1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 14(31)
Смежные математические вопросы

УДК 519.4:517:513.88

n-РЕЗОЛЬВЕНТА И ЧЕЗАРОВСКИЕ КЛАССЫ ПОЛУГРУПП В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В.Иванов

В банаховом пространстве полугруппы операторов изучаются с помощью резольвенты производящего оператора; условия порождения замкнутым оператором A полугруппы данного класса (теоремы порождения) являются, посуществу, ограничениями роста степеней резольвенты A. Однако в случае локально выпуклого пространства производящий оператор, как правило, не имеет резольвенты, и, следовательно, на этот случай не переносятся теоремы порождения, известные для банахова случая.

В этой работе строится аппарат для исследования полугрупп в локально выпуклом пространстве (л.в.п.). В качестве характеристики оператора предлагается так называемая резольвентная последовательность. Основное определяющее соотношение для n-резольвенты:

$$(\lambda I - A) R_n(\lambda) = I + e^{-\lambda n} \nu(n,\lambda) \quad (Re\lambda > 0),$$

где $\{\nu(n,\lambda)\}$ ($Re\lambda > 0$) - эквинепрерывное семейство эндоморфизмов. Понятие n-резольвенты позволяет дать содержательные определения различных классов полугрупп в л.в.п., исследовать их свойства и решать для них вопросы порождения. Методом резольвентной последовательности в статье изучаются полугруппы со сходящимися к тождественному оператору чезаровскими средними k-го порядка ($k = 0, 1, \ldots$).

Часть результатов анонсирована в работе автора [3].

Везде X означает отделимое секвенциально полное бочечное л.в.п., $\mathcal{P}$ -мультинорма, задающая топологию в X, $L(X)$ -

пространство эндоморфизмов X . Обозначим для краткости

$$\Pi_\sigma=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}\lambda>\sigma\},\ R^+=(0,+\infty),\ \overline{R^+}=[0,+\infty),\ \overline{\mathcal{N}}=\mathcal{N}\cup\{0\},$$

где $\mathcal{N}$ - множество натуральных чисел.

I. Общие свойства n-резольвенты

Пусть A - замкнутый линейный оператор в X , $A_\lambda=\lambda I-A$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) и $n\in\mathcal{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Отображение $R_n:\Pi_0\to L(X)$ называется <u>n-резольвентой оператора A</u>, если

<u>I</u> R_n сильно аналитична в Π_0 ;

<u>2</u> $A R_n(\lambda)\supset R_n(\lambda)A\ (\lambda\in\Pi_0)$;

<u>3</u> $\{e^{\lambda n}(A_\lambda R_n(\lambda)-I)\}$ ($\lambda\in\Pi_0$) - эквинепрерывное семейство операторов из $L(X)$.

Последнее условие, очевидно, можно представить в виде

<u>3</u> $A_\lambda R_n(\lambda)=I+e^{-n\lambda}\nu(n,\lambda)$, где $\{\nu(n,\lambda)\}\ (\lambda\in\Pi_0)$ - эквинепрерывное семейство из $L(X)$.

В связи с этим R_n часто будем называть $\nu(n,\cdot)$ - резольвентой оператора A .

Нетрудно видеть, что для всех $\lambda\in\Pi_0$ операторы $R_n(\lambda)$, $\nu(n,\lambda)$ и A перестановочны между собой.

Из условия <u>3</u> получаем

$$R_n(\mu)=R_n(\mu)[A_\lambda R_n(\lambda)-e^{-\lambda n}\nu(n,\lambda)]=$$

$$=(\lambda-\mu)R_n(\mu)R_n(\lambda)+R_n(\mu)A_\mu R_n(\lambda)-R_n(\mu)e^{-\lambda n}\nu(n,\lambda),$$

откуда вытекает следующий аналог тождества Гильберта:

$$R_n(\mu)-R_n(\lambda)=(\lambda-\mu)R_n(\mu)R_n(\lambda)+e^{-n\mu}\nu(n,\lambda)R_n(\lambda)-e^{-n\lambda}R_n(\mu)\nu(n,\lambda).\qquad (\mathrm{I})$$

Если $\nu(n,\mu)$ и $R_n(\lambda)$ перестановочны, то из (I) следует

$$R_n(\mu)R_n(\lambda)=R_n(\lambda)R_n(\mu).\qquad (2)$$

С помощью индукции проверяется соотношение

$$R_n(\lambda)\supset P_k(\lambda,A)+\lambda^{-k-1}A^{k+1}R_n(\lambda)+e^{-n\lambda}\nu(n,\lambda)P_k(\lambda,A),\qquad (3)$$

где

$$P_k(\lambda, A) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^{-i-1} A^i \qquad (k \in \overline{\mathcal{N}}, \lambda \in \Pi_0). \tag{4}$$

Из (3) вытекает предельное соотношение

$$A_\lambda R_n(\lambda) x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \quad (x \in X). \tag{5}$$

Очевидно, если множество $\{R_n(\lambda) A^2 x \mid \lambda \in \Pi_0\}$ ограничено, то

$$\lambda R_n(\lambda) x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} x. \tag{6}$$

Если ограничено множество $\{R_n(\lambda) A x \mid \lambda \in \Pi_0\}$, то

$$R_n(\lambda) x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0. \tag{7}$$

Пусть $m \in \overline{\mathcal{N}}$ и $\mathcal{P}^m = \{p^m \mid p \in \mathcal{P}\}$, где

$$p^m x = \sum_{i=0}^{m} p A^i x \quad (x \in \mathcal{D}A^m).$$

Мультинорма $\mathcal{P}^m$ превращает $\mathcal{D}A^m$ в секвенциально полное л.в.п.. Из соотношения (3) и условия 3 следует

$$A^k R_n^m(\lambda) \in L(X) \qquad (\lambda \in \Pi_0, \ k \leq m), \tag{8}$$

что, очевидно, равносильно

$$R_n^m(\lambda) \in L(X, \mathcal{D}A^k) \qquad (k = 0, \ldots, m). \tag{9}$$

Далее, для всякого $m \in \overline{\mathcal{N}}$ справедливо включение

$$R_n^{(m)}(\lambda) \in L(X) \qquad (\lambda \in \Pi_0). \tag{IO}$$

Действительно, если $R_n^{(m-1)}(\lambda) \in L(X)$, то из аналитичности R_n и бочечности X следует эквинепрерывность семейства $\{U_\mu\}$ $(\mu \in S_\lambda)$, где S_λ – некоторый замкнутый шар с выколотым центром в точке λ , содержащийся в Π_0 , и

$$U_\mu = (\lambda - \mu)^{-1} [R_n^{(m-1)}(\lambda) - R_n^{(m-1)}(\mu)],$$

что вместе с $U_\mu x \xrightarrow[\mu \to \lambda]{} R_n^{(m)}(\lambda) x \quad (x \in X)$ влечёт (IO).

Пусть $\mathcal{D}A$ плотно в X ; из существования n-резольвенты следует

$$\overline{\mathcal{D}A^m} = X \quad (m \in \mathcal{N}). \tag{II}$$

В самом деле, положим

$$X_m = \bigcup_{\substack{\lambda_i>0\\ i=1,\dots,m}} R_n(\lambda_1)\cdot\ldots\cdot R_n(\lambda_m)X.$$

Из (8) следует $\overline{X}_m \subset \mathscr{D}A^m$, т.е. достаточно показать, что $\overline{X}_m = X$. В силу (5), очевидно, имеем $\overline{X}_1 \supset \mathscr{D}A$, т.е. $\overline{X}_1 = X$. Если $\overline{X}_{m-1} = X$, то

$$R_n(\lambda_m)X = R_n(\lambda_m)\overline{X}_{m-1} \subset \overline{R_n(\lambda_m)X_{m-1}},$$

откуда получаем $X_1 \subset \overline{\bigcup_{\lambda_m>0} R_n(\lambda_m)X_{m-1}} = \overline{X}_m$.

Из доказательства видно, что если $\mathscr{D}A$ секвенциально плотно в X, то, производя над $\mathscr{D}A^m$ операцию секвенциального замыкания $2m$ раз, получим X.

Если $\mathscr{D}A = X$ и семейство $\{\lambda R_n(\lambda)\}$ $(\lambda \in R^+)$ эквинепрерывно, то $\mathscr{D}A^m$ секвенциально плотно в X. Для доказательства достаточно заметить, что (6) выполнено на $\mathscr{D}A^2$, плотном в X, что вместе с эквинепрерывностью соответствующего семейства влечёт

$$\lambda^m R_n^m(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} x \ (x\in X). \qquad (12)$$

Оператор A полностью определяется своей $\nu(n,\cdot)$-резольвентой. Точнее говоря, если R_n является $\nu(n,\cdot)$-резольвентой некоторого замкнутого оператора B, то $A = B$. Действительно, из условия 3 получаем

$$A_\lambda R_n(\lambda) = I + e^{-n\lambda}\nu(n,\lambda) = B_\lambda R_n(\lambda),$$

откуда $AR_n(\lambda) = BR_n(\lambda)$. Пусть теперь $x \in \mathscr{D}B$; тогда

$$B_\lambda R_n(\lambda)Bx = A_\lambda R_n(\lambda)Bx = A_\lambda BR_n(\lambda)x = Ay_\lambda,$$

где $y_\lambda = A_\lambda R_n(\lambda)x \longrightarrow x$ при $\lambda\to+\infty$. Так как при этом

$$Ay_\lambda = B_\lambda R_n(\lambda)Bx \to Bx,$$

то в силу замкнутости оператора A имеем $x\in\mathscr{D}A$ и $Ax = Bx$.

Как правило, n-резольвента у оператора не единственна. Пусть R_n^1 есть $\nu_1(n,\cdot)$-резольвента A. Тогда

$$R_n^1(\lambda) - R_n(\lambda) = e^{-n\lambda}[R_n(\lambda)\nu_1(n,\lambda) - \nu(n,\lambda)R_n^1(\lambda)]. \qquad (13)$$

2. n-резольвента степени ℓ

Далее нам понадобятся следующие ограничения на n-резольвенту.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть R_n есть $\nu(n,\cdot)$-резольвента оператора A, причём $\nu(n,\lambda)=\nu(n)$ не зависит от $\lambda\in\Pi_0$. Если для каждого $x\in\mathcal{D}A^{\ell}$ множество $\{R_n(\lambda)x \mid \lambda\in\Pi_0\}$ ограничено, то R_n назовём <u>$\nu(n)$-резольвентой степени ℓ</u>. Если $\ell=0$, условие, очевидно, равносильно эквинепрерывности семейства $\{R_n(\lambda)\}(\lambda\in\Pi_0)$. В этом случае R_n называется <u>регулярной n-резольвентой</u>.

Везде в этом параграфе считаем заданной последовательность $\{R_n\}$ $(n\in\mathcal{N})$ n-резольвент степени ℓ оператора A.

Для $k\in\overline{\mathcal{N}}$ и $x\in\mathcal{D}A^{\ell+2}\cap\mathcal{D}A^{\ell+k}$ обозначим

$$I_k^n(t,x)=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}\frac{e^{\lambda t}R_n(\lambda)A^k x}{\lambda^k}\,d\lambda\ (a>0). \quad (14)$$

Из соотношения (3) следует, что интеграл сходится для всех t и, понятно, не зависит от a.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Пусть $x\in\mathcal{D}A^{\ell+2}$, $t\in R^+$; положим

$$y(t)x=\begin{cases} I_0^n(t,x), & \text{если } t\in(0,n)\\ x, & \text{если } t=0.\end{cases} \quad (15)$$

Тогда $y(\cdot)x$ - функция, непрерывная по $t\in R^+$ и определяемая лишь оператором A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x\in\mathcal{D}A^{\ell+2}$ из (3) получаем

$$R_n(\lambda)=\frac{1}{\lambda}x+\frac{1}{\lambda^2}Ax+\frac{1}{\lambda^2}R_n(\lambda)A^2x+e^{-n\lambda}\nu(n)\left(\frac{1}{\lambda}x+\frac{1}{\lambda^2}Ax\right),$$

где множество $\{R_n(\lambda)A^2x \mid \lambda\in\Pi_0\}$ ограничено. Отсюда, с учётом очевидных соотношений,

$$(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}\frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda^{i+1}}\,d\lambda=\begin{cases}\frac{\tau^i}{i!}, & \tau>0\\ 0, & \tau<0\end{cases}, \quad (16)$$

для $t \in (0,n)$ имеем:

$$I_0^n(t,x) = x + tAx + I_2^n(t,x). \qquad (17)$$

Из (13) следует соотношение

$$R_{n+1}(\lambda) - R_n(\lambda) = e^{-n\lambda}[R_n(\lambda)e^{-\lambda}\nu(n+1) - \nu(n)R_{n+1}(\lambda)];$$

учитывая $\nu(n+1)A^2x \in \mathcal{D}A^\ell$ и $\nu(n) \in L(X)$, получим

$$I_0^{n+1}(t,x) - I_0^n(t,x) = (2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a} \frac{e^{\lambda(t-n)}}{\lambda^2}[R_n(\lambda)e^{-\lambda}\nu(n+1) - \nu(n)R_{n+1}(\lambda)]A^2x\,d\lambda = 0.$$

Итак, $y(\cdot)x$ – функция, причем для $t \in (0,n)$

$$y(t)x = x + tAx + I_2^n(t,x). \qquad (18)$$

Аналогичным образом с помощью соотношения (13) получим, что $y(t)x$ не зависит от выбора n-резольвенты (конечной степени) оператора A, т.е. определяется лишь самим A. Нетрудно видеть, что функция $I_2^n(\cdot, x)$ непрерывна по $t \in \overline{R^+}$ и $I_2^n(0,x) = 0$, т.е. (18) справедливо для всех $t \in [0,n]$, что означает непрерывность $y(\cdot)x$ на $\overline{R^+}$. Утверждение доказано.

Соотношение (15) будет служить основным процессом порождения полугрупп. Изучим подробнее операторы $y(t)(t \in R^+)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $m \in \overline{N}$, $x \in \mathcal{D}A^{\ell+2+m}$ и $t \in \overline{R^+}$; имеют место свойства:

а) $y(t)x \in \mathcal{D}A^m$;

б) $y(t)x = \sum_{i=0}^{m}(i!)^{-1}t^iA^ix + I_{m+1}^n(t,x) \quad (t \in [0,n])$;

в) существуют производные

$$y^{(m)}(t)x = A^m y(t)x = y(t)A^m x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A^m x \in \mathcal{D}A^{\ell+2}$, то интеграл $I_2^n(t, A^m x)$ определён и, в силу замкнутости A, равен $A^m I_2^n(t,x)$. Отсюда, с учётом (17), получаем а) и равенство $A^m y(t)x = y(t)A^m x$. Соотношение б) следует из (3) и (16). Наконец, в) получается из б) с помощью очевидного соотношения $(I_{m+1}^n)^{(m)}(t,x) = I_1^n(t, A^m x)$. Утверждение доказано.

Семейство операторов $\{y(t)\}$ $(t\in\overline{R^+})$ обладает полугрупповым свойством.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для $x\in\mathcal{D}A^{2l+4}$ имеет место соотношение

$$y(s)y(t)x=y(s+t)x \quad (s,t\in\overline{R^+}). \tag{19}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что $y(t)x\in\mathcal{D}A^{l+2}$, т.е. $y(s)y(t)x$ определено. С помощью утверждения 2(б) получим

$$y(s)y(t)x=y(t)x+sAy(t)x+$$
$$+(y(s)x-x-sAx)+t(y(s)Ax-Ax-sA^2x)+B(s,t,x), \tag{20}$$

где

$$B(s,t,x)=(2\pi i)^{-2}\int_{\partial\Pi_{a_1}}\int_{\partial\Pi_{a_2}}\frac{e^{\mu s}e^{\lambda t}}{\mu^2\lambda^2}R_n(\mu)R_n(\lambda)A^4x\,d\lambda\,d\mu.$$

В силу тождества

$$R_n(\mu)R_n(\lambda)=(\lambda-\mu)^{-1}[R_n(\mu)-R_n(\lambda)-e^{-n\mu}R_n(\lambda)y(n)+e^{-n\lambda}R_n(\mu)y(n)]$$

$B(s,t,x)$ распадается на четыре интеграла. Так как каждый из них, очевидно, сходится абсолютно, то можно менять порядок интегрирования. Полагая $a_1<a_2$ и $n>t+s$, имеем:

$$\mathcal{J}_1=(2\pi i)^{-2}\int_\mu\int_\lambda e^{\mu s}e^{\lambda t}\mu^{-2}\lambda^{-2}(\lambda-\mu)^{-1}R_n(\mu)A^4x\,d\lambda\,d\mu=$$
$$=(2\pi i)^{-1}\int_\mu e^{\mu s}\mu^{-2}R_n(\mu)A^4x(e^{\mu t}\mu^{-2}-\mu^{-2}-t\mu^{-1})\,d\mu=$$
$$=[y(s+t)x-x-(s+t)Ax-\frac{(s+t)^2}{2}A^2x-\frac{(s+t)^3}{2\cdot 3}A^3x]-$$
$$-[y(s)x-x-sAx-\frac{s^2}{2}A^2x-\frac{s^3}{2\cdot 3}A^3x]-t[y(s)Ax-Ax-sA^2x-\frac{s^2}{2}A^3x].$$

Аналогично

$$\mathcal{J}_2=(2\pi i)^{-2}\int_\mu\int_\lambda e^{\mu s}e^{\lambda t}\mu^{-2}\lambda^{-2}(\lambda-\mu)^{-1}R_n(\lambda)A^4x\,d\lambda\,d\mu=$$
$$=(2\pi i)^{-1}\int_\lambda e^{\lambda t}\lambda^{-2}R_n(\lambda)A^4x(s\lambda^{-1}+\lambda^{-2})\,d\lambda=$$
$$=s[y(t)Ax-Ax-tA^2x-\frac{t^2}{2}A^3x]+[y(t)x-x-tAx-\frac{t^2}{2}A^2x-\frac{t^3}{2\cdot 3}A^3x];$$

Наконец, последние два интеграла, в силу условия $t+s\in(0,n)$, равны нулю. Нужное соотношение теперь следует из (20), если вместо $B(s,t,x)$ подставить $\mathcal{J}_1-\mathcal{J}_2$. Утверждение доказано.

В случае, когда R_n - резольвента A (т.е. $\nu(n)=0$), она полностью восстанавливается по $y(t)$ $(t\in R^+)$. Если же R_n - только n-резольвента, то о буквальном её восстановлении говорить не приходится. Однако при некоторых предположениях удаётся построить новую резольвентную последовательность A.

Для $x\in\mathcal{D}A^{\ell+2}$ и $\lambda\in\Pi_0$ положим

$$U_n(\lambda)x=\int_0^n e^{-\lambda t}y(t)x\,dt. \qquad (21)$$

Так как $y(\cdot)x$ непрерывно по $t\geq 0$, то интеграл сходится; при этом $U_n(\lambda)$ линейно по $x\in\mathcal{D}A^{\ell+2}$ и множество $\{U_n(\lambda)x\,|\,\lambda\in\Pi_0\}$ ограничено. Понятно, что $U_n(\cdot)x$ - аналитическая функция и

$$U_n^{(k)}(\lambda)x=(-1)^k\int_0^n e^{-\lambda t}t^k y(t)x\,dt \quad (k\in\mathcal{N}). \qquad (22)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Пусть $\mathcal{D}A$ секвенциально плотно в X и для некоторого $d\in\mathcal{N}$ операторы $y(n)$ и $U_n(\lambda)$ $(\lambda\in\Pi_0)$ непрерывны на $\mathcal{D}A^{d+\ell+2}$. Тогда эти операторы непрерывно продолжаются на X и для них справедливы соотношения:*

$$A_\lambda U_n(\lambda)x=x-e^{-n\lambda}y(n)x \quad (x\in X), \qquad (23)$$

$$U_n(\lambda)A_\lambda x=x-e^{-n\lambda}y(n)x \quad (x\in\mathcal{D}A), \qquad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что $\overline{\mathcal{D}A^{d+\ell+2}}=X$, т.е. можно считать $y(n)\in L(X)$ и $U_n(\lambda)\in L(X)(\lambda\in\Pi_0)$. Пусть $x\in\mathcal{D}A^{d+\ell+3}$; тогда $U_n(\lambda)x$ и $U_n(\lambda)Ax$ вычисляются по формуле (21). В силу утверждения 2 имеем:

$$A\,U_n(\lambda)x = U_n(\lambda)Ax = \int_0^n e^{-\lambda t} y(t)Ax\,dt =$$
$$= \int_0^n e^{-\lambda t} dy(t)x = e^{-\lambda n} y(n)x - x + \lambda U_n(\lambda)x.$$

Пусть теперь $x \in X$ и $x_\xi \to x$, где $x_\xi \in \mathcal{D}A^{d+\ell+3}$.
Тогда $U_n(\lambda)x_\xi \to U_n(\lambda)x$ и

$$AU_n(\lambda)x_\xi = \lambda U_n(\lambda)x_\xi - x_\xi + e^{-n\lambda} y(n)x_\xi \to \lambda U_n(\lambda)x - x + e^{-n\lambda} y(n)x,$$

что ввиду замкнутости A означает (23). Докажем (24). Возьмём $x \in \mathcal{D}A$ и рассмотрим $y = A\mu x$; пусть $y_\xi \to y$, где $y_\xi \in \mathcal{D}A^{d+\ell+2}$. При этом, понятно, $R_n(\mu)y_\xi \to R_n(\mu)y$ и $AR_n(\mu)y_\xi \to AR_n(\mu)y$. Обозначим $x_\xi = R_n(\mu)y_\xi$; с учётом соотношения $x = R_n(\mu)y - e^{-n\mu}\nu(n)x$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} & x_\xi \in \mathcal{D}A^{d+\ell+3}, \\ & x_\xi \to x + e^{-n\mu}\nu(n)x, \\ & Ax_\xi \to Ax + e^{-n\mu}\nu(n)Ax. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Из (25) и соотношений (23), (24), выполненых для x_ξ, получаем

$$U_n(\lambda)Ax + e^{-n\mu}U_n(\lambda)\nu(n)Ax = \lim_\xi U_n(\lambda)Ax_\xi =$$
$$= \lim_\xi A\,U_n(\lambda)x_\xi = A\,U_n(\lambda)x + e^{-n\mu}AU_n(\lambda)\nu(n)x,$$

что в силу произвольности выбора $\mu \in \Pi_0$ означает $U_n(\lambda)Ax = A\,U_n(\lambda)x$, т.е. (24) и тем самым утверждение доказано.

В качестве следствия получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{D}A$ секвенциально плотно в X и для некоторого $d \in \overline{\mathbb{N}}$ операторы $y(t)$ $(t \in R^+)$ непрерывны на $\mathcal{D}A^{d+\ell+2}$, т. е. можно считать $y(t) \in L(X)$. Если для каждого $x \in X$ функция $y(\cdot)x$ непрерывна по $t > 0$ и суммируема в нуле, то $U_n(\lambda)$ распространяется по непрерывности с $\mathcal{D}A^{d+\ell+2}$ на X и $U_n(\cdot)$ - регулярная $[-y(n)]$ - резольвента оператора A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём $x \in X$, $\lambda \in \Pi_0$ и рассмотрим

$$R_{n,\varepsilon}(\lambda)x = \int_\varepsilon^n e^{-\lambda t} y(t)x\,dt \quad (\varepsilon \geq 0).$$

Из непрерывности $y(\cdot)x$ и бочечности X следует эквинепрерывность семейства $\{y(t)\}$ $(t \in [\varepsilon, n]$ для произвольного $\varepsilon \in (0,n)$; поэтому $R_{n,\varepsilon}(\lambda) \in L(X)$. Так как $y(\cdot)x$ - суммируема в нуле, то семейство $\{R_{n,\varepsilon}(\lambda)\}$ $(\varepsilon \in (0,n))$ эквинепрерывно и $R_{n,\varepsilon}(\lambda)x \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{} R_{n,0}(\lambda)x (x \in X)$, откуда $R_{n,0}(\lambda) \in L(X)$. Так как на $\mathcal{D}A^{d+l+2}$ $R_{n,0}(\lambda)$ совпадает с $U_n(\lambda)$, то выполнены условия утверждения 4, т.е. справедливы соотношения (23) и (24). Осталось заметить, что функция $R_{n,0}(\cdot)x$ аналитична и, очевидно, ограничена в Π_0, что в силу бочечности X означает регулярность $[-y(n)]$-резольвенты $R_{n,0}$. Утверждение доказано.

Заметим, что утверждения 4 и 5 справедливы для плотного $\mathcal{D}A$, если пространство X полно.

Установим теперь формулу обращения, с помощью которой будем получать оценки для полугрупп в теоремах порождения. Пусть $g: \Pi_0 \to X$ - аналитическая функция; обозначим

$$S(\lambda,t,g) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda^2 t)^{k+1}}{k!\,(k+1)!} g^{(k)}(\lambda). \tag{26}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для всех $x \in \mathcal{D}A^{l+2}$ и $t \in (0,n)$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda \to \infty} S(\lambda,t,R_n(\cdot)x) = \lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda,t,U_n(\cdot)x) = y(t)x. \tag{27}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём $a \in (0, \operatorname{Re}\lambda)$ и рассмотрим

$$I(\lambda)x = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial \Pi_a} e^{\mu n} \mu^{-1} R_n(\mu) Ax \frac{d\mu}{\mu - \lambda}.$$

Нетрудно проверить, что

$$U_n(\lambda)x = x\int_0^n e^{-nt}dt + \frac{R_n(\lambda)Ax}{\lambda} + e^{-n\lambda} I(\lambda)x =$$

$$= R_n(\lambda) - e^{-n\lambda}\frac{y(n)x + x}{\lambda} + e^{-n\lambda} I(\lambda)x.$$

Из ([I], теорема 6.3.3.) следует, что существует предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda,t,U_n(\cdot)x)=y(t)x;$$

поэтому для доказательства (27) достаточно показать

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda,t,g_1)=0,$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda,t,g_2)=0, \tag{28}$$

где $g_1(\lambda)=\lambda^{-1}e^{-\lambda n}$, $g_2(\lambda)=e^{-\lambda n}I(\lambda)x$.

Заметим, что для произвольного $k\in\overline{N}$

$$g_1^{(k)}(\lambda)=-\Big[\int_0^n e^{-\lambda t}dt\Big]^{(k)}+\frac{(-1)^k k!}{\lambda^{k+1}};$$

согласно упомянутой теореме из [I],

$$S\Big(\lambda,t,\int_0^n e^{-(\cdot)s}ds\Big)\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}1$$

равномерно на всяком замкнутом промежутке $\Delta\subset(0,n)$. Так как

$$e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda^2 t)^{k+1}}{k!\,(k+1)!}\cdot\frac{(-1)^k k!}{\lambda^{k+1}}=1-e^{-\lambda t},$$

то $S(\lambda,t,g_1)\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}0$ равномерно по $t\in\Delta$. Докажем теперь второе из соотношений (28). Ясно, что $I(\cdot)x$ - аналитическая функция по $\lambda\in\Pi_a$; при этом

$$I^{(k)}(\lambda)x=k!\,(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}e^{\mu n}\mu^{-1}R_n(\mu)Ax\,\frac{d\mu}{(\mu-\lambda)^{k+1}}.$$

Так как $|\mu-\lambda|>\lambda-a$ для $\mu\in\partial\Pi_a$ и $\lambda-a$, то

$$p(I^{(k)}(\lambda)x)\le\frac{k!\,M_p(x)}{(\lambda-a)^{k+1}}, \tag{29}$$

где $M_p(x)=e^{an}(2\pi)^{-1}\int_{\partial\Pi_a}|\mu|^{-1}p(R_n(\mu)Ax)|d\mu|$ $(p\in\mathcal{P})$.

Далее, имеем:

$$[e^{-\lambda n}I(\lambda)x]^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j(-n)^{k-j}e^{-n\lambda}I^{(j)}(\lambda)x;$$

с другой стороны,

$$[e^{-2n}\lambda^{-1}]^{(k)}=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}C_k^j n^{k-j}e^{-n\lambda}j!\lambda^{j-1}.$$

Из этих соотношений, учитывая равенство

$$(\lambda^{-1}e^{-n\lambda})^{(k)}=(-1)^k|(\lambda^{-1}e^{-n\lambda})^{(k)}|,$$

с помощью (29) получаем оценку

$$p(g_2^{(k)}(\lambda))\le e^{-na}M_p(x)[(-1)^k g_1^{(k)}(\lambda-a)].$$

Пусть теперь $t_\lambda=\lambda^2(\lambda-a)^{-2}t$; имеем:

$$p(S(\lambda,t,g_2))=p[e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda^2t)^{k+1}}{k!(k+1)!}g_2^{(k)}(\lambda)]\le$$

$$\le e^{-na}M_p(x)e^{-at_\lambda-\lambda(t-t_\lambda)}\cdot S(\lambda-a,t_\lambda,g_1),$$

где $t_\lambda\to t$ и $\lambda(t-t_\lambda)\to -2at$ при $\lambda\to+\infty$. Так как первое из соотношений (28) выполняется равномерно на каждом Δ , то

$$S(\lambda-a,t_\lambda,g_1)\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}0,$$

что вместе с последним неравенством доказывает (28).

3. Некоторые общие свойства полугрупп

Напомним, что <u>полугруппой</u> называется отображение $T:\overline{R^+}\to L(X)$, сильно непрерывное по $t>0$ и удовлетворяющее условиям

$$T(t+s)=T(t)T(s)\quad(t,s\in\overline{R^+}),\ T(0)=I.$$

<u>Инфинитезимальный оператор</u> A_0 полугруппы - это сильный предел при $h\to+0$ операторов $A_h=h^{-1}(T(h)-I)$; замыкание $\overline{A_0}=A$, когда оно существует, называется <u>производящим оператором T .</u>

Будем обозначать

$$X_0=\bigcup_{t>0}T(t)X,\quad N_0=\bigcap_{t>0}[T(t)]^{-1}[0],$$

$$\Sigma=\{x\in X \mid \exists \lim_{t\to+0} T(t)x=x\},\ \mathcal{J}=\{x\in X \mid \exists \int_0^1 T(s)x\,ds\}.$$

Для $x\in\mathcal{J}$, $k\in\mathbb{N}$ и $t\in R^+$ положим

$$C(k,t)x=t^{-k}k\int_0^1 (t-s)^{k-1}T(s)x\,ds. \qquad (30)$$

Оператор $C(k,t)$ называется <u>чезаровским средним k-го порядка полугруппы T</u>. Введём множества

$$H_k=\{x\in\mathcal{J} \mid \exists \lim_{t\to+0} C(k,t)x=x\}.$$

Наконец, обозначим

$$H=\{x\in\mathcal{J} \mid \exists \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R_n^\circ(\lambda)x=x\},$$

где

$$R_n^\circ(\lambda)x=\int_0^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \quad (x\in\mathcal{J}). \qquad (31)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Все введённые множества являются инвариантными подпространствами X относительно $T(t)$ $(t\in R^+)$ и связаны включениями

$$X_0\subset\Sigma\subset H_k\subset H_{k+1}\subset H\subset\mathcal{J}. \qquad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инвариантность относительно $T(t)$ следует из (32). Для установления полезных в дальнейшем соотношений докажем третье и четвёртое из включений (32). Остальные тривиальны. Для $x\in\mathcal{J}$ и $s\in R^+$ из (30) имеем:

$$\int_0^s t^k C(k,t)x\,dt=\int_0^s k\Big[\int_0^t (t-u)^{k-1}T(u)x\,du\Big]dt=$$
$$=\int_0^s d\int_0^t (t-u)^k T(u)x\,du=\int_0^s (s-u)^k T(u)x\,du,$$

т.е. получаем соотношение

$$C(k+1,s)=s^{-k-1}(k+1)\int_0^s t^k C(k,t)x\,dt. \qquad (33)$$

Отсюда ясно, что $C(k+1,s)x\xrightarrow[s\to+0]{}x$, если $x\in H_k$. Пусть теперь

$$I_n(j)x=\int_0^n (n-t)^j T(t)x\,dt \quad (x\in\mathcal{J}). \qquad (34)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^n e^{-\lambda t} t^k C(k,t) x\,dt = \frac{k!\,R_n^\circ(\lambda)x}{\lambda^k} - e^{-n\lambda} k! \sum_{j=1}^{k} \frac{I_n(k-j)x}{\lambda^j (k-j)!}. \quad (35)$$

С другой стороны,

$$\int_0^n e^{-\lambda t} t^k dt = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} - e^{-n\lambda} k! \sum_{j=0}^{k} \frac{n^{k-j}}{\lambda^{j+1}(k-j)!}. \quad (36)$$

Отсюда получаем

$$\lim_{\lambda\to+\infty} (\lambda R_n^\circ(\lambda)x - x) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_0^n e^{-\lambda t} t^k [C(k,t)x - x]\,dt.$$

Очевидно, если $C(k,t)x \to x$ при $t \to +0$, то правая часть равенства обращается в нуль. Утверждение доказано.

Как и в банаховом пространстве, проверяется, что A_0 - линейный оператор, $\mathcal{D}A_0$ инвариантно относительно $T(t)$ $(t \in R^+)$ и содержится в Σ; подпространство $\mathcal{D}A_0^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}A_0^k$ секвенциально плотно в X_0. Если $x \in \mathcal{D}A_0$, то

$$\left.\frac{dT(s)x}{ds}\right|_{s=t} = T(t)A_0 x = A_0 T(t)x$$

для всякого $t \geq 0$ и, следовательно,

$$\tau\text{-}\int_0^t T(s)A_0 x\,ds = T(t)x - x \quad (37)$$

(индекс τ означает несобственный интеграл). Нам понадобятся также следующие свойства инфинитезимального оператора.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. I) Если $x \in \mathcal{D}A_0$, то $A_0 x \in H_1^\tau$
2) Пусть $f: \overline{R^+} \to R$ - дифференцируемая в нуле функция; тогда для $x \in H_1$

$$t^{-1} \int_0^t f(s)T(s)x\,ds \xrightarrow[t\to+0]{} f(0)x. \quad (38)$$

3) Для всякого $x \in H_1$ справедливо

$$R_n^\circ(\lambda)x \in \mathcal{D}A_0;\ A_0 R_n^\circ(\lambda)x = \lambda R_n^\circ(\lambda)x - x + e^{-n\lambda}T(n)x \quad (39)$$

4) Если существует $A=\overline{A}_o$, то для всех $t\in R^+$

$$T(t)[\mathcal{D}A^n]\subset\mathcal{D}A_o^n\subset\mathcal{D}A^n\quad(n\in N). \tag{40}$$

Интересно выяснить, когда оператор A_o замкнут.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть существует производящий оператор A и у него есть $\nu(n)$-резольвента R_n, причём $\nu(n)X\subset H_1^z$. Тогда $A_o=A$ в том и только том случае, когда $H_1^z=X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{J}^z=X$, то, понятно, для всякого $x\in X$ и $h\in R^+$ $A\int_0^h T(s)x\,ds=T(h)x-x$; отсюда если $x\in\mathcal{D}A$ и $H_1^z=X$, то $A_h x=h^{-1}\int_0^h T(s)Ax\,ds\xrightarrow[h\to+0]{}Ax$, т.е. $\mathcal{D}A\subset\mathcal{D}A_o$. Обратно, если $A=A_o$, то для $x\in X$

$$x=\lambda R_n(\lambda)x-AR_n(\lambda)x+e^{-n\lambda}\nu(n)x,$$

где $R_n(\lambda)x\in\mathcal{D}A=\mathcal{D}A_o\subset H_1^z$, $AR_n(\lambda)x=A_oR_n(\lambda)x\in H_1^z$ и $\nu(n)x\in H_1^z$, т.е. $x\in H_1^z$. Утверждение доказано.

Выясним теперь, когда у производящего оператора есть n-резольвента.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Пусть $\overline{X}_o=X$ и существует $\overline{A}_o=A$. Если для каждого $\lambda\in\Pi_o$ оператор $R_n^o(\lambda)$ допускает непрерывное расширение $R_n(\lambda)$ с X_o на X, то $R_n(\cdot)$ есть $[-T(n)]$-резольвента A; при этом

$$T(t)R_n(\lambda)=R_n(\lambda)T(t)\quad(t\in R^+,\ \lambda\in\Pi_o). \tag{41}$$

Условия выполняются, в частности, если $\mathcal{J}=X$; при этом $R_n^o(\lambda)\in L(X)$ и R_n^o - регулярная n-резольвента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (41) следует из перестановочности $R_n^o(\lambda)$ и $T(t)$ на X_o. Далее, согласно (39), для $x\in X$

$$(A_o)_\lambda R_n(\lambda)x=x-e^{-n\lambda}T(n)x. \tag{42}$$

Если $x\in\mathcal{D}A_o$, то из (41) получаем $A_hR_n(\lambda)x=R_n(\lambda)A_hx\xrightarrow[h\to+0]{}R_n(\lambda)A_ox$, т.е.

$$A_0 R_n(\lambda)x = R_n(\lambda)A_0 x. \qquad (43)$$

Пусть теперь $x \in X$ и $x_\xi \to x$, где $x_\xi \in X_0$. Из (42) имеем:

$$A_0 R_n(\lambda)x_\xi \to \lambda R_n(\lambda)x - x + e^{-n\lambda}T(n)x,$$

что влечёт $R_n(\lambda) \in \mathcal{D}A$ и $A_\lambda R_n(\lambda)x = x - e^{-n\lambda}T(n)x$. Если $x \in \mathcal{D}A$, то для некоторых $x_\xi \in \mathcal{D}A_0$ $x_\xi \to x$ и $A_0 x_\xi \to Ax$, т.е.

$$AR_n(\lambda)x = \lim_\xi A_0 R_n(\lambda)x_\xi = \lim_\xi R_n(\lambda)A_0 x_\xi = R_n(\lambda)Ax.$$

Осталось доказать аналитичность отображения $R_n(\cdot)x$. Учитывая аналитичность $R_n^0(\cdot)T(n)x$, из (I) получаем

$$(\mu-\lambda)^{-1}[R_n(\mu)x - R_n(\lambda)x] = -R_n(\mu)R_n(\lambda)x +$$

$$+(\mu-\lambda)^{-1}(e^{-n\mu} - e^{-n\lambda})R_n(\lambda)T(n)x - e^{-n\lambda}(\mu-\lambda)^{-1}(R_n^0(\mu) - R_n^0(\lambda))T(n)x$$

$$\to -R_n^2(\lambda)x - ne^{-n\lambda}R_n(\lambda)T(n)x - e^{-n\lambda}(R_n^0)^{(1)}(\lambda)T(n)x.$$

Наконец, если $\mathcal{J} = X$, то $R_n^0(\lambda) \in L(X)$ (см., например, доказательство утверждения 5); при этом, очевидно, семейство $\{R_n^0(\lambda)\}$ $(\lambda \in \Pi_0)$ эквинепрерывно. Утверждение доказано.

4. Теоремы порождения для классов C_k

Основной вопрос теории полугрупп операторов – когда замкнутый оператор порождает (т.е. является производящим оператором) полугруппу данного класса? В статье автора [3] доказаны теоремы порождения для классов L и A_0. Исследуем вопрос порождения для непрерывных по Чезаро в нуле полугрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полугруппу T отнесём к классу C_k $(k \in \mathbb{N})$, если $H_k = X$; будем называть T <u>чезаровской полугруппой порядка k</u>.

Естественно класс C_0 полугрупп, непрерывных в нуле (т.е. у которых $\Sigma = X$), считать чезаровским классом порядка 0.

ТЕОРЕМА I. Линейный замкнутый оператор A с плотной в X областью определения порождает полугруппу T класса C_0 тогда и только тогда, когда у него существует

регулярная резольвентная последовательность $\{R_n\}$, **такая, что семейства операторов**

$$\left\{\frac{\lambda^{k+1}}{k!}R_n^{(k)}(\lambda)\right\} \quad (\lambda\in R^+,\ k\in\overline{N})$$

- эквинепрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. <u>Необходимость.</u> В качестве R_n возьмем $\overset{\circ}{R}_n(\cdot)$. Согласно утверждению 10, R_n - регулярная n-резольвента A ; при этом, очевидно,

$$\rho(R_n^{(k)}(\lambda)x)=\rho\left(\int_0^n e^{-\lambda t}(-t)^k T(t)x\,dt\right)\le M_{n,\rho}(x)\frac{k!}{\lambda^{k+1}},$$

где $\lambda\in R^+$ и $M_{n,\rho}(x)=\max\limits_{t\in[0,n]}\rho(T(t)x) \quad (\rho\in\mathcal{P})$.

В силу бочечности X условие доказано.

<u>Достаточность.</u> Если выполнены условия теоремы, то

$$Q_{n,\rho}(x)=\sup\left\{\frac{\lambda^{k+1}}{k!}\rho(R_n^{(k)}(\lambda)x)\,|\,\lambda\in R^+,\ k\in\overline{N}\right\}<+\infty.$$

Ясно, что $Q_{n,\rho}$ - непрерывная полунорма в X. Полагая

$$T(t)x=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial\Pi_a} e^{\lambda t}R_n(\lambda)x\,d\lambda$$

для $x\in\mathcal{D}A^2$ и $t\in(0,n)$, в силу утверждения 6 получим оценку

$$\rho(T(t)x)=\rho\left(\lim_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda^2t)^{k+1}}{k!\,(k+1)!}R_n^{(k)}(\lambda)x\right)\le$$

$$\le\lim_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t)^{k+1}}{k!(k+1)!}\ \frac{Q_{n,\rho}(x)\,k!}{\lambda^{k+1}}=$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}(1-e^{-\lambda t})\,Q_{n,\rho}(x)=Q_{n,\rho}(x).$$

Отсюда следует непрерывность $T(t)$ по $x\in\mathcal{D}A^2$, что в силу $\overline{\mathcal{D}A^2}=X$ позволяет считать $T(t)\in L(X)$. При этом, очевидно,

$$\rho(T(t)x)\le Q_{n,\rho}(x) \quad (x\in X,\ t\in(0,n)).$$

Из этой оценки следует эквинепрерывность семейства $\{T(t)\}$ $(t\in(0,n))$, что вместе с непрерывностью $T(\cdot)x$ по $t\ge 0$ для $x\in\mathcal{D}A^2$ (см. утверждение I) влечёт сильную непрерывность T. Из утверждения 3, наконец, следует, что T – полугруппа и, тем самым, $T\in C_0$. Согласно утверждению 5 отображение $\mathcal{U}_n : \lambda \to R_n^\circ(\lambda)$ есть $[-T(n)]$ – резольвента A. Однако, в силу утверждения 10, $\mathcal{U}_n$ есть $[-T(n)]$-резольвента B -производящего оператора T, что означает $B=A$. Теорема доказана.

Теперь исследуем случай $k\geq 1$. Напомним, что T принадлежит классу A_0, если $H=X$. Из утверждения 7 вытекают следующие соотношения между классами:

$$C_0\subset C_k \subset C_{k+1}\subset A_0. \tag{44}$$

Для получения условий порождения оператором A полугруппы класса C_k можно, в силу (44), прежде выяснить, когда A порождает полугруппу T класса A_0 и затем найти дополнительные условия, при которых $T\in C_k$. Приведём теорему порождения для класса A_0, доказанную в [3].

ТЕОРЕМА 2. *Линейный замкнутый оператор A порождает полугруппу T класса A_0 тогда и только тогда, когда*

1) *$\mathcal{D}A$ плотно в X;*

2) *существует резольвентная последовательность $\{R_n\}$ оператора A, регулярная и такая, что семейство операторов $\{\lambda R_n(\lambda)\}$ ($\lambda\in R^+$) эквинепрерывно;*

3) *для всякой полунормы $p\in \mathcal{P}$ найдётся непрерывная функция $\varphi_p : R^+\times X\to \overline{R^+}$, такая, что*

а) $\varphi_p(t,0)=0$ $(t\in R^+)$

б) *для всех $x\in X$ функция $\varphi_p(\cdot,x)$ суммируема в нуле и для $k\in\overline{n}$, $x\in \mathcal{D}A^k$ и $\lambda>0$*

$$p(R_n^{(k)}(\lambda)x)\leq \int_0^n e^{-\lambda t}t^k\varphi_p(t,x)\,dt.$$

Итак, пусть A порождает $T\in A_0$. С помощью n-резольвенты $R_n = R_n^\circ(\cdot)$ образуем сумму

$$f_{n,k}(\lambda)=\frac{(-1)^{k+1}e^{-\lambda n}k!}{\lambda^k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda^j}{j!}[e^{n\mu}R_n(\mu)]^{(j)}\Big|_{\mu=0}. \quad (45)$$

ТЕОРЕМА 3. Полугруппа T класса A_0 принадлежит классу C_k, если и только если для некоторого (а тогда и для каждого) $n\in N$ семейство операторов

$$\{[(m+k)!]^{-1}[(-\lambda)^{m+k+1}f_{n,k}^{(m)}(\lambda)+k\cdot m!\sum_{j=0}^{m}\frac{(m-j+k-1)!}{(m-j)!\,j!}(-\lambda)^{j+1}R_n^{(j)}(\lambda)]\} \quad (46)$$
$$(\lambda\in R^+,\ m\in\overline{N})$$

эквинепрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. __Необходимость.__ Пусть $T\in C_k$. Так как для всякой полунормы, очевидно,

$$M_{n,p}(x)=\sup\{p(C(k,t)x)\mid t\in(0,n]\}<+\infty, \quad (47)$$

то определён оператор

$$F_n(\lambda)=\int_0^n e^{-\lambda s}C(k,s)ds. \quad (48)$$

Из равенства

$$F_n^{(m)}(\lambda)=(-1)^m\int_0^n e^{-\lambda s}s^m C(k,s)ds \quad (49)$$

следует оценка

$$p(F_n^{(m)}(\lambda)x)\le M_{n,p}(x)\int_0^n e^{-\lambda s}s^m ds\le M_{n,p}(x)\frac{m!}{\lambda^{m+1}}. \quad (50)$$

Далее, заметим, что

$$I_n(j)=\int_0^n(n-t)^jT(t)dt=$$
$$=\frac{d^j}{d\mu^j}[\int_0^n e^{(n-t)\mu}T(t)dt]\Big|_{\mu=0}=[e^{n\mu}R_n(\mu)]^{(j)}\Big|_{\mu=0},$$

что вместе с (35) влечёт

$$\int_0^n e^{-\lambda t}t^kC(k,t)dt=\frac{k!}{\lambda^k}R_n(\lambda)-\frac{e^{-n\lambda}k!}{\lambda^k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda^j}{j!}[e^{n\mu}R_n(\mu)]^{(j)}\Big|_{\mu=0}. \quad (51)$$

Из (51), (49) и (45) следует
$$F_n^{(k)}(\lambda) = f_{n,k}(\lambda) + (-1)^k \frac{k!}{\lambda^k} R_n(\lambda). \tag{52}$$

От да для произвольного $m \in \mathcal{N}$ имеем:
$$F_n^{(k+m)}(\lambda) = [F_n^{(k)}(\lambda)]^{(m)} = f_{n,k}^{(m)}(\lambda) +$$
$$+(-1)^k k! \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{(-1)^j (k+j-1)!}{(k-1)!\lambda^{k+j}} R_n^{(m-j)}(\lambda) = f_{n,k}^{(m)}(\lambda) +$$
$$+ \frac{(-1)^{k+m+1} k\cdot m!}{\lambda^{k+m+1}} \sum_{j=0}^{m} \frac{(k+m-j-1)!\,(-\lambda)^{j+1}}{(m-j)!\,j!} R_n^{(j)}(\lambda).$$

Из этого соотношения и оценки (50), в силу бочечности X, следует эквинепрерывность семейства (46).

<u>Достаточность.</u> Обозначим через $M_{n,p}(x)$ супремум семейства (26) по полунорме $p \in \mathcal{P}$ на элементе $x \in X$. Если выполнены условия теоремы, то $M_{n,p}$ - непрерывная полунорма в X. Для $\lambda > 0$ положим
$$G(\lambda)x = \int_\lambda^\infty [\frac{(-1)^{k+1} k!}{z^k} R_n(z)x - f_{n,k}(z)x]dz.$$

Так как по условию
$$p[\frac{(-1)^k \cdot k!}{z^k} R_n(z)x + f_{n,k}(z)x] \le M_{n,p}(x) \frac{k!}{z^{k+1}},$$

то $G(\lambda)x$ определено и
$$p\,G(\lambda)x \le \int_\lambda^\infty \frac{M_{n,p}(x)k!}{z^{k+1}} dz = M_{n,p}(x) \frac{(k-1)!}{\lambda^k}. \tag{53}$$

Далсе, очевидно,
$$G^{(1)}(\lambda) = \frac{(-1)^k k!}{\lambda^k} R_n(\lambda) + f_{n,k}(\lambda). \tag{54}$$

Как и при доказательстве необходимости, получаем
$$G^{(m+1)}(\lambda) = f_{n,k}^{(m)}(\lambda) + \frac{(-1)^{k+m+1} k\cdot m!}{\lambda^{k+m+1}} \sum_{j=0}^{m} \frac{(k+m-j-1)!(-\lambda)^{j+1}}{(m-j)!j!} R_n^j(\lambda).$$

Воспо ьзовавшись условием теоремы, имеем:

$$p(G^{(m+1)}(\lambda)x) \le \frac{(m+k)!}{\lambda^{m+k+1}} M_{n,p}(x) \qquad (m \in \bar{N}). \qquad (55)$$

Из (53) и (55) вытекает, что

$$\left\{\frac{\lambda^{m+k}}{(m+k-1)!} G^{(m)}(\lambda)\right\} \quad (\lambda \in R^+, m \in \bar{N})$$

– эквинепрерывное семейство из $L(X)$. Пусть теперь $f \in X^*$, можно указать число $\mathcal{N} = \mathcal{N}(x, f)$ такое, что

$$|(fG(\lambda)x)^{(m)}| \le \mathcal{N} \frac{(m+k-1)!}{\lambda^{m+k}} \quad (\lambda \in R^+, m \in \bar{N}). \qquad (56)$$

Если $k > 1$, то для $\lambda > 0$ положим

$$g(\lambda) = -\int_\lambda^\infty fG(z)x\,dz.$$

Из (56) следует, что $g(\lambda)$ определено; при этом $g^{(1)}(\lambda) = fG(\lambda)x$ и справедливы оценки

$$|g^{(m)}(\lambda)| \le \mathcal{N} \frac{(m+k-2)!}{\lambda^{m+k-1}} \quad (\lambda \in R^+, m \in \bar{N}).$$

Итак, вместо k имеем $k-1$; поступая с $g(\lambda)$ аналогичным образом, через $k-1$ шагов придём к функции $g_0(\cdot)$, такой, что

$$g_0^{(k-1)}(\lambda) = fG(\lambda)x, \qquad (57)$$

причём

$$|g_0^{(m)}(\lambda)| \le \mathcal{N} \frac{m!}{\lambda^{m+1}} \quad (\lambda \in R^+, m \in \bar{N}). \qquad (58)$$

В таком случае (см. например, [2])найдётся функция $\varphi = \varphi_{x,f}$, такая, что

$$|\varphi(s)| \le \mathcal{N} \quad (s \in R^+), \qquad (59)$$

и для всех $\lambda \in R^+$

$$g_0(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \varphi(s)\,ds. \qquad (60)$$

Из (57) и (60) следует

$$(fG(\lambda)x)^{(1)} = g_0^{(k)}(\lambda) = (-1)^k \int_0^\infty e^{-\lambda s} s^k \varphi(s)\,ds.$$

С другой стороны, в силу (54), (52) и (49),

$$(f G(\lambda)x)^{(1)}=(-1)^k\int_0^n e^{-\lambda s}s^k f C(k,s)x\,ds.$$

Из этих двух соотношений следует, что для $s\in(0,n)$

$$f C(k,s)x=\varphi(s).$$

Отсюда и из (59) следует, что множество $\{C(k,s)x\,/\,s\in(0,n)\}$ слабо ограничено. Тогда оно ограничено, что в силу бочечности X означает эквинепрерывность семейства $\{C(k,s)\}$ $(s\in(0,n))$. Так как $C(k,s)x\to x$ при $s\to+0$ для $x\in H_k$ и $\bar H_k=X$, то сильный $\lim_{s\to+0}C(k,s)=I$, что и означает $T\in C_k$. Теорема доказана.

Пусть теперь X - банахово пространство, T - полугруппа класса $(0,A)$ и ω_0 - её тип. Для $\omega>\omega_0$ положим $S(t)=e^{-\omega t}T(t)$ $(t\in R^+)$. Тогда $R(\lambda,A_s)=R(\lambda+\omega,A)(\lambda\in\Pi_{\omega-\omega_0})$, где A и A_s - производящие операторы соответственно T и S. Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^k C_s(k,t)\,dt=\frac{k!}{\lambda^k}R(\lambda,A_s).$$

Если $T\in C_k$, а значит, и $S\in C_k$, то оператор

$$F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}C_s(k,t)\,dt$$

определён всюду на X и

$$F^{(k)}(\lambda)=(-1)^k\frac{k!}{\lambda^k}R(\lambda,A_s).$$

Из приведённых соотношений и из доказательства теоремы 3 следует, что в данном случае можно считать $f_{n,k}(\lambda)=\emptyset$. Учитывая, наконец, что $(-1)^j(j!)^{-1}R^{(j)}(\lambda,A_s)=R^{j+1}(\lambda+\omega,A)$ для банахова случая получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A - производящий оператор полугруппы T класса $(0,A)$. Для того чтобы T принадлежала C_k, необходимо и достаточно, чтобы для резольвенты A при некоторых $\omega\in R$ и $M\in R^+$ выполнялись оценки:

$$\left\|\sum_{j=1}^{m+1}\frac{(m+k-j)!}{(m+k-1)!}\lambda^j R^j(\lambda+\omega,A)\right\|\le\frac{(m+k)!}{k\cdot m!}M$$

$(\lambda \in R^+, m \in \bar{\mathbb{N}})$.

Заметим, что в случае $k=1$ класс C_1 есть класс $(0, C_1)$. Последняя теорема при этом превращается в известную теорему Филлипса (см. [1], [2]).

ТЕОРЕМА (Филлипс). Полугруппа T класса $(0, A)$ принадлежит классу $(0, C_1)$ тогда и только тогда, когда резольвента производящего оператора при некоторых $\omega, M \in R^+$ удовлетворяет оценкам

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda^j R^j (\lambda + \omega, A) \right\| \leq m \cdot M \quad (\lambda \in R^+, m \in \mathbb{N}).$$

В заключение автор выражает благодарность Ю.М.Вувуникяну за постоянное внимание к работе.

Литература

1. ХИЛЛЕ Э., ФИЛЛИПС Р. Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.
2. PHILLIPS R.S. An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators, Ann. of Math., 1954, v.59, p.325-326.
3. ИВАНОВ В.В. Резольвентная последовательность в вопросах порождения суммируемых полугрупп операторов.-"Докл. АН СССР", 1973, т. 213, № 2, с. 282-285.

Поступила в ред.-изд. отд.

15.У. 1973 г.