1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск I4(3I)
Смежные математические вопросы

УДК 513.88

О ПРИНЦИПЕ АРХИМЕДА В УПОРЯДОЧЕННЫХ ФАКТОР-ЛИНЕАЛАХ

А.Г.Кусраев

Пусть X - K-линеал и X_0 - нормальное подпространство. Тогда фактор-пространство X/X_0 в каноническом упорядочении является K-линеалом. Какие условия надо наложить на X_0, чтобы в фактор-линеале X/X_0 выполнялся принцип Архимеда?

Этот вопрос исследовался в работах [I,2] А.И.Векслера, в которых были выведены необходимые и достаточные условия архимедовости фактор-линеала в терминах порядка. В этой заметке даются условия архимедовости в топологических терминах. Такой подход иногда оказывается более удобным.

ТЕОРЕМА. Пусть X - K-линеал, X_0 - его нормальное подпространство. Тогда, для того чтобы X/X_0 был архимедовым K-линеалом, необходимо и достаточно, чтобы X_0 было (r)-замкнутым (т.е. замкнутым относительно сходимости с регулятором).ж)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. <u>Необходимость.</u> Обозначим $\varphi: X \to X/X_0$ канонический гомоморфизм $x \to x + X_0$.

Пусть X/X_0 - архимедов K-линеал; x_k - последовательность элементов из X_0. Пусть, далее, существует последовательность натуральных чисел $n_k \to \infty$ и элемент $u \in X^+$,

ж) Определение см. в [3].

что имеет место: $n_k|x_k-x|\leq u$ $(k=1,2,\dots)$. Тогда $\varphi(n_k|x_k-x|)=n_k|\varphi(x)|\leq\varphi(u)(k=1,2,\dots)$ и в силу архимедовости X/X_0, $\varphi(x)=0$, т.е. $x\in X_0$.

<u>Достаточность.</u> Пусть X_0 (τ)- замкнуто и $\tilde{\theta}\leq n\tilde{x}\leq\tilde{y}$, где $\tilde{x},\tilde{y}\in[X/X_0]^+$. Выберем $y\in\tilde{y}$, $y\geq 0$. Далее, для n найдем $v_n\in X_0$, что выполняется $0\leq n(x+v_n)\leq y$ при некотором фиксированном $x\leq\tilde{x}$ и для любого n. Тогда это означает, что v_n (τ)-сходится к $-x$ и, в силу замкнутости X_0, $x\in X_0$. Итак, $\tilde{x}=\theta$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. I. Доказанная теорема верна, если X - K - группа и X_0 - её нормальная подгруппа.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказанной теоремы следует, что для всякого K-линеала X существует наименьшее нормальное подпространство X_0 такое, что X/X_0 архимедов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если обозначить через N множество всех неархимедовых элементов, т.е. $N=\{x\in X:\exists y\in X^+\ \forall n\ n|x|\leq y\}$, то доказанная теорема дает, в частности, условие, когда X/N - архимедов K-линеал.

В заключение приведем пример, когда X/N не архимедов. Возьмем R^2 с лексикографическим порядком и образуем $Y=\prod_{n=1}^{\infty}R^2$. Ясно, что Y - K -линеал в каноническом порядке произведения.

Выделим в Y нормальное подпространство:

$$X=\{x=(\{x_k^1\},\{x_k^2\})\in Y:\sup\{k:|x_k^1|\neq 0\}<\infty\}.$$

Пространство X - K -линеал в индуцированном порядке.

Обозначим через $e=(0,1)$ и рассмотрим элементы

$$u=(e,e,\dots),\quad x=(e,\tfrac{1}{2}e,\dots,\tfrac{1}{n}e,\dots),$$

$$x_n=(e,\tfrac{1}{2}e,\dots,\tfrac{1}{n}e,0,\dots)\quad(n=1,2,\dots).$$

Тогда $x_n\in N$ $(n=1,2,\dots)$, $x\overline{\in} N$ и $|x_n-x|\leq\frac{1}{n+1}u$, т.е. x_n (τ)-сходится к x. Итак, N не является (τ)-замкнутым, и поэтому X/N не является архимедовым.

Литература

I. ВЕКСЛЕР А.И. О принципе Архимеда в полуупорядоченных фактор-линеалах.-"Докл. АН СССР", 1968, т.121, № 5, с.775-777.

2. ВЕКСЛЕР А.И. Об условиях выполнимости принципа Архимеда в полуупорядоченных фактор-группах и фактор-линеалах. Матем. сборник, т. 57, вып. 4, 1962, с. 477-492.

3. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.

Поступила в ред.-изд. отд.
19. IX. 1974 г.