1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 14(31)
Выпуклый анализ

УДК 513.88

СУПРЕМАЛЬНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Н.В.Рутковский

В последнее время понятие выпуклой функции получило дальнейшее развитие и обобщение в различных направлениях. То обстоятельство, что выпуклые функции являются верхними огибающими некоторых множеств аффинных функций привело к понятию H-выпуклых функций, т.е. функций, являющихся верхними огибающими некоторых семейств функций из заданного класса H. С этой точки зрения любую непрерывную функцию на компакте можно рассматривать как выпуклую относительно различных классов $H \subset C(Q)$. Настоящая работа в основном посвящена изучению подпространств $H \subset C(Q)$, относительно которых каждая функция $f \in C(Q)$ является H-выпуклой в указанном смысле. Такие подпространства называются супремальными генераторами. Некоторые свойства супремальных генераторов остаются справедливыми при обобщении этого понятия на случай произвольных упорядоченных векторных пространств (сокращенно у.в.п.). С рассмотрения таких свойств мы и начнем изложение.

I. Супремальные генераторы в произвольных упорядоченных векторных пространствах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [I]). Пусть у.в.п. X является подпространством у.в.п. Y и порядок в X индуцируется порядком в Y. Подпространство $H \subset X$ называется супремальным генератором у.в.п. X в смысле Y, если для каждого элемента выполнены соотношения

$$\mathcal{U}_x=\{h\in H: h\leq x\}\neq\phi,\ x=\sup_Y \mathcal{U}_x,$$

где символ " $\sup_Y$ " означает, что супремум берется в пространстве Y, при этом если $Y=X$, то будем говорить, что H—супремальный генератор у.в.п. X без указания объемлющего пространства.

Очевидно, что, каковы бы ни были супремальный генератор H у.в.п. X в смысле Y и элемент $x\in X$, справедливы соотношения

$$V_x=\{h\in H: h\geq x\}\neq\phi,\ x=\inf_Y V_x.$$

Далее, супремальный генератор H у.в.п. X в смысле некоторого у.в.п. Y является также супремальным генератором X в смысле самого X.

ЛЕММА I. Если H - супремальный генератор у.в.п. X, то H вложено в X с сохранением верхних и нижних граней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U}\subset H$ и $h_0=\sup_H \mathcal{U}$. Если $x\in X$ и $x\geq\mathcal{U}$, то для каждого $h\in H$ такого, что $h\geq x$, имеем $h\geq\mathcal{U}$ и, следовательно, $h\geq h_0$. Поскольку $x=\inf_X V_x=$ $=\inf_X\{h\in H: h\geq x\}\geq h_0$, то $h_0=\sup_X \mathcal{U}$.

Аналогично проверяется сохранение нижних граней.

Учитывая доказанную лемму, K-пространство Y назовем K-пополнением у.в.п. X, если X вкладывается в Y как супремальный генератор.

Приведем простую характеристику упорядоченных векторных пространств, имеющих K-пополнения.

У.в.п. X в том и только в том случае имеет K-пополнение, если оно архимедово (для каждого $x\in X$ из ограниченности сверху множества $\{nx\}_{n=0}^{\infty}$ следует, что $x\leq\mathcal{O}$) и его конус X_+ положительных элементов является воспроизводящим, т.е. $X=X_+-X_+$.

Прежде всего, если у.в.п. X является генератором некоторого K-пространства Y, то для каждого $x\in X$ найдется $y\in Y_+$ такой, что $x\leq y$. Так как $V_y=\{x\in X: y\leq x\}=\phi$, то существует $x'\in X_+$ такой, что $y\leq x'$ и, следовательно, $x=x'-(x'-x)$, где $x'\in X_+$, $x'-x\in X_+$, т.е. X_+ является воспроизводящим конусом в X. Кроме того X, как подпространство архимедового у.в.п. Y, само является архимедовым.

Достаточность указанных условий можно проверить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в [2,стр.126-130] для случая архимедовых K-линеалов*).

Следующее утверждение устанавливает связь между некоторыми характеристиками конусов положительных элементов в исходном пространстве X и его K-пополнении $\hat{X}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $\hat{X}$ является K-пополнением у.в.п. X. Тогда для замкнутости X_+ в сильнейшей локально выпуклой топологии τ пространства X необходима и достаточна замкнутость $\hat{X}_+$ в сильнейшей локально выпуклой топологии $\hat{\tau}$ пространства $\hat{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что конус $X_+ \subset X$ является τ-замкнутым. Для доказательства $\hat{\tau}$-замкнутости $\hat{X}_+ \subset \hat{X}$ достаточно проверить, что для любого $y \in \hat{X}_+ \setminus \{0\}$ существует положительный функционал $\hat{f}$ на $\hat{X}$, удовлетворяющий неравенству $\hat{f}(y) > 0$. Так как $y = \sup_Y \{x \in X : x \leq y\}$ и $y > 0$, то найдется элемент $x \in X$ такой, что $x \leq y$ и $x \bar{\in} X_-$. В силу τ-замкнутости $X_- \subseteq X$ найдется положительный функционал f на X такой, что $f(x) > 0$. По теореме Канторовича (см. [2] стр. 301) этот функционал можно распространить до положительного линейного функционала $\hat{f}$ на $\hat{X}$. Тогда

$$\hat{f}(y) \geq \hat{f}(x) = f(x) > 0.$$

Обратно, пусть конус $\hat{X}_+ \subset \hat{X}$ является $\hat{\tau}$-замкнутым. Так как τ-топология на X индуцируется $\hat{\tau}$-топологией на $\hat{X}$ и $X_+ = X \cap \hat{X}_+$, то конус $X_+ \subset X$ является τ-замкнутым.

---

*) См. также [3,стр.268-269] и [4, сноска на стр.38].

2. Порождение относительно мер

Рассмотрим пространство $C(Q)$ вещественных непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом компакте Q и конус $C_+^*(Q)$ положительных мер в пространстве $C^*(Q)$.

Говорят (см. [I]), что подпространство $H \subset C(Q)$ порождает пространство $C(Q)$ относительно меры $\mu \in C_+^*(Q)$, если для любой функции $f \in C(Q)$ выполнены соотношения

$$U_f = \{h \in H : h \leq f\} \neq \emptyset ; \quad \mu(f) = \sup_{h \in U_f} \mu(f).$$

Подпространство H порождает $C(Q)$ относительно множества $M \subset C_+^*(Q)$; если H порождает $C(Q)$ относительно каждой меры $\mu \in M$.

Ясно, что если подпространство H порождает $C(Q)$ относительно меры $\mu \in C_+^*(Q)$, то H порождает $C(Q)$ относительно мер $\alpha\mu$ при $\alpha \geq 0$ и $\mu' : 0 \leq \mu' \leq \mu$. Далее, каждое порождающее подпространство H, очевидно, содержит некоторую строго положительную функцию $h(q) > 0$ ($q \in Q$). Можно проверить, что в результате умножения элементов этого подпространства на функцию $\frac{1}{h(q)} > 0$ получается новое подпространство, которое порождает $C(Q)$ относительно старой меры и содержит функцию $\mathbb{1}$, тождественно равную I. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что рассматриваемые порождающие подпространства в $C(Q)$ содержат константы.

Пусть H -подпространство $C(Q)$, содержащее константы, а H^*- сопряженное к H пространство. Тогда (см. [5, стр. 36]) множество

$$K(H) = \{L \in H^* : \|L\| = 1;\ L(\mathbb{1}) = 1\}$$

является выпуклым и слабо компактным подмножеством единичной сферы в H^*. Каждой точке $q \in Q$ сопоставляется функционал $\varphi q \in K(H)$ со значениями

$$\varphi q(h) = h(q), \quad h \in H.$$

Рассматривая H^* в слабой топологии $\sigma(H^*, H)$, легко видеть, что φ непрерывно отображает компакт Q на множество $X = \varphi Q \subset K(H)$. Известно (см. [5, стр. 38]), что слабое замыкание $\overline{co X}$ выпуклой оболочки $co X$ множества X совпадает с $K(H)$.

Каждой мере $\mu \in C_+^*(Q)$ обычно сопоставляется мера $\psi\mu \in C_+^*(Q)$, значения которой на борелевских множествах $A \subset X$ определяются по формуле

$$(\psi\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}A).$$

Далее, для каждой меры $\nu \in C_+^*(Q)$ через x_ν обозначается точка из H^*, представляющая эту меру (см. [5]). Совокупность таких точек, очевидно, совпадает с конусом $K \subset H^*$, натянутым на множество $K(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Подпространство $H \subset C(Q)$ порождает $C(Q)$ относительно меры $\mu \in C_+^*(Q)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

а) В $C_+^*(Q)$ не существует меры $\mu' \neq \mu$ такой, что $\psi\mu' = \psi\mu$.

в) Точка $x_{\psi\mu} \in K$ представляет единственную меру $\nu = \psi\mu$ из $C_+^*(Q)$.

В проводимом ниже доказательстве используется понятие положительного ростка меры $\mu \in C_+^*(Q)$ на подпространстве $H \subset C(Q)$. Под этим понимается множество (см. [I]).

$$Spr(\mu, H) = \{\mu' \in C_+^*(Q) : \mu'(h) = \mu(h);\ \forall h \in H\}.$$

Известно (см. [I]), что подпространство $H \subset C(Q)$ порождает $C(Q)$ относительно множества $M \subset C_+^*(Q)$ в том и только в том случае, если росток $Spr(\mu, H)$ для любой меры $\mu \in M$ не содержит мер, отличных от μ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2. Пусть H порождает $C(Q)$ относительно меры $\mu \in C_+^*(Q)$ и $\psi\mu' = \psi\mu$, т.е. $\mu' \in Spr(\mu, H)$. Поскольку в данном случае $Spr(\mu, H) = \{\mu\}$, то $\mu' = \mu$, что устанавливает а).

Далее, отображение φ индуцирует оператор $\Phi : C(X) \to C(Q)$, действующий по формуле

$$\Phi g = g \circ \varphi.$$

Ясно, что этот оператор изометричен, сохраняет порядок и $H \subset \Phi[C(X)]$. При этом для любой функции $g \in C(X)$ имеем:

$$\nu(g) = \mu(g \circ \varphi) = \sup\{\mu(h) : h \leq g \circ \varphi\} = \sup\{\nu(\Phi^{-1}h) : \Phi^{-1}h \leq g\}.$$

Из этих равенств следует, что $\Phi^{-1}H$ порождает $C(X)$ относительно меры ν и, значит, $Spr(\nu, \Phi^{-1}H)=\{\nu\}$, что равносильно утверждению в).

Предположим теперь, что H не порождает $C(Q)$ относительно μ. Тогда найдется мера $\mu' \in Spr(\mu, H)$, отличная от меры μ. Если $\nu' = \psi\mu'$ совпадает с $\nu = \psi\mu$, то нарушено условие а). Если же $\nu' = \nu$, то $\nu'(\Phi^{-1}h) = \mu'(h) = \mu(h) = \nu(\Phi^{-1}h)$, откуда следует, что $x_\nu = x_{\nu'}$. Полученное противоречие с условием в) завершает доказательство предложения.

Для получения более обозримых условий порождения обычно накладывают дополнительные ограничения на рассматриваемые меры. Пусть M - множество всех положительных мер из $C^*(Q)$, сосредоточенных на замкнутом подмножестве $P = Q$. Чтобы получить соответствующие условия порождения относительно M, напомним некоторые определения из [5].

Множество $B(H) = \{q \in Q : \varphi q \in ex\,K(H)\}$, где $ex\,K(H)$ - совокупность крайних точек $K(H)$, называется границей Шоке для H.

Учитывая теорему Шоке-Мейе, выпуклый компакт Z в локально выпуклом пространстве, для которого множество $ex\,Z$ замкнуто, назовем симплексом, если для каждой точки $z \in Z$ существует единственная представляющая мера на $ex\,Z$.

Далее, множество $\varphi[P]$ обозначим через Y.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *H порождает $C(Q)$ относительно M в том и только в том случае, если выполнены условия:*

(1) $P \subset B(H)$ и $\varphi^{-1}(\varphi[P]) = [P]$ *для любой точки* $p \in P$.

(2) $\overline{co\, Y}$ *является симплексом и одновременно крайним подмножеством множества* $K(H)$.

(3) $\overline{co\, Y} \cap \varphi(Q \setminus P) = \phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H порождает $C(Q)$ относительно M. Тогда для каждой меры $\mu \in M$ выполнены условия а) и в) предложения 2. Из этих условий на основании теоремы Бауэра [5], примененной к единичной мере $\epsilon_p \in M$, сосредоточенной в произвольной точке $p \in P$, получаем (I). Далее, поскольку для каждой точки $y \in \overline{co\, Y}$ найдется мера $\mu \in M$ такая, что мера $\nu = \psi\mu \in C_+^*(X)$ представляет эту точку, то из условия в) следует, что никакая отличная от ν мера $\nu' \in C_+^*(X)$ не представляет точку y. Условия (2) и (3) очевидным образом следуют из этого факта.

Для доказательства обратного утверждения, предполагая выполненными условия (I), (2) и (3), проверим выполнение условий а) и в) предложения 2 для любой меры $\mu \in M$. Легко видеть, что условие а) следует из того, что отображение φ взаимно-однозначно на множестве $P \subset Q$. Для проверки условия в) рассмотрим ненулевую меру $\mu \in M$ и отвечающую ей меру $\nu_0 = \frac{1}{\mu(Q)} \psi\mu \in C_+^*(X)$. Так как мера ν_0 сосредоточена на Y, то представляющая её точка $x_{\nu_0} \in \overline{co\, Y}$. Далее, поскольку множество $\overline{co\, Y}$ является крайним подмножеством $K(H)$, то любая мера $\nu' \in C_+^*(X)$, представляющая точку x_{ν_0}, сосредоточена на $\overline{co\, Y}$. Из условия (3) вытекает, кроме того, что мера ν' сосредоточена на Y. Равенство $\nu' = \nu_0$ теперь непосредственно следует из условия (2) и соотношения $ex(\overline{co\, Y}) = Y$. Ясно, что полученное равенство эквивалентно условию в) предложения 2.

Рассмотрим теперь случай, когда M есть множество всех положительных мер на Q, сосредоточенных не более чем в n точках. Подпространство $H \subset C(Q)$, порождающее $C(Q)$ относительно этого множества M, называется K_n-пространством (см. [6]). Следующая теорема, характеризующая K_n-пространства, является непосредственным следствием предложения 3.

ТЕОРЕМА ШАШКИНА. *Для того чтобы подпространство $H \subset C(Q)$ являлось K_n-пространством, необходимо и достаточно, чтобы отображение φ было инъективным и чтобы выпуклая оболочка любых r точек ($1 \leq r \leq n$) множества $X = \varphi(Q)$ являлась гранью $K(H)$.*

3. Супремальные генераторы в пространстве $C(Q)$

Пусть H - подпространство $C(Q)$, содержащее константы. В обозначениях предыдущего пункта нас будут интересовать свойства отображения $\varphi : Q \longrightarrow H^*$, необходимые и достаточные для того, чтобы подпространство H было супремальным генератором пространства $C(Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [7]). Непрерывное отображение f топологического пространства A в топологическое пространство B называется неприводимым, если $f(A)=B$, но $f(F)\neq B$, каково бы ни было собственное замкнутое подмножество F множества A.

ТЕОРЕМА. Подпространство $H \subset C(Q)$, содержащее константы, является супремальным генератором $C(Q)$ тогда и только тогда, когда отображение $\varphi : Q \longrightarrow X$, где $X=\varphi(Q)$, неприводимо и замыкание $\overline{B(H)}$ границы Шоке совпадает со всем компактом Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение φ не является неприводимым и $P \subset Q$ - собственное замкнутое подмножество такое, что $\varphi(P)=X$. Для произвольной точки $q \in Q \setminus P$ рассмотрим функцию $f \in C(Q)$ такую, что $f(q)=1$ и $f|_P=0$. Тогда условие $h\leq f$, $h\in H$ влечет неравенство $h\leq 0$, и, следовательно, $f\neq \sup \mathcal{U}_f$, т.е. H не является супремальным генератором.

В случае, если $\overline{B(H)}\neq Q$, выберем функцию $f\in C(Q)$ такую, что $f|_{\overline{B(H)}}=0$ и $f(q)=1$ для некоторой точки $q\in Q\setminus \overline{B(H)}$. Поскольку функция $h\in H$ достигает своего супремума на множестве $B(H)$, то из условия $h|_{B(H)}\leq 0$ следует, что $h\leq 0$. Следовательно, $f\neq \sup \mathcal{U}_f$, и, значит, подпространство H не является супремальным генератором пространства $C(Q)$.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что отображение $\varphi : Q \longrightarrow X$ неприводимо и граница Шоке для H всюду плотна в Q. Тогда множество $ex\, K(H)$ является плотным подмножеством компакта $X=\varphi(Q)$. Рассмотрим оператор

$\Phi : C(X) \to C(Q)$ со значениями: $\Phi g = g \circ \varphi$. Ясно, что подпространство $H' \subset C(X)$, определяемое равенством $H' = \Phi^{-1}(H)$, разделяет точки компакта X и имеет своей границей Шоке множество $ex\, K(H)$. Из предложения 3 следует, что H' порождает $C(X)$ относительно точечных мер ε_q, носителями которых являются точки $q \in ex\, K(H)$. Следовательно, для любой функции $g \in C(X)$ и любой точки $x \in ex\, K(H)$ имеем

$$g(x) = \sup\{h'(x) : h' \le g;\ h' \in H'\}.$$

Поскольку множество $ex\, K(H)$ плотно в X, последнее равенство означает, что $g = \sup\{h' \in H' : h' \le g\}$ и, следовательно, подпространство H является супремальным генератором пространства $C(X)$. Легко видеть, что доказанное утверждение эквивалентно следующему: подпространство $H \subset \Phi[C(X)]$ является супремальным генератором пространства $\Phi[C(X)]$. Теперь для завершения доказательства достаточно показать, что подпространство $\Phi[C(X)] \subset C(Q)$ является супремальным генератором $C(Q)$. Для этого рассмотрим произвольную функцию f из $C(Q)$. Для любой окрестности W произвольной точки $q \in Q$ и любого $\varepsilon > 0$ выберем открытую окрестность $V \subset W$ точки q так, чтобы для любого $x \in V$ выполнялось неравенство $f(x) > f(q) - \varepsilon$. Поскольку $\varphi(Q \setminus V) \ne X$, то существует точка $x_W \in X \setminus \varphi(Q \setminus V)$. Далее, рассмотрим функцию $g \in C(X)$, удовлетворяющую условиям: $g(x_W) = f(q) - \varepsilon$; $g(x) \le \inf\limits_{q' \in Q} \{f(q') - \varepsilon\}$ при $x \in \varphi(Q \setminus V)$; $g(x) \le f(q) - \varepsilon$ для всех $x \in X$. Тогда для точки $q_W \in Q$ такой, что $\varphi(q_W) = x_W$, имеем $(g \circ \varphi)(q_W) = f(q) - \varepsilon$. Очевидно, что при этом $q_W \in V$ и $g \circ \varphi \le f$. Если функция $f' \in C(Q)$ такова, что $f' \ge \{h \in \Phi[C(X)] : h \le f\}$, то $f'(q) \ge f(q) - \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и точки $q \in Q$, имеет место неравенство $f' \ge f$ и, следовательно, пространство $\Phi[C(X)]$ является супремальным генератором $C(Q)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если подпространство H порождает $C(Q)$ относительно точечных мер для некоторого плотного подмножества в Q, то H — супремальный генератор в $C(Q)$.

Следующее предложение описывает некоторый класс компактов, для которых справедливо обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Q является компактификацией полного метрического пространства T и пусть подпространство H является супремальным генератором $C(Q)$, содержащим константы. Тогда подпространство H порождает $C(Q)$ относительно точечных мер для некоторого плотного подмножества в Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае известно (см. [7]), что T является плотным G_δ-множеством в Q. Из неприводимости отображения φ следует, что множество $X'=X\setminus\varphi(Q\setminus T)$ является плотным G_δ-множеством в Q. Тогда множество $T'=\varphi^{-1}[X']$ есть плотное G_δ-множество в Q и, следовательно, является бэровским метрическим пространством, причем $T'=\varphi^{-1}[\varphi(T')]$. Через A_n обозначим множество $\{q\in T': \delta(\varphi^{-1}[\varphi(q)])<\frac{1}{n}\}$, где под $\delta(Y)$ понимается диаметр множества $Y\subset T$. Пусть точка $q\in A_n$ и V - открытая окрестность в T' множества $\varphi^{-1}[\varphi(q)]$ такая, что $\delta(V)<\frac{1}{n}$. Множество $\varphi(T'\setminus V)=\varphi(\overline{T'\setminus V})\cap X'$ замкнуто в X и, следовательно, множество $V'=\varphi^{-1}[X'\setminus\varphi(T'\setminus V)]$ открыто в T' и содержит точку q. Таким образом, множество A_n вместе с каждой своей точкой q содержит некоторую окрестность V' этой точки и, следовательно, является открытым множеством в T'. Из неприводимости отображения φ следует также, что A_n является плотным подмножеством T'. Но тогда $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ будет плотным G_δ-множеством в T', а также в Q. При этом для любого $q\in A$ выполняется соотношение $\varphi^{-1}[\varphi(q)]=\{q\}$. В силу предложения 3 множество $B=A\cap B(H)$ состоит из точек q, для которых подпространство H порождает $C(Q)$ относительно единичной меры ε_q, сосредоточенной в точке q. Поскольку $B(H)$ - бэровское пространство [5], то B плотно в $B(H)$ и, значит, в Q.

Выясним теперь, какие упорядоченные векторные пространства являются супремальными генераторами пространств $C(Q)$

Пусть H - супремальный генератор пространства $C(Q)$. Тогда H - архимедово упорядоченное векторное пространство, содержащее сильную единицу, т.е. такой элемент $e \in H$, что для любого вектора $h \in H$ найдется $\lambda > 0 : h \leq \lambda e$. В качестве сильной единицы можно взять любую строго положительную функцию, содержащуюся в H.

ТЕОРЕМА. Пусть H -архимедово упорядоченное векторное пространство с сильной единицей. Тогда существует компакт X такой, что H вкладывается в $C(X)$ как супремальный генератор. При этом в множестве $\mathfrak{X}$ таких компактов найдется $Q \in \mathfrak{X}$ такое, что для любого $X \in \mathfrak{X}$ существует непрерывное неприводимое отображение $\varphi_X : X \to Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K - конус всех положительных линейных функционалов на H и $H^* = K - K$. Поскольку сильная единица $e \in H$ является относительно внутренней точкой конуса H_+ и архимедовость эквивалентна линейной замкнутости H_+ [3], то пространство $H^* = K - K$ тотально на H. Рассмотрим множество $K(e) \doteq \{f \in K : f(e) = 1\}$, которое, очевидно, является основанием конуса K. Покажем, что множество $K(e)$ является $\sigma(H^*, H)$-компактным. Пусть $h \in H$ и $\lambda > 0$ такое, что $\lambda e \geq h$ и $\lambda e \geq -h$. Тогда для $f \in K(e)$ имеем $-\lambda \leq$ $\leq f(h) \leq \lambda$, т.е. множество $K(e)$ слабо ограничено и, следовательно, слабо предкомпактно. Пусть теперь $\{f_i\}_{i \in I}$ - сеть Коши в $K(e)$. Для каждого элемента $h \in H$ существует $\lim\limits_i f_i(h) = f(h)$. Ясно, что f - аддитивный и однородный функционал, принимающий неотрицательные значения на H_+. Кроме того, $f(e) = \lim\limits_i f_i(e) = 1$ и, значит, $f \in K(e)$. Итак, множество $K(e)$ является $\sigma(H^*, H)$-компактным. Через Q_e обозначим множество $ex\, K(e)$. Легко проверяется, что если e и e' - две сильные единицы в H, то компакты Q_e и $Q_{e'}$ гомеоморфны. Определим оператор $\Psi : H \to C(Q_e)$, действующий по формуле

$$(\Psi h)(f) = f(h); \quad f \in Q_e.$$

Ясно, что оператор Ψ линеен и сохраняет порядок. Далее, поскольку $K(e) = \overline{co}\, Q_e$, то из равенства $f(h_1) = f(h_2)$ для всех $f \in Q_e$ следует, что $h_1 = h_2$ и, следовательно, оператор Ψ взаимно-однозначен. Применяя теорему I к подпространству $\Psi[H]$ пространства $C(Q_e)$ убеждаемся, что $\Psi[H]$ является супремальным генератором в $C(Q_e)$.

Пусть теперь пространство H вложено в $C(X)$ как супремальный генератор. Не уменьшая общности, можно считать, что сильная единица $e \in H$ совпадает с единичной функцией на X. Тогда, в силу теоремы I, отображение φ, определенное в пункте 2, является непрерывным и неприводимым отображением компакта X на Q_e. Это завершает доказательство, так как ясно, что в качестве компакта Q, указанного в теореме, годится любой компакт Q_e, где e - сильная единица в H.

В заключение я хочу выразить благодарность Г.Ш.Рубинштейну и С.С.Кутателадзе за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

I. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и её приложения.-УМН, 1972, 27 :3, 127-176.

2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. ГИФМЛ, М., 1961.

3. БУРБАКИ. Алгебра. Упорядоченные группы. "Наука", М., 1965.

4. БУРБАКИ. Интегрирование. "Наука", М., 1967.

5. ФЕЛПС Р. Лекции о теоремах Шоке. "Мир", М., 1968.

6. ШАШКИН Ю.А. Конечно-определенные линейные операторы в пространствах непрерывных функций.- УМН, 1965, 20:4, 495-512.

7. ПОНОМАРЁВ В.И. О пространствах, соабсолютных с метрическими.-УМН, 1966, 21(4), 101-131.

Поступила в ред.-изд. отд.

10.VI,1974 г.