(e_n \wedge c_n) \to f_1$, что противоречит максимальности последовательности $\{e_n\}$.

Если $\sup e_n \bar{\in} \Omega$, то можно считать, что все e_n попарно дизъюнктны. Учитывая, что в этом случае $(o)\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(\sum\limits_{m=n}^{n+k} e_m) = f$ для $v_n = \sup\limits_{m\geq n} e_n$, можно определить $\varphi(v_n) = (o)\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(\sum\limits_{m=n}^{n+k} e_m)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны.

Достаточность. Пусть последовательность $\{e_n\}$ не максимальная. Тогда можно выбрать $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$, $v_n\, d\, w_n$, $v_n + w_n = e_n$, такие, что $\varphi(v_n) \to f_1 \neq f$, $\varphi(w_n) \to f_2 \neq f$ ($f = (o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(e_n)$).

При этом

$$\varphi(e_n) = \frac{r(Rv_n)}{r(Re_n)}\varphi(v_n) + \frac{r(Rw_n)}{r(Rw_n)}\varphi(w_n).$$

Переходя к пределу (если нужно, по некоторой подпоследовательности), получим, что f не является крайней точкой множества $\overline{\varphi(\Omega)}$. Лемма доказана.

Пусть F - совокупность крайних точек множества $\overline{\varphi(\Omega)}$. Разобьем компакт Q на непересекающиеся классы, отнеся к одному классу те q, которые принадлежат множеству $\bigcap\limits_n \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} K_{e_m}}$, где $\varphi(e_m) \to f$, $f \in F$. Совокупность таких классов обозначим через B. Пусть τ - естественное отображение Q в B: $\tau(q) = b$, если $q \in b$, $b \in B$. Зададим в B топологию, индуцированную отображением τ^{-1}. Как показано в [4, стр. 202] B -компакт в этой топологии и отображение $\hat{\varphi}(b) = (o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(e_n)$, где $\{e_n\}$ - максимальная последовательность, $b = \{q : q \in \bigcap\limits_n \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} K_{e_m}}\}$, непрерывно. При этом

$\tau(E)$-открытое подмножество множества B, и, по лемме 2, $\tau(E)=B$.

Границей Мартина компакта B естественно назвать множество $B_M = B \setminus \tau(E)$.

Множество B позволяет описать все эксцессивные элементы f пространства L такие, что $\gamma(f)<\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $f \geq 0$ будем называть <u>потенциалом</u>, если $f=Rg$, $g \geq 0$, $g \in L$. Элемент $g \in L$ будем называть <u>конечным</u>, если проекция единицы на компоненту, порожденную g, принадлежит L.

ЛЕММА 5. I) Всякий потенциал есть эксцессивный элемент.

2) Всякий потенциал есть предел неубывающей последовательности потенциалов от конечных элементов.

3) Монотонно неубывающая последовательность потенциалов есть эксцессивный элемент.

4) Всякий эксцессивный элемент есть предел неубывающей последовательности потенциалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I) $T_t f = T_t Rg = T_t \int_0^\infty T_\tau g\, d\tau = \int_t^\infty T_\tau g\, d\tau \leq f$.

2) Пусть $f=Rg$, e - проекция 1 на компоненту, порожденную g. Если $e \bar{\in} \Omega$, то существуют $e_i \in \Omega$ (i=I,2,..) такие, что $e_i\, d e_j$ ($i \neq j$) и $e=\sum_{i=1}^\infty e_i$. Рассмотрим $g_n = \sum_{k=1}^n pr_{e_k} g$. Ясно, что $g_n \uparrow g$, $Rg_n \uparrow f$.

3) Пусть $f_n \uparrow f$. Поскольку T_t - (o)-линейный оператор, то $T_t f_n \uparrow T_t f$. Но $T_t f_n \leq f_n \leq f$. Отсюда $T_t f \leq f$.

4) Пусть сначала f - строго эксцессивный элемент. Покажем, что $R\frac{f-T_t f}{t} \uparrow f$ при $t \to +0$. Действительно,

$$\int_0^s T_\tau (f-T_t f)\, d\tau = \int_0^s T_\tau f\, d\tau - \int_0^s T_{t+\tau} f\, d\tau =$$
$$= \int_0^t T_\tau f\, d\tau - \int_0^{s+t} T_\tau f\, d\tau.$$

Поскольку $T_\tau f \downarrow 0$, то $\int_s^{s+t} T_\tau f\,d\tau \downarrow 0$ при $s \to \infty$. Поэтому $R[f - T_t f] = \int_0^t T_\tau f\,d\tau$. Отсюда $R\frac{f - T_t f}{t} \uparrow f$ при $t \to +0$. Следовательно, f представим как предел неубывающей последовательности потенциалов. Пусть теперь f – произвольный эксцессивный элемент. Рассмотрим разложение 1 на сумму попарно дизъюнктных элементов, принадлежащих Ω, т.е. $1 = \sum_{i=1}^{\infty} e_i$. Ясно, что элемент $f_n = f \wedge nR\sum_{i=1}^{n} e_i$ – строго эксцессивный для каждого n, и $f_n \uparrow f$. Пусть f_{nm} – последовательность потенциалов, монотонно сходящаяся к f_n. Тогда по теореме о диагональной последовательности [4, стр. 180] существует подпоследовательность f_{nm_n}, (o)-сходящаяся к f. Очевидно, что можно добиться и монотонной сходимости. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Любой эксцессивный элемент представим как предел неубывающей последовательности потенциалов от конечных элементов.

ТЕОРЕМА 2. Если f – эксцессивный элемент и $\gamma(f) < \infty$, то на B существует такая положительная мера Радона μ, что $f = \int_B \hat{\varphi}(x)\mu(dx)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что требуемая мера существует для потенциалов от конечных элементов.

Пусть $f = Rg$, g – конечный элемент. Тогда существует последовательность конечнозначных элементов $g_n = \sum_{i=1}^{K_n} \lambda_i^n e_i^n$, монотонно сходящаяся к g. Заметим, что $Rg_n = \sum_{i=1}^{K_n} \lambda_i^n \gamma(Re_i^n)\varphi(e_i^n)$.

Но по теореме об интегральном представлении через крайние точки (см. [7], стр. 979)

$$\varphi(e_i^n) = \int_{B_{e_i^n}} \hat{\varphi}(x)\,\mu_i^n(dx),$$

где $B_{e_i^n} = \{\tau(q) : q \in Ke_i^n\}$. Поэтому

$$Rg_n = \sum_{i=1}^{K_n} \int_{B_{e_i^n}} \hat{\varphi}(x)\lambda_i^n \gamma(Re_i^n)\mu_i^n(dx)$$

$$=\int_B \hat{\varphi}(x)\sum_{i=1}^{K_n}\lambda_i \gamma(Re_i^n)\mu_i^n(dx)=\int_B \hat{\varphi}(x)\mu_n(dx).$$

Поскольку $\gamma(\hat{\varphi}(x))=1$, то $\mu_n(B)=\gamma(Rg_n)\leq\gamma(f)$. Последовательность мер μ_n на компакте B ограничена. Выбирая подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой мере μ, получим $f=\int_B \hat{\varphi}(x)\mu(dx)$. Переход от потенциалов к произвольным эксцессивным элементам получается аналогично с помощью следствия из леммы 5. Теорема доказана.

В множестве B_M выделим подмножество $\tilde{B}=\{x:\forall t\, T_t\hat{\varphi}(x)=\hat{\varphi}(x)\}$. Множество $\tilde{B}$ позволяет описать максимальное нормальное подпространство пространства L, в котором имеет место эргодическая теорема.

Пусть $h\in \overline{co(\hat{\varphi}(\tilde{B}))}$. Через L_h обозначим совокупность $x\in L$, для которых $\exists\lambda>0: |x|\leq\lambda h$. Заметим, что если $h_1\in\hat{\varphi}(\tilde{B})$, $h_2\in\hat{\varphi}(\tilde{B})$, $h_1\neq h_2$, то $L_{h_1}\neq L_{h_2}$. Действительно, пусть $h_1<\mu h_2$ $(\mu>1)$. Тогда $h_2=\frac{1}{\mu}h_1+(h_2-\frac{1}{\mu}h_1)=$ $=\frac{1}{\mu}h_1+(1-\frac{1}{\mu})h_3$, где $h_3=\frac{\mu}{\mu-1}(h_2-\frac{1}{\mu}h)$, $\gamma(h_3)=1$.

Поскольку h_2 - крайняя точка множества $\overline{co\,\hat{\varphi}(\tilde{B})}$, то $h_2=\frac{1}{\mu}h_1$ и $\mu=1$. Пусть L_0 - совокупность $x\in L$ таких, что $|x|$ ограничим сверху строго эксцессивным элементом; $L_{\tilde{B}}$ - совокупность $x\in L$, для которых существует $h\in \overline{co\,\hat{\varphi}(\tilde{B})}$, такое, что $x\in L_h$; $\hat{L}=L_0\oplus L_{\tilde{B}}$; $\hat{\hat{L}}=$ $=\{x:\exists g\in L: -g\leq\{T_t x\}\leq g\quad \forall t\geq 0\}$.

ЛЕММА 6. $\hat{\hat{L}}=\hat{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\hat{L}\subset\hat{\hat{L}}$ очевидно. Покажем справедливость обратного включения. Пусть $x\in\hat{\hat{L}}$, $x\geq 0$. Множество $\{T_t x\}$ ограничено сверху. Тогда элемент $\tilde{x}=\sup\{T_t x\}$ является эксцессивной мажорантой элемента x, т.е. наименьшим эксцессивным элементом, мажорирующим x. Поскольку $T_t\tilde{x}$ монотонно убывает, то существует $(o)\text{-}\lim T_t\tilde{x}=h$, где h - гармонический элемент. Если $x\geq h$, то $T_t x\xrightarrow{(o)} h$, $x=h+(x-h)$, причем $x-h\leq\tilde{x}-h$. Следовательно, $x-h\in L_0$ и $x\in\hat{L}$. Пусть теперь неверно, что $x\geq h$. Положим $\bar{x}=x\wedge h$, $\bar{\bar{x}}=(x\vee h)-h$. Ясно, что $x=\bar{x}+\bar{\bar{x}}$, $\bar{x}\in L_h$ и

$$0\leq T_t\bar{\bar{x}}=T_t((x\vee h)-h)\leq T_t(\tilde{x}\vee h)-h=T_t\tilde{x}-h\xrightarrow{(o)}0.$$

Следовательно, $\bar{\bar{x}}$ мажорируется элементом $\tilde{x}-h\in L_0$. Для положительных x лемма доказана. Разлагая x на разность положительных элементов, легко получить справедливость утверждения и для всех x.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x \in \hat{\mathcal{L}}$. Тогда, для того чтобы существовал

$$(\tau)-\lim \frac{1}{t}\int_0^t T_\tau x\, d\tau = Px,$$

необходимо и достаточно, чтобы $x = x_1 + x_2$, где x_1 - гармонический элемент, а x_2 принадлежало (τ) - замыканию множества $S(A)$ - области значений инфинитезимального оператора A.

<u>Необходимость</u>. Пусть предел существует. Ясно, что Px - гармонический элемент. Воспользуемся формулой:

$$x - \frac{1}{t}\int_0^t T_\tau x\, d\tau = A\int_0^t \left(\frac{\tau}{t}-1\right) T_\tau x\, d\tau,$$

истинность которой проверяется простым вычислением. Поскольку $\frac{1}{t}\int_0^t T_t x\, d\tau \xrightarrow{(\tau)} Px$, то

$$x - Px = (\tau)-\lim\left(\frac{1}{t}\int_0^t T_\tau x\, d\tau - Px\right) + (\tau)-\lim A\int_0^t \left(\frac{\tau}{t}-1\right) T_\tau x\, d\tau,$$

и необходимость доказана.

<u>Достаточность</u>. Если $x \in S(A)$, то $x = Ay$. Но тогда $T_t y - y = \int_0^t T_t x\, d\tau$ и, поскольку $y \in \hat{\mathcal{L}}$, $\frac{1}{t}|T_t y - y| \xrightarrow{(\tau)} 0$.
Рассмотрим семейство операторов $Q_t : \hat{\mathcal{L}} \to \hat{\mathcal{L}}$

$$Q_t x = \frac{1}{t}\int_0^t T_\tau x\, d\tau.$$

Это семейство класса H_t^t, и множество $\{Q_t x\}$ ограничено. Воспользовавшись вариантом теоремы Банаха-Штейнгауза [5, стр. 393] получим, что если $x \in \overline{S(A)}$, то $Q_t x \xrightarrow{(\tau)} 0$.
Теорема доказана.

Литература

I. DOOB I.L. Discrete potential theory and boundaries, J.Math. and Mech., 1959, v.8, p.433-458.

2. HUNT G.A. Marcoff chains and Martin boundaries, Ill. J.Math., 1961, v.4, p.313-340 (Русский перевод. сб. Математика, 1961, 5 : 5, с. 121-149.)

3. ДЫНКИН Е.Б., ЮШКЕВИЧ А.А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М., "Наука", 1967.

4. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.

5. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат,1950.

6. ДЫНКИН Е.Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.

7. ЭДВАРДС Р. Функциональный анализ. М., "Мир", 1969.

Поступила в ред.-изд. отд.

5.У.1973 г.