1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 14(31)
Выпуклый анализ

УДК 517.51 : 519.5

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ

В.А.Васильев

Целью заметки является общая характеристика пространства Φ_∞ полиномиальных функций множеств, определенных на σ-алгебре Σ подмножеств некоторого множества Q. Полученные результаты используются для доказательства некоторых утверждений, анонсированных в работе [1].

Данная работа состоит из введения и пяти пунктов. В первом пункте, носящем вспомогательный характер, приводятся некоторые комбинаторные тождества, характеризующие полиномиальные функции множеств.

Во втором пункте в пространстве полиномиальных функций множеств Φ_n выделяется конус Φ_n^+ "положительных" функций множеств, вводится понятие полной вариации $|\varphi|$ для функций $\varphi \in \Phi_n$ и устанавливается, что Φ_n является KB-пространством относительно упорядоченности, порожденной конусом Φ_n^+, и нормы $\|\varphi\| = |\varphi|(Q)$.

Содержанием третьего пункта является изложение конструкции разложения Φ_n в прямую сумму попарно-дизъюнктных "однородных" подпространств $\Phi_{(k)}$, $k=1,\dots,n$, являющихся некоторыми аналогами пространств однородных полиномов. Здесь же вводится один способ пополнения пространства $\Phi_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, основанный на таком разложении. Примеры, иллюстрирующие некоторые понятия, введенные в предыдущих пунктах, приведены в п.4.

В пятом пункте изучается связь функций $\varphi \in \Phi_\infty$ с непрерывными (в топологии равномерной сходимости) полиномиальными функционалами над пространством $B = B(Q,\Sigma)$ ограниченных

Σ - измеримых функций, определенных на Q, и доказывается теорема о представлении элементов $\varphi \in \Phi_\infty$ в виде диагонального сужения соответствующих функций множеств многих переменных, аддитивных по каждому аргументу.

Введение. Понятие полиномиальной функции множеств возникло в результате изучения неаддитивных функций множеств одного переменного, получающихся диагонализацией функций множеств многих переменных, аддитивных по каждому аргументу в отдельности.

Одним из самых интересных свойств функций φ_ψ, полученных диагонализацией $\varphi_\psi(e)=\psi(e,\dots,e)$ указанных выше функций ψ многих переменных, является то, что они удовлетворяют так называемым полиномиальным тождествам.

В частности, если ψ - функция одного переменного, то φ_ψ - обычная аддитивная функция множеств, удовлетворяющая полиномиальному тождеству I порядка:

$$(P_1) \qquad \varphi_\psi(e_1\cup e_2)-\varphi_\psi(e_1)-\varphi_\psi(e_2)=0,$$

где e_1, e_2 - произвольные непересекающиеся множества из Σ. Если ψ - функция двух аргументов, то φ_ψ, как нетрудно проверить, удовлетворяет полиномиальному тождеству 2 порядка:

$$(P_2) \quad \varphi_\psi(e_1\cup e_2\cup e_3)-\varphi_\psi(e_1\cup e_2)-\varphi_\psi(e_1\cup e_3)-\varphi_\psi(e_2\cup e_3)+\varphi_\psi(e_1)+\varphi_\psi(e_2)+\varphi_\psi(e_3)=0,$$

где e_1, e_2, e_3 - произвольные попарно непересекающиеся множества из Σ.

Очевидным n-мерным аналогом тождеств (P_1), (P_2) является следующее

$$(P_n) \qquad \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{s_k\in \mathcal{S}_{n+1,k}}(-1)^{n+1-k}\varphi(\bigcup_{i\in s_k} e_i)=0,$$

где $e_1,\dots,e_{n+1}$ - произвольные попарно непересекающиеся подмножества из Σ, $\mathcal{S}_{n+1,k}=\{s_k\}$ - совокупность всех k-элементных подмножеств из $\{1,\dots,n+1\}$.

Оказалось (см. [I], лемма 2), что в общем случае аддитивной по каждому аргументу функции ψ от n переменных, отвечающая ей функция φ_ψ удовлетворяет тождеству (P_n). Последний факт указывает на естественность введенного n-мерного аналога тождеств (P_1), (P_2) и делает возможным выделение совокупности всех (вне зависимости от их происхождения) функций множеств одного переменного, удовлетворяющих тождеству (P_n), в самостоятельный объект изучения. Более того, в дальнейшем будет показано, что при некоторых естественных предположениях выполнение тождества (P_n) гарантирует возможность представления $\varphi \in \Phi_n$ в виде $\varphi = \varphi_\psi$, где ψ - аддитивная по каждому аргументу функция n переменных (следствие 5.I).

I. Для того, чтобы ввести соответствующее формальное определение интересующего нас класса функций множеств, нам потребуются следующие обозначения и сокращения.

Пусть $e \in \Sigma$. Через $\Xi(e)$ обозначим совокупность всех конечных Σ -измеримых разбиений множества e. Для $\eta \in \Xi(e)$, $\eta = \{e_1, \dots, e_k\}$ и $\varphi : \Sigma \to R$, следуя [I], определим

$$\varphi_k(e_1, \dots, e_k) \triangleq \sum_{r=1}^{k} \sum_{s_r \in s_{k,r}} (-1)^{k-r} \varphi(\bigcup_{i \in s_r} e_i),$$

где $s_{k,r} = \{s_r\}$ - совокупность всех r - элементных подмножеств множества $\{1, \dots, k\}$.

Далее, если $\eta = \{e_1, \dots, e_m\} \in \Xi(e)$ и $1 \le k \le m$, то полагаем

$$\varphi_m[\eta] \triangleq \varphi_m(e_1, \dots, e_m),$$

$$\varphi_{s_k}[\eta] \triangleq \varphi_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \quad s_k = \{i_1, \dots, i_k\},$$

$$\varphi^{(k)}[\eta] \triangleq \sum_{s_k \in s_{m,k}} |\varphi_{s_k}[\eta]|.$$

Через $\Phi_n = \Phi_n(Q, \Sigma)$ обозначим класс всех функций $\varphi : \Sigma \to R$, удовлетворяющих условиям:

(0.I) $\varphi_{n+1}[\eta] = 0$ для всех $e \in \Sigma$, $\eta = \{e_1, \dots, e_{n+1}\} \in \Xi(e)$;

(0.2) $\varphi^{(k)}[\eta]$ ограничены сверху для всех $k = 1, \dots, n$ на $\Xi(Q)$.

Наконец, $\Phi_\infty \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, и под полиномиальными функциями всюду в дальнейшем понимаются функции множеств из Φ_∞.

Укажем попутно, что несколько громоздкое условие (0.2) в наиболее существенном случае надмер (см. [I], п. 3) совпадает с требованием конечности, т.е. не сужает указанный класс функций множеств.

Отметим некоторые полезные тождества, вытекающие из определения полиномиальных функций множеств.

Пусть $\eta^0=\{e_1^0,\dots,e_m^0\}$, $\eta=\{e_1,\dots,e_{m+1}\}$ – два разбиения из $\Xi(e)$, $e\in\Sigma$, причем:

$$e_i^0=e_i,\ i=1,\dots,m-1,\ e_m^0=e_m\cup e_{m+1}.$$

Полагая $\eta^{0,m}=\{e_1^0,\dots,e_{m-1}^0,e_m\}$, $\eta^{0,m+1}=\{e_1^0,\dots,e_{m-1}^0,e_{m+1}\}$, имеем:

$$\varphi_m[\eta^0]=\varphi_m[\eta^{0,m}]+\varphi_m[\eta^{0,m+1}]+\varphi_{m+1}[\eta]. \qquad (I.I)$$

Проверка тождества (I.I) заключается в разбиении выражений для φ_m, φ_{m+1} на части, содержащие хотя бы одно из множеств e_m^0, e_m, e_{m+1}, и, соответственно, не содержащие ни одного из указанных выше множеств.

Пусть теперь $\varphi\in\Phi_n$, $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi(e)$, $m\geq n+1$. Используя (I.I) и индукцию по m, можно получить следующее тождество:

$$\varphi(e)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s_k\in s_{m,k}}\varphi_{s_k}[\eta]. \qquad (I.2)$$

При проверке первого шага индукции полезно воспользоваться комбинаторным тождеством:

$$(-1)^{k-1}=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_k^r$$

и свойством (0.I) из определения $\varphi\in\Phi_n$.

Если $\eta,\eta'\in\Xi(e)$, $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}$, $\eta'=\{e_{11},\dots,e_{1r_1},\dots,e_{m1},\dots,e_{mr_m}\}$, причем $\bigcup_{r=1}^{r_i} e_{ir}=e_i$, $i=1,\dots,m$, то через s_r^m обозначим совокупность всех r-элементных подмножеств множества $\{11,\dots,1r_1,\dots,m1,\dots,mr_m\}$, для которых $s_r\cap\{k1,\dots,km_k\}\neq\emptyset$ при всех $k=1,\dots,m$, и для $\varphi:\Sigma\to R$ положим:

$$\varphi^{(r,m)}[\eta']=\sum_{s_r\in s_r^m}\varphi_{s_r}[\eta'],\ r\geq m.$$

ЛЕММА I.I. Если $\varphi\in\Phi_n$, $\eta,\eta',s_r^m,\varphi^{(r,m)}$ определены в соответствии с вышесказанным, причем $m\leq n$, $\sum_{i=1}^{m}r_i\geq n+1$, то справедливо равенство:

$$\varphi_m[\eta]=\varphi^{(m,m)}[\eta']+\ldots+\varphi^{(n,m)}[\eta'].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по m. При $m=1$ соответствующее равенство сводится к тождеству (I.2). При переходе от m к $m+1$ достаточно воспользоваться представлением для φ_{m+1}, определенным в соответствии с тождеством (I.I) и индукционным предположением.

2. В этом пункте вводятся понятия полной, положительной и отрицательной вариации для полиномиальных функций множеств, вполне аналогичные (в известном смысле) соответствующим понятиям для аддитивных функций множеств.

Выделим множество Φ_n^+ "положительных" элементов в Φ_n: $\Phi_n^+=\{\varphi\in\Phi_n:\varphi_m[\eta]\geq 0$ для всех $e\in\Sigma,\ \eta=\{e_1,\ldots,e_m\}\in\Xi(e), m=1,\ldots,n\}$. Ясно, что Φ_n^+ – выпуклый конус в пространстве Φ_n. С помощью Φ_n^+ введем порядок в Φ_n, полагая, по определению, $\varphi\leq_n\varphi'\Longleftrightarrow\varphi'-\varphi\in\Phi_n^+$. Прежде чем приступить к изучению порядка $\leq_n$, введем понятия полной, положительной и отрицательной вариации для функций из Φ_n.

Пусть $\varphi\in\Phi_n$. Для каждого $e\in\Sigma$ положим:

$$|\varphi|(e)=\sup\{\varphi_\eta:\eta\in\Xi(e)\},\tag{2.I}$$

где

$$\varphi_\eta=\sum_{k=1}^{n}\varphi^{(k)}[\eta].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Функцию $|\varphi|:\Sigma\to R$, определяемую по $\varphi\in\Phi_n$ с помощью (2.I), будем называть полной вариацией функции φ, а функции $\varphi^+=\frac{1}{2}(|\varphi|+\varphi)$, $\varphi^-=\frac{1}{2}(|\varphi|-\varphi)$ соответственно, положительной и отрицательной вариациями функции φ.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. Вводя обычным образом частичный порядок на $\Xi(e)$, $e\in\Sigma$ ($\eta\leq\eta'$ тогда и только тогда, когда η' есть измельчение η), можно заметить, что обобщенная последовательность $\{\varphi_\eta\}_{\eta\in\Xi(e)}$ является монотонно возрастающей по направлению $\Xi(e)$. Последнее вытекает из определения φ_η, $\eta\in\Xi(e)$, принадлежности $\varphi\in\Phi_n^+$ и тождества (I.I).

ТЕОРЕМА 2.I. *Функции* $|\varphi|,\varphi^+,\varphi^-$ *принадлежат* Φ_n^+, *причем*

$$|\varphi| = \varphi \vee -\varphi , \quad \varphi^+ = \varphi \vee 0, \quad \varphi^- = \varphi \wedge 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в силу определения $|\varphi|$, φ^+, φ^- имеют место равенства: $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$, $\varphi^- = (-\varphi)^+$, то для доказательства первой части теоремы достаточно установить принадлежность $\varphi^+ \in \Phi_n^+$.

Пусть $1 \le k \le n$, $\eta^\circ \in \Xi(e^\circ)$, $\eta^\circ = \{e_1^\circ, \dots, e_k^\circ\}$, $e^\circ \in \Sigma$, произвольные. Покажем, что $\varphi_k^+(e_1^\circ, \dots, e_k^\circ) \ge 0$. Предполагая для простоты, что k четно, неравенство $\varphi_k^+[\eta^\circ] \ge 0$ можно переписать в виде:

$$\sum_{\tau_1 \in N_1} \sum_{s_{\tau_1} \in s_{k,\tau_1}} \varphi^+(E_{s_{\tau_1}}) \le \sum_{\tau_2 \in N_2} \sum_{s_{\tau_2} \in s_{k,\tau_2}} \varphi^+(E_{s_{\tau_2}}), \qquad (2.2)$$

где

$$E_{s_{\tau_\delta}} = \bigcup_{i \in s_{\tau_\delta}} e_i^\circ , \quad s_{\tau_\delta} \in s_{k,\tau_\delta}, \quad \tau_\delta \in N_\delta, \quad \delta = 1, 2,$$
$$N_1 = \{1, 3, \dots, k/2 - 1\} , \quad N_2 = \{2, 4, \dots, k\}.$$

Для того, чтобы доказать (2.2), рассмотрим произвольную совокупность разбиений

$$T = \{\eta_{s_{\tau_1}} : \eta_{s_{\tau_1}} \in \Xi(E_{s_{\tau_1}}), s_{\tau_1} \in s_{k,\tau_1}, \tau_1 \in N_1\}$$

тех множеств $E_{s_{\tau_1}}$, которые участвуют в левой части неравенства (2.2). Нетрудно заметить, что с помощью T можно построить совокупность разбиений

$$T_1 = \{\eta_i : \eta_i \in \Xi(e_i^\circ), i = 1, 2, \dots, k,$$

множеств e_i° , $i = 1, \dots, k$, обладающую свойством: $\bigvee_{i \in s_\tau} \eta_i \ge \eta_{s_\tau}$ для всех $\eta_{s_\tau} \in T$, где $\bigvee_{i \in s_\tau} \eta_i$ - разбиение $\bar\eta_{s_\tau}$ множества E_{s_τ} , индуцированное разбиениями $\eta_i \in \Xi(e_i^\circ)$, $i \in s_\tau$. Воспользовавшись замечанием, предшествующим теореме, и применяя тождество (I.2) и лемму I.I к функции φ , получим следующую цепочку неравенств:

$$\sum_{\tau_1 \in N_1} \sum_{s_{\tau_1} \in s_{k,\tau_1}} (\varphi_{\eta_{s_{\tau_1}}} + \varphi(E_{s_{\tau_1}})) \le \sum_{\tau_1 \in N_1} \sum_{s_{\tau_1} \in s_{k,\tau_1}} (\varphi_{\bar\eta_{s_{\tau_1}}} + \varphi(E_{s_{\tau_1}})) \le$$

$$\le \sum_{\tau_2 \in N_2} \sum_{s_{\tau_2} \in s_{k,\tau_2}} (\varphi_{\bar\eta_{s_{\tau_2}}} + \varphi(E_{s_{\tau_2}})) \le \sum_{\tau_2 \in N_2} \sum_{s_{\tau_2} \in s_{k,\tau_2}} \varphi^+(E_{s_{\tau_2}}). \qquad (2.3)$$

В силу произвольности T неравенства (2.3) влекут справедливость (2.2).

Аналогичные рассуждения с учетом того, что $\varphi_{n+1}(e_1^\circ,\ldots,e_{n+1}^\circ)=0$, приводят к неравенству

$$\varphi_{n+1}^+(e_1^\circ,\ldots,e_{n+1}^\circ)\geqslant 0. \qquad (2.4)$$

При доказательстве неравенства, обратного (2.4), поступаем так же, как и в рассмотренных выше случаях, с той лишь разницей, что T теперь выбирается по номерам той же четности, что и $n+1$, и при этом $\eta_{s_\tau}\in T$ таковы, что $\varphi_{\eta_{s_\tau}}$ достаточно близки к $|\varphi|(E_{s_\tau})$. В этом случае положение облегчается в связи с тем, что предпоследнее неравенство в (2.3) переходит в равенство.

Для доказательства второй части теоремы, в силу определения φ^+, φ^-, достаточно установить, что полная вариация является наименьшей положительной мажорантой для $\{\varphi,-\varphi\}$.

Пусть $\varphi'\in\Phi_n^+$ и $\varphi'\geqslant_n\{\varphi,-\varphi\}$. Покажем, что $\varphi'\geqslant_n|\varphi|$. В самом деле, если $\varphi'\not\geqslant_n|\varphi|$, то существуют $k\leqslant n$, $e^\circ\in\Sigma$, $\eta^\circ=\{e_1^\circ,\ldots,e_k^\circ\}\in\Xi(e^\circ)$ такие, что:

$$\varphi_k'(e_1^\circ,\ldots,e_k^\circ)<|\varphi|_k(e_1^\circ,\ldots,e_k^\circ).$$

Следовательно, можно выбрать $\eta_{s_\tau}\in\Xi(E_{s_\tau})$, $s_\tau\in s_{k,\tau}$, $\tau=1,\ldots,k$ так, чтобы неравенство:

$$\varphi_k'(e_1^\circ,\ldots,e_k^\circ)<\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{s_\tau\in s_{k,\tau}}(-1)^{k-\tau}\varphi_{\eta'_{s_\tau}} \qquad (2.5)$$

выполнялось для всех $\eta'_{s_\tau}\geqslant\eta_{s_\tau}$, $s_\tau\in s_{k,\tau}$, $\tau=1,\ldots,k$. Выбрав $\eta'_{s_\tau}=\bar\eta_{s_\tau}$ для всех $s_\tau\in s_{k,\tau}$ так же, как это делалось выше при доказательстве принадлежности $\varphi^+\in\Phi_n^+$, и пользуясь леммой I.I, получим следующее выражение для левой части Δ_1 неравенства (2.5):

$$\Delta_1=\sum_{v=1}^{k}\sum_{s_v\in s_{k,v}}\varphi'_{s_v}[\bar\eta_{s_k}].$$

Правая же часть Δ_2 неравенства (2.5), в силу определения, может быть представлена в виде: $\Delta_2=\sum_{v=k}^{n}\sum_{s_v\in s_{k,v}}|\varphi_{s_v}[\bar\eta_{s_k}]|$.

Но так как $\varphi'\geqslant_n\{\varphi,-\varphi\}$, то $\Delta_1\geqslant\Delta_2$, что противоречит неравенству (2.5).

СЛЕДСТВИЕ 2.I. Упорядоченное векторное пространство Φ_n является K-линеалом.

На самом деле $\langle \Phi_n \leq_n \rangle$ является даже K-пространством, как это вытекает из следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 2.2. Всякое ограниченное сверху подмножество $M \subseteq \Phi_n^+$ имеет точную верхнюю грань.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in \Sigma$, $\eta \in \Xi(e)$, $\eta = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $m \geq n+1$. Положим $\varphi^M(e) = \sup\limits_{M_k, \eta} \{\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{s_k \in S_{m,k}} \varphi_{s_k}^{\alpha_k}[\eta] : \eta \in \Xi(e),$ $\varphi^{\alpha_k} \in M_k, k = 1, \ldots, n\}$, где $\sup$ берется по всем $\eta \in \Xi(e)$, $\eta = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $m \geq n+1$, и по всевозможным конечным наборам $\{\varphi^{\alpha_k}\} = M_k \subseteq M$, $k = 1, \ldots, n$. Ясно, что функция $\varphi^M : \Sigma \to R$, определенная выше, обладает следующими свойствами точной верхней грани для M : $\varphi^M \geq_n M$, и если $\varphi \in \Phi_n^+$ и $\varphi \geq_n M$, то $(\varphi - \varphi^M)_k [\eta] \geq 0$ для всех $e \in \Sigma$, $\eta = \{e_1, \ldots, e_k\} \in \Xi(e)$, $k = 1, \ldots, n$. Для проверки этих свойств годятся те же соображения, которые были использованы при доказательстве последнего утверждения теоремы 2.I.

Принадлежность $\varphi^M \in \Phi_n^+$ вытекает из определения с применением рассуждений, аналогичных тем, что использовались при доказательстве принадлежности $\varphi^+ \in \Phi_n^+$ в теореме 2.I, поскольку и в этом случае речь идет, по существу, о супремумах конечных подмножеств из Φ_n^+, в достаточной мере приближающих φ^M.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В пространстве Φ_n можно ввести норму $\|\cdot\|_{\Phi_n}$, полагая, по определению, $\|\varphi\|_{\Phi_n} = \varphi^+(Q) + \varphi^-(Q)$. Очевидно, что если $\varphi, \varphi' \in \Phi_n^+$ и $\varphi' \geq_n \varphi$, то $\|\varphi'\|_{\Phi_n} \geq \|\varphi\|_{\Phi_n}$. Учитывая теорему 2.2 и очевидную связь между функциями $\|\cdot\|_\Phi$ и $|\cdot|_\Phi$, получаем из вышесказанного, что упорядоченное нормированное пространство $\langle \Phi_n, \leq_n, \|\cdot\|_{\Phi_n} \rangle$ является KB-пространством.

3. Ниже предлагается один способ разложения полиномиальных функционалов из Φ_∞ по функциям меньших классов, с помощью которого уточняется структура пространств Φ_∞.

Пусть $\varphi \in \Phi_m^+$. Зафиксируем $e \in \Sigma$ и рассмотрим обобщенные последовательности

$$\{\varphi_\eta^k\}_{\eta\in\Xi(e)},\ k=1,\dots,m,$$

где

$$\varphi_\eta^k=\sum_{\tau=1}^{k}\varphi^{(\tau)}[\eta].$$

Применяя индукцию по k и неравенства:

$$\varphi_\tau(e_1^\circ,\dots,e_\tau^\circ\cup e_{\tau+1}^\circ)\geq\varphi_\tau(e_1^\circ,\dots,e_\tau^\circ)+\varphi_\tau(e_1^\circ,\dots,e_{\tau+1}^\circ) \quad (3.1)$$

для $\varphi\in\Phi_m^+$ и $\tau=1,\dots,m$, вытекающие из тождества (I.I), можно убедиться в том, что указанные обобщенные последовательности являются монотонно убывающими. Ввиду ограниченности снизу, они имеют пределы. Следовательно, существуют также пределы:

$$\varphi_{(k)}(e)=\lim_{\eta\in\Xi(e)}\varphi^{(k)}[\eta],\ k=1,\dots,m.$$

Отметим некоторые свойства функций $\varphi_{(k)}:\Sigma\to R$:

1. $\varphi=\varphi_{(1)}+\dots+\varphi_{(m)}$ для всех $\varphi\in\Phi_m^+$,
2. $\varphi_{(k)}^\circ=\varphi_{(k)}^1+\varphi_{(k)}^2$, если $\varphi^\circ,\varphi^1,\varphi^2\in\Phi_m^+,\ \varphi^\circ=\varphi^1+\varphi^2$.

Свойство I вытекает из определения $\varphi_{(k)}$ и тождества (3.I), свойство 2 является непосредственным следствием определения $\varphi_{(k)}$, $k=1,\dots,m$.

Более интересные качества введенных функций формулируются в следующих леммах:

ЛЕММА 3.I. Если $\varphi\in\Phi_m^+$, то $\varphi_{(n)}\in\Phi_n^+$, $n=1,\dots,m$.

ЛЕММА 3.2. Если $\varphi\in\Phi_m^+$, $\varphi_{(n,k)}\triangleq(\varphi_{(n)})_{(k)}$, то имеют место равенства:
$\varphi_{(n,k)}=0$ для всех k,n, таких, что $1\leq k<n\leq m$,
$\varphi_{(n,n)}=\varphi_{(n)}$ для всех $n=1,\dots,m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО лемм 3.I, 3.2. Начнем с доказательства леммы 3.I. Допустим, что существуют $e^\circ\in\Sigma$, $\eta^\circ\in\Xi(e^\circ)$, $\eta^\circ=\{e_1^\circ,\dots,e_k^\circ\}$, такие, что для некоторого $n:\ k\leq n\leq m$ имеет место неравенство:

$$(\varphi_{(n)})_{(k)}(e_1^\circ,\dots,e_k^\circ)=\lambda<0. \quad (3.2)$$

Выберем $\eta_{s_\tau}\in\Xi(E_{s_\tau})$, $s_\tau\in s_{k,\tau}$, $\tau=1,\dots,k$, такими, чтобы величина

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{s_r\in s_{k,r}}(-1)^{k-r}\varphi^{(n)}[\eta'_{s_r}] \tag{3.3}$$

была строго меньше некоторого фиксированного $\lambda_1<0$ при всех $\eta'_{s_r}\in\Xi(E_{s_r}),\ \eta'_{s_r}\geq\eta_{s_r},\ s_r\in s_{k,r},\ r=1,\ldots,k.$

Тогда существуют разбиения $\bar\eta_{s_r}\in\Xi(E_{s_r}),\ \bar\eta_{s_r}=\bigvee_{i\in s_r}\eta_i,\ \eta_i\in\Xi(e_i)$, удовлетворяющие соотношениям: $\bar\eta_{s_r}\geq\eta_{s_r},\ s_r\in s_{k,r},\ r=1,\ldots,k$, для которых справедливо неравенство:

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{s_r\in s_{k,r}}(-1)^{k-r}\varphi^{(n)}[\bar\eta_{s_r}]\geq 0. \tag{3.4}$$

Действительно, если в соответствии с определением $\varphi^{(n)}[\bar\eta_{s_r}]$, развернуть каждый элемент $(-1)^{k-r}\varphi^{(n)}[\bar\eta_{s_r}]$ в сумму слагаемых вида $(-1)^{k-r}\varphi_n(\tilde e_1,\ldots,\tilde e_n)$, с последующим распределением всех полученных таким образом слагаемых по группам $A_p,\ p=1,\ldots,k$, где A_p - совокупность вышеуказанных слагаемых, аргументы которых взяты ровно из p различных подмножеств e_i°, $i=1,\ldots,k$, множества e°, то, используя вид $\bar\eta_{s_r}$, $s_r\in s_{k,r}$, $r=1,\ldots,k$, и простые комбинаторные рассуждения, нетрудно убедиться в том, что суммы элементов внутри групп A_p, $p=1,\ldots,k-1$, нулевые. В то же время сумма элементов из группы A_k, в силу $\varphi\in\Phi_m^+$, неотрицательна. Но неравенство (3.4) противоречит (3.3), а значит, и (3.2). Принадлежность $\varphi_{(m)}\in\Phi_m$ доказывается такими же рассуждениями, с учетом того факта, что в этом случае в (3.4) реализуется равенство.

Доказательство леммы 3.2 будем проводить индукцией по размерности m пространства Φ_m, которому принадлежит φ. При $\varphi\in\Phi_1$ нужные утверждения получаются непосредственно из определений. Пусть наша лемма справедлива для всех $m'\leq m$. Если $\varphi\in\Phi_{m+1}$, то в силу свойства I : $\varphi=\varphi_{(1)}+\cdots+\varphi_{(m+1)}$. Используя свойство 2 и лемму 3.I, имеем:

$$\begin{aligned}&\varphi(n)=\varphi(n,n)+\ldots+\varphi(m+1,n),\ n=1,\ldots,m,\\&\varphi(m+1)=\varphi(m+1,m+1).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Применяя индукционное предположение к левым и правым частям (3.5), получаем:

$$\varphi_{(m+1,n)}=0,\ n=1,\dots,m, \qquad (3.6)$$
$$\varphi_{(m+1,m+1)}=\varphi_{(m+1)},$$

чем и завершается индукционный цикл.

Используя разложение $\varphi=\varphi^{+}-\varphi^{-}$, можно определить

$$\varphi_{(n)}(e)=\lim_{\eta\in\Xi(e)}\sum_{s_n\in s_{m,n}}\varphi_{s_n}[\eta],\ n=1,\dots,m$$

для любого элемента $\varphi\in\Phi_m$, при этом имеют место равенства:

$$\varphi_{(n)}=\varphi^{+}_{(n)}-\varphi^{-}_{(n)}.$$

Кроме того, очевидно, что все утверждения лемм 3.I, 3.2 (исключая положительность) переносятся на общий случай $\varphi\in\Phi_m$. Совокупность всех функций $\varphi\in\Phi_{m+1}$, удовлетворяющих соотношениям (3.6), будем обозначать $\Phi_{(m+1)}$.

Суммируя вышесказанное, сформулируем теорему, устанавливающую характер разложения функции $\varphi\in\Phi_{m+1}$ по функциям меньших классов (по степеням):

ТЕОРЕМА 3.I. Если $\varphi\in\Phi_{m+1}$, то существуют $\varphi_n\in\Phi_n$, $n=1,\dots,m+1$ такие, что

а) $\varphi=\varphi_1+\dots+\varphi_{m+1}$,

в) $\varphi_{(n)}=\varphi_n$, $n=1,\dots,m+1$.

Обратно, если $\varphi\in\Phi_{m+1}$ и $\varphi=\varphi_1+\dots+\varphi_{m+1}$, причем

с) $(\varphi_n)_{(n)}=\varphi_n$, $n=1,\dots,m+1$,

то $\varphi_n=\varphi_{(n)}$, $n=1,\dots,m+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы вытекает непосредственно из лемм 3.I, 3.2 и замечания 3.I. Справедливость второй части может быть проверена индукцией по m с использованием равенства $(\varphi_1)_{(m)}=\varphi_{(m)}$, где $\varphi\in\Phi_{m+1}$, $\varphi_1=\varphi-\varphi_{(m+1)}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Φ_m есть прямая сумма попарно-дизъюнктных подпространств $\Phi_{(n)}$, $n=1,\dots,m$.

В заключение рассмотрим один метод пополнения пространства Φ_∞.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Будем говорить, что функция множеств аналитическая, если

(A_1) $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$, где $\varphi_k \in \Phi_{(k)}$, $k=1,2,\ldots$

(A_2) $\sum_k \|\varphi_k\|_{\Phi_k} < \infty$.

Совокупность всех таких функций обозначим через $\mathcal{A}$. Ясно, что Φ_∞ – собственное подпространство векторного пространства $\mathcal{A}$. Введем норму на $\mathcal{A}$, полагая $\|\varphi\|_{\mathcal{A}} = \sum \|\varphi_k\|_{\Phi_k}$, где φ_k, $k=1,2,\ldots$, взяты из (A_1), (A_2).

Корректность такого определения нормы на $\mathcal{A}$ доказывает следующая

ТЕОРЕМА 3.2. Если $\varphi \in \mathcal{A}$, то (A_3) $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)}$ и при этом $\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{(k)}\|_{\mathcal{A}} = 0$. Под $\varphi_k(e)$ понимается предел выражения $\sum_{s_k \in s_{m,k}} \varphi_{s_k}[\eta]$, $\eta \in \Xi(e)$ для функции φ (он существует в силу (A_1), (A_2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi \in \mathcal{A}$, то существуют $\varphi_k \in \Phi_{(k)}$ $k=1,2,\ldots$, такие, что $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ и $\sum \|\varphi_k\|_{\Phi_k} < \infty$.

Сначала мы покажем, что $\varphi_{(n)}$ существуют и равны φ_n для всех $n=1,2,\ldots$, откуда и будет вытекать представление (3).

Итак, пусть $n \geq 1$, $\varepsilon > 0$ – фиксированные числа. В силу (A_2) существует $n_0 \geq n$, такое, что $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_{\Phi_k} < \varepsilon/4$. Рассмотрим произвольный элемент $e \in \Sigma$ и $\eta \in \Xi(e)$ такие, что

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_{(n)}(e) - \varphi^{(n)}[\eta]| < \varepsilon/4, \\
&|\varphi_n(e) - \varphi_n^{(n)}[\eta]| < \varepsilon/4, \\
&|\sum_{k=n+1}^{n_0} \varphi_k^{(n)}[\eta]| < \varepsilon/4.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Тогда

$$
|\varphi_{(n)}(e) - \varphi_n(e)| \leq |\varphi_{(n)}(e) - \varphi^{(n)}[\eta]| + |\varphi_n^{(n)}[\eta] - \varphi_n(e)| +
$$
$$
+ |\sum_{k=n+1}^{n_0} \varphi_k^{(n)}[\eta]| + |\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \varphi_k^{(n)}[\eta]|.
$$

Оценим последнее слагаемое в предыдущем неравенстве:

$$
|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \varphi_k^{(n)}[\eta]| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\varphi_k|(e) \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_{\Phi}. \tag{3.8}
$$

Используя неравенства (3.7), (3.8), получаем окончательно:

$$|\varphi_n(e) - \varphi_{(n)}(e)| < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, и вытекает равенство $\varphi_n = \varphi_{(n)}$. Сходимость $\sum_{k=1}^{n} \varphi_{(k)}$ к φ по норме $\mathcal{A}$ вытекает из того, что $\|\varphi\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{(k)}\|_{\Phi}$. .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Каждый элемент $\varphi \in \mathcal{A}$ является равномерным пределом некоторой последовательности полиномиальных функций множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Ясно, что топология $\langle \Phi_n, \|\cdot\|_{\Phi_n} \rangle$ совпадает с сужением топологии $\langle \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}} \rangle$ на Φ_n, а порядок $\leq_n$ в $\langle \Phi_n, \leq_n \rangle$ совпадает с сужением порядка $\leq_{\mathcal{A}}$ в $\langle \mathcal{A}, \leq_{\mathcal{A}} \rangle$, который определяется конусом $\mathcal{A}_+ = \{\varphi \in \mathcal{A} : \varphi_{(k)} \in \Phi_k^+,\ k = 1, 2, \ldots\}$. Ввиду того, что вопросы пополнения пространства Φ_∞ несколько выходят за рамки данной работы, отметим лишь следующий факт:

ТЕОРЕМА 3.3. Пространство $\langle \mathcal{A}, \leq_{\mathcal{A}}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}} \rangle$ является условно-полной банаховой структурой.

4. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие некоторые понятия, введенные в пунктах 2, 3.

I) Пусть $M = \bigcup_{i=1}^{z} M_i$, $M_i = \{x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i\} \in Q$, $s_{k_i} \in s_{m_i, k_i}$, причем $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Определим функцию

$$\delta_{M_1, \ldots, M_z}^{s_{k_1}, \ldots, s_{k_z}} : \Sigma \to R,$$

полагая

$$\delta_{M_1, \ldots, M_z}^{s_{k_1}, \ldots, s_{k_z}}(e) = \begin{cases} 1, \text{ если } |e \cap M_i| \in s_{k_i}, \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

для каждого элемента $e \in \Sigma$.

Функции вида $\delta_{M_1, \ldots, M_z}^{s_{k_1}, \ldots, s_{k_z}}$ имеют простую комбинаторную сущность, что особенно хорошо видно на следующих примерах:

а) $\delta_M^{s_m}$, $m = |M|$; $\delta_M^{s_m}(e) = \begin{cases} 1, \text{ если } e \cap M \neq \emptyset; \\ 0 - \text{в противном случае}, \end{cases}$

б) δ_M^m, $m=|M|$; $\delta_M^m(e)=\begin{cases} 1, \text{ если } e\cap M=M; \\ 0 \text{ — в противном случае;}\end{cases}$

с) $\delta_M^{s_k}$, $m=|M|$, $k\le m$; $\delta_M^{s_k}(e)=\begin{cases} 1, \text{ если } |e\cap M|\in s_k; \\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.I. Если $|M|=m$, то $\delta_M^{s_k}\in\Phi_m$ для всех $s_k\in s_{m,k}$, $k=1,\ldots,m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\delta_M^{s_k}=\sum_{i\in s_k}\delta_M^{\{i\}}$, то для доказательства нашего предложения достаточно ограничиться функциями вида $\delta_M^k=\delta_M^{\{k\}}$, $k=1,\ldots,m$.

Пусть $e\in\Sigma$, $\eta=\{e_1^\circ,\ldots,e_{m+1}^\circ\}\in\Xi(e)$. Разобьём Σ на классы $\Sigma^i=\{e\in\Sigma:|e\cap M|=i\}$, $i=0,1,\ldots,m$, и рассмотрим $\mathcal{J}_r=\{i:e_i^\circ\in\Sigma^r\}$, $r=0,1,\ldots,m$. Ясно, что $t_0\ge 1$, $\sum_{r=1}^{m}t_r\le m$, где $t_r=|\mathcal{J}_r|$, $r=0,1,\ldots,m$. Поэтому выражение для $(\delta_M^k)_{m+1}(e_1^\circ,\ldots,e_{m+1}^\circ)$, в силу определения δ_M^k, можно разбить на сумму слагаемых Δ_{s_r}, каждое из которых имеет вид:

$$\Delta_{s_r}=(-1)^{m+1-r}\delta_M^k(E_{s_r})+(-1)^{m-r}\sum_{i\in\mathcal{J}_0}\delta_M^k(E_{s_r}\cup e_i^\circ)+\ldots+(-1)^{m+1-r-t_0}\delta_M^k(E_{s_r}\cup\bigcup_{i\in\mathcal{J}_0}e_i^\circ),$$

где $E_{s_r}\in\Sigma^k$, $E_{s_r}=\bigcup_{i\in s_r}e_i^\circ$, причем $s_r\cap\mathcal{J}_0=\varnothing$. Остается лишь заметить, что $\Delta_{s_r}=(-1)^{m+1-r}\left(\sum_{s=0}^{t_0}(-1)^s C_{t_0}^s\right)=0$, откуда, в силу $(\delta_M^k)_{m+1}(e_1^\circ,\ldots,e_{m+1}^\circ)=\sum_{s_r:E_{s_r}\in\Sigma^k}\Delta_{s_r}$, и вытекает принадлежность $\delta_M^k\in\Phi_m$, что и требовалось. Ввиду того, что $\delta_{M_1,\ldots,M_r}^{s_{k_1},\ldots,s_{k_r}}=\prod_{i=1}^{r}\delta_{M_i}^{s_{k_i}}$, получаем:

СЛЕДСТВИЕ 4.I. Если $m_1+\ldots+m_r=m$, то

$$\delta_{M_1,\ldots,M_r}^{s_{k_1},\ldots,s_{k_r}}\in\Phi_m.$$

Вычислим $(\delta_M^k)_{(r)}$, $r=1,\ldots,m$, $\gamma\delta_M^k|$, $\|\delta_M^k\|_\Phi$. Для этого нам потребуются численные значения $(\delta_M^k)_r(e_1^\circ,\ldots,e_r^\circ)$

при $e_1^\circ, \dots, e_r^\circ \in \Sigma^\circ \cup \Sigma^1$. Ясно, что $(\delta_M^k)_r(e_1^\circ, \dots, e_r^\circ) = 0$ для $1 \leqslant r < k$. Далее, используя те же соображения, что и при доказательстве включения $\delta_M^k \in \Phi_m$, получим для $r \geqslant k$:

$$(\delta_M^k)_r(e_1^\circ, \dots, e_r^\circ) = \begin{cases} (-1)^{r-k} C_r^k & \text{при } e_1^\circ, \dots, e_r^\circ \in \Sigma^1, \\ 0 & \text{— в противном случае}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Отсюда

$$(\delta_M^k)_{(r)}(e) = \begin{cases} (-1)^{r-k} C_s^r C_r^k, & \text{если } e \in \Sigma^s, s = r, \dots, m, \\ 0 & \text{— в противном случае} \end{cases} \tag{4.2}$$

при $r \geqslant k$ и $(\delta_M^k)_{(r)} \doteq 0$ при $1 \leqslant r < k$.

Формула (4.2) позволяет уточнить результат предложения 4.1, именно: если $s_t \in s_{m,t}$ таково, что $\sum_{k \in s_t} (-1)^{m-k} C_m^k = 0$, то $\delta_M^{s_t} \in \Phi_{m-1}$. В частности, при $m = 2l+1$ и s_t: $k \in s_t \Longleftrightarrow m-k \in s_t$ имеет место включение: $\delta_M^{s_t} \in \Phi_{m-1}$.

Воспользовавшись формулой (4.1), имеем, в силу тождества $\sum_{r=k}^{s} C_s^r C_r^k = 2^{s-k}$:

$$|\delta_M^k|(e) = \begin{cases} C_s^k 2^{s-k}, & \text{если } e \in \Sigma^s, s = k, k+1, \dots, m, \\ 0 & \text{— в противном случае}; \end{cases}$$

$$\|\delta_M^k\|_\Phi = C_m^k 2^{m-k}.$$

2) В заключение приведем примеры аналитической и неаналитической функции множеств.

а) Пусть $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $M_1 = \{x_1\}$, $M_{n+1} = M_n \cup \{x_{n+1}\}$, $n = 1, 2, \dots$, причем $x_n \neq x_{n'}$ при $n \neq n'$. Рассмотрим функцию $\delta_M : \Sigma \to R$, определенную следующим образом:

$$\delta_M(e) = \begin{cases} 1, & \text{если } |e \cap M_n| = n \text{ для всех } n = 1, 2, \dots; \\ 1 - 2^{-s}, & \text{если } |e \cap M_s| = |e \cap M_{s+1}| = s, \\ 0 & \text{— в остальных случаях}. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $(\delta_M)_{(r)}$, $r \geqslant 1$, существуют при всех $r = 1, 2, \dots$ и при этом

$$(\delta_M)_{(r)}(e) = \begin{cases} 2^{-r}, & \text{если } |e \cap M_r| = r, \\ 0 & \text{— в противном случае}. \end{cases}$$

Кроме того, $\delta_M = \sum_{r=1}^{\infty} (\delta_M)_{(r)}$ и $\sum_{r=1}^{\infty} \|(\delta_M)_{(r)}\| = 1$, откуда и следует, что $\delta_M \in \mathcal{A}$.

в) Пусть $Q=[0,1]$, Σ - совокупность всех подмножеств из Q. Через Σ_0 обозначим кольцо подмножеств из Q, представимых в виде объединения конечного числа попарно-непересекающихся замкнутых подынтервалов из Q. Для каждого $e \in \Sigma$ положим:

$$\mu(e) = \sup\{mes\, e_0 : e_0 \in \Sigma_0, e_0 \subseteq e\}.$$

Ясно, что функция $\mu : \Sigma \to R$, в силу построения, обращается в ноль на всех подмножествах $e \subseteq Q$, имеющих пустую внутренность ($int\, e = \emptyset$). Это обстоятельство и будет использовано для доказательства того, что $\mu \,\overline{\in}\, \mathcal{A}(\Sigma)$.

Установим сначала, что $\mu_{(k)}$ существуют для всех $k=1,2,\ldots$ Для этого достаточно показать, что $\mu_{k+1}[\eta] \geq 0$ для всех $\eta \in \Xi(e)$, $\eta = \{e_1,\ldots,e_{k+1}\}$, $k=1,2,\ldots$, поскольку в этом случае можно использовать те же соображения, что и при доказательстве существования $\varphi(k)$, $k=1,2,\ldots,m$ для $\varphi \in \Phi_m^+$.

Итак, пусть $\eta \in \Xi(e)$, $\eta = \{e_1^\circ,\ldots,e_{k+1}^\circ\}$. В силу определения μ, для каждого элемента

$$E_{s_r} = \bigcup_{i\in s_r} e_i^\circ, \quad s_r \in s_{k+1,r}, \; r=1,\ldots,k+1,$$

существует элемент $e_{s_r} \in \Sigma_0$, такой, что $e_{s_r} \subset \Sigma_{s_r}$ и $mes\, e_{s_r} \geq \mu(E_{s_r}) - \epsilon / C_{k+1}^r$. Для каждого $r=1,\ldots,k+1$, $s_r \in s_{k+1,r}$ определим:

$$e'_{s_{k+1}} = \bigcup_{s_t \in s_{k+1}} e_{s_t}, \quad e'_{s_k} = \bigcup_{s_t \subseteq s_k} e_{s_t}, \quad e'_{s_r} = \bigcap_{s_t \supseteq s_r} e'_{s_t}, \; t=1,\ldots,k-1.$$

Из определения e'_{s_r}, $r=1,\ldots,k+1$, вытекает, что

I) $e'_{s_r} \in \Sigma_0$; 2) $e_{s_r} \subseteq e'_{s_r}$; 3) $mes\, e'_{s_r} \geq \mu(E_{s_r}) - \varepsilon / C_{k+1}^r$.

Используя тождество:

$$mes\Big(\bigcup_{s_k \in s_{k+1,k}} e'_{s_k}\Big) - \sum_{s_k \in s_{k+1,k}} mes(e'_{s_k}) + \sum_{s_k, s_{k'} \in s_{k+1,k}} mes(e'_{s_k} \cap e'_{s_{k'}}) + \ldots + (-1)^{k+1} mes\Big(\bigcap_{s_k \in s_{k+1,k}} e'_{s_k}\Big) = 0,$$

имеем на основании 1) - 3):

$$\mu(E_{s_{k+1}}) \geq mes(e'_{s_{k+1}}) = \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{s_r \in s_{k+1,r}} (-1)^{k+1-r} \mu(E_{s_r}) - C_{k+1} \cdot \varepsilon,$$

где C_{k+1} зависит только от k.

Итак, доказано следующее:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. $\mu_{k+1}(e_1^\circ, \ldots, e_{k+1}^\circ) \geq 0$ для всех $\eta \in \Xi(e)$, $\eta = \{e_1^\circ, \ldots, e_{k+1}^\circ\}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Таким образом, $\mu_{(k+1)}$ существуют для всех $k = 0, 1, \ldots$. Покажем, что $\mu_{(k+1)} = 0$ для всех k.

Зафиксируем $k \geq 1$ и для каждого $s = 0, \ldots, k-1$ через Q_{s+1} обозначим совокупность всех чисел α из Q, рациональнократных $\sqrt[s]{2}$ ($\alpha = r\sqrt[s]{2}$, r_s рациональное). В силу рациональной независимости чисел $\sqrt[s]{2}$, $s = 0, \ldots, k-1$, множества Q_{s+1}, $Q_{s'+1}$ не пересекаются при $s \neq s'$. Полагая $Q_{k+1} = Q \setminus \bigcup_{s=1}^{k} Q_s$, построим разбиение $\eta_0^k = \{Q_1, \ldots, Q_{k+1}\}$ из $\Xi(Q)$.

Используя плотность Q_1 в Q, нетрудно проверить, что $int \bigcup_{s \in s_r} Q_s = \emptyset$ для всех $s_r \in s_{k+1,r}$, $r = 1, \ldots, k$.

Пусть теперь $\eta \in \Xi(Q)$ - произвольное разбиение Q. Рассмотрим $\eta^k \in \Xi(Q)$, $\eta^k = \{e_1, \ldots, e_m\}$, где η^k - произведение разбиений η_0^k и η. В силу определения μ и η^k имеем: $\eta^k \geq \eta$, причем $\mu_k[\eta_{s_k}^k] = 0$ для всех $s_k \in s_{m,k}$. Отсюда вытекает равенство $\mu_{(k)}(Q) = 0$ и в силу монотонности $\mu_{(k)}$ имеем: $\mu_{(k)} = 0$.

Так как $\mu \neq 0$, то $\mu \neq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{(k)}$, следовательно, справедливо:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Функция μ неаналитична.

5. В этом пункте устанавливается связь функций $\varphi \in \Phi_\infty$ с непрерывными (в топологии равномерной сходимости) полиномиальными функционалами над пространством $B = B(Q, \Sigma)$ всех ограниченных измеримых относительно Σ функций, определенных на Q.

Пусть $\varphi \in \Phi_n$, $f \in B$, $\eta \in \Xi(Q)$, $\eta = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $x_i \in e_i$, $i = 1, \ldots, m$. Положим:

$$P_\varphi^\eta(f,\{x_i\})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s_k\in s_{m,k}} f_{s_k}\varphi_k[\eta_{s_k}],$$

где

$$f_{s_k}=\prod_{i\in s_k} f(x_i).$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 5.I. Обобщенная последовательность $\{P_\varphi^\eta(f,\{x_i\})\}_{\eta\in\Xi(Q)}$ имеет предел $P_\varphi(f)$, не зависящий от выбора $\{x_i^\eta\}_{\eta\in\Xi(Q)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разложения $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$, $\varphi^+=\varphi^+_{(1)}+\ldots+\varphi^+_{(n)}$ и ограниченность $f\in B$, можно, не уменьшая общности, считать, что $\varphi\in\Phi^+_{(n)}$, и исследовать сходимость обобщенной последовательности

$$\{q_\varphi^\eta(f,\{x_i\})\}_{\eta\in\Xi(Q)}, \tag{5.I}$$

где

$$q_\varphi^\eta(f,\{x_i\})=\sum_{s_n\in s_{m,n}} f_{s_n}\varphi_n[\eta_{s_n}].$$

Покажем, что последовательность (5.I) фундаментальна. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и положим $M=max\{1,\|f\|\}$. Пусть $\eta^s\in\Xi(Q)$, $\eta^s=\{e_1^s,\ldots,e_{m_s}^s\}$, $s=0,1,2$ и $\eta^1,\eta^2\geq\eta^0$. Полагая $\Delta_{\eta^s,\eta^{s'}}=|q_\varphi^\eta(f,\{x_i^s\})-q_\varphi^\eta(f,\{x_i^{s'}\})|$, имеем:

$$\Delta_{\eta^1,\eta^2}\leq\Delta_{\eta^1,\eta^0}+\Delta_{\eta^2,\eta^0},$$

причем

$$\Delta_{\eta^\delta,\eta^0}\leq\Big|\sum_{s_n\in s^n_{m_\delta,n}}\Delta f^\delta_{s_n}\varphi_n[\eta^\delta_{s_n}]\Big|+\Big|\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s_n\in s^n_{m_\delta,n}} f^\delta_{s_n}\varphi_n[\eta^\delta_{s_n}]\Big|,\ \delta=1,2, \tag{5.2}$$

где i^δ, $i=1,\ldots,m_\delta$, – номер того элемента $e^0_{i^\delta}$, $i=1,\ldots,m_0$, которому принадлежит e_i^δ $(e_i^\delta\subseteq e^0_{i^\delta})$,

$s^k_{m_\delta,n}$, $k=1,\ldots,n$, – совокупность всех подмножеств $s_n\in s_{m_\delta,n}$, $s_n=\{i_1,\ldots,i_n\}$, для которых $\{i_1^\delta,\ldots,i_n^\delta\}\in s_{m_0,k}$,

$$\Delta f^\delta_{s_n}=\prod_{i\in s_n}f(x_i^\delta)-\prod_{i\in s_n}f(x^0_{i^\delta}),\ s_n\in s^n_{m_\delta,n}.$$

Так как $\varphi\in\Phi^+_{(n)}$, то, пользуясь леммой I.I, нетрудно проверить, что

$$\sum_{s_n\in s^k_{m_\delta,n}} \varphi_n[\eta^\delta_{s_n}] \le \sum_{s_k\in s_{m_0,k}} \varphi_k[\eta^0_{s_k}],\ k=1,\dots,n,$$

причем при $k=n$ имеет место равенство. Отсюда, в силу (5.I), имеем:

$$\Delta_{\eta^\delta,\eta^0} \le \omega(f,\eta^\delta,\eta^0)\,\varphi^{(n)}[\eta^0]+M^n(\varphi^{(1)}[\eta^0]+\dots+\varphi^{(n-1)}[\eta^0]),$$

где

$$\omega(f,\eta^\delta,\eta^0)=\sup_{s_n\in s^n_{m_\delta,n}} |\Delta f^\delta_{s_n}|.$$

Далее, так как $\lim_{\eta\in\Xi(Q)} \varphi^{(k)}[\eta]=0$, $k=1,\dots,n-1$, $\lim_{\eta\in\Xi(Q)} \varphi^{(n)}[\eta]<\infty$, f – измерима относительно Σ и ограничена, то можно выбрать $\eta^0\in\Xi(Q)$ так, чтобы для всех η^1, $\eta^2\ge\eta^0$ имели место неравенства

$$\begin{gathered}\omega(f,\eta^1,\eta^0)\,\varphi^{(n)}[\eta^0]+\omega(f,\eta^2,\eta^0)\varphi^{(n)}[\eta^0]<\epsilon/2\\ \varphi^{(k)}[\eta^0]\le\epsilon/2^{k+1}M^n.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Комбинируя неравенства (5.2), (5.3), получаем, что $\Delta_{\eta^1,\eta^2}<\epsilon$ при всех η^1, $\eta^2\in\Xi(Q)$, η^1 , $\eta^2\ge\eta^0$ причем оценка Δ_{η^1,η^2} не зависит от выбора $\{x^1_i\}$, $\{x^2_i\}$, что и требовалось.

Пусть $\varphi\in\Phi_n$. Рассмотрим функционал $p_\varphi: B\to R$, определенный, в соответствии с леммой 5.I., как предел последовательности $\{P^\eta_\varphi(f)\}_{\eta\in\Xi(Q)}$ для каждой функции $f\in B$.

Используя тождество

$$\sum_{r=1}^{n+1}\sum_{s_r\in s_{n+1,r}} (-1)^{n+1-r}\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j\in s_r}\alpha_{ij}\Big)=0$$

и предельный переход, можно показать, что $(p_\varphi)_{n+1}(f_1,\dots$

$$\dots,f_{n+1})=0 \quad \text{для всех } f_1,\dots,f_{n+1}\in B, \tag{5.4}$$

где $(p_\varphi)_k(f_1,\dots,f_k)=\sum_{r=1}^{k}\sum_{s_r\in s_{k,r}}(-1)^{k-r}p_\varphi\big(\sum_{i\in s_r} f_i\big),\ k\in N.$

Далее, в случае $\varphi\in\Phi_{(n)}$ из равенства $\lim_{\eta\in\Xi(Q)} P^\eta_\varphi(f)=\lim_{\eta\in\Xi(Q)} Q^\eta_\varphi(f)$ вытекают следующие свойства p_φ :

$$p_\varphi(\lambda f)=\lambda^n p_\varphi(f) \quad \text{для всех } \lambda\in R\ ,\ f\in B\ , \tag{5.5}$$

$$|p_\varphi(f)|\le\|\varphi\|_\Phi\|f\|^n,\ \|f\|=\sup_{x\in Q} f(x). \tag{5.6}$$

Величину $\|p_\varphi\| = \sup_{\|f\|=1} p_\varphi(f)$, удовлетворяющую в этом случае равенству $\|p_\varphi\| = \|\varphi\|_{\Phi(n)}$, будем называть нормой функционала p_φ , $\varphi \in \Phi_{(n)}$. Разлагая $\varphi \in \Phi_n$ по "степеням" : $\varphi = \varphi_{(1)} + \dots + \varphi_{(n)}$, $\varphi_{(k)} \in \Phi_{(k)}$ и пользуясь тем, что $p_\varphi = p_{\varphi(1)} + \dots + p_{\varphi(n)}$, получаем из (5.6) для $\varphi \in \Phi_n$

$$|p_\varphi(f)| \le \|p_{\varphi(1)}\|\|f\| + \dots + \|p_{\varphi(n)}\|\|f\|^n. \qquad (5.7)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi \in \Phi^+_{(n)}$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом к числам $\prod_{i=1}^n \alpha_{ij}$, $j \in s_r$, $s_r \in s_{k,r}$, $k = 1, \dots, n$, получаем:

$$\sum_{r=1}^{k} \sum_{s_r \in s_{k,r}} (-1)^{k-r} \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j \in s_r} \alpha_{ij}\Big) \ge n! \Big[\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\Big]^{1/k}. \qquad (5.8)$$

Используя предельный переход и неравенство (5.8), имеем:

$(p_\varphi)_k(f_1, \dots, f_k) \ge n!\, p_\varphi\Big(\big[\prod_{i=1}^k f_i\big]^{1/k}\Big)$ для всех $f_1, \dots, f_k \in B^+$, $k = 1, \dots, n$.

Если теперь через $\mathcal{P}_n$ ($\mathcal{P}_{(n)}$) обозначить пространство всех непрерывных (однородных) функционалов из $C(B)$, удовлетворяющих условию (5.4) (условиям (5.4) и (5.5), а через $\mathcal{P}^+_{(n)}$ — конус непрерывных однородных функционалов из $\mathcal{P}_{(n)}(B)$, удовлетворяющих условию: $p_n(f_1, \dots, f_n) \ge 0$ для всех $f_1, \dots, f_n \in B^+$, то высказанные выше утверждения можно сформулировать в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 5.I. Если $\varphi \in \Phi_n$, то $p_\varphi = p_{\varphi(1)} + \dots + p_{\varphi(n)}$, $p_\varphi \in \mathcal{P}_n$, $p_{\varphi(k)} \in \mathcal{P}_{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, причем

$$\|p_{\varphi(k)}\| = \|\varphi_{(k)}\|_\Phi,\ k = 1, \dots, n,$$

$|p_\varphi(f)| \le \|p_{\varphi(1)}\|\|f\| + \dots + \|p_{\varphi(n)}\|\|f\|^n$ для всех $f \in B$.

Кроме того, если $\varphi \in \Phi^+_{(n)}$, то $p_\varphi \in \mathcal{P}^+_{(n)}$ и при этом:

$(p_\varphi)_{(k)}(f_1, \dots, f_k) \ge n!\, p_\varphi\Big(\big[\prod_{i=1}^k f_i\big]^{1/k}\Big)$ для всех $f_1, \dots, f_k \in B^+$, $k = 1, \dots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.I. Нетрудно показать, что непрерывный функционал p принадлежит $\mathcal{P}_n$ ($p \in \mathcal{P}(n)$) тогда и только тогда, когда для любой пары f_1 , $f_2 \in B$ функция p ($f_1 + t f_2$)- полином (однородный полином) степени n относительно скаляра t . При этом для полярной формы $P(f_1, \dots, f_n)$ полинома p

(см. [3], определение 26.2.3.) справедливо тождество

$$P(f_1,\dots,f_n)=(1/n!)\,p_n(f_1,\dots,f_n)\ \forall f_1,\dots,f_n\in B. \quad (5.9)$$

Пусть теперь Ψ_n - пространство всех ограниченных, симметричных, аддитивных по каждому аргументу функций множеств $\psi:\Sigma^n\to R$, Ψ_n^+ - выпуклый конус всех функций $\psi\in\Psi_n$, удовлетворяющих условию: $\psi(e_1,\dots,e_n)\geq 0$ для всех $e_1,\dots,e_n\in\Sigma$. Через $\mathcal{K}_n$ обозначим пространство всех непрерывных симметричных n - линейных функционалов q : $B^n\to R$, а через $\mathcal{K}_n^+$ - выпуклый конус всех функционалов $q\in\mathcal{K}_n$, удовлетворяющих условию: $q(f_1,\dots,f_n)\geq 0$ для всех $f_1,\dots,f_n\in B^+$. Из тождества (5.9), в силу теоремы 26.2.2. из [3], вытекает, что $p_n(\cdot,\dots,\cdot)\in\mathcal{K}_n$, причем диагонализация $1/n!\,p_n(\cdot,\dots,\cdot)$ совпадает с P. Отсюда, рассматривая p_φ, определяемое $\varphi\in\Phi_{(n)}$, и используя теорему 5.I. и тождество

$p_\varphi(\chi_e)=\varphi(e)$ для всех $e\in\Sigma$ (χ_e -характеристическая функция e),имеем:

СЛЕДСТВИЕ 5.I. Если $\varphi\in\Phi_\infty$, то существуют $\psi_k\in\Psi_k$, $k=1,\dots,n$, такие, что $\varphi(e)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(e,\dots,e)$ для всех $e\in\Sigma$, причем если $\varphi\in\Phi_n^+$, то соответствующие $\psi_k\in\Phi_k^+$, $k=1,\dots,n$.

В частности, если $\varphi\in\Phi_{(n)}^+$, то существует $\psi\in\Psi_n^+$, такая что $\varphi(e)=\psi(e,\dots,e)=\varphi_\psi(e)$ для всех $e\in\Sigma$.

Литература

1. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций множеств.-Вкн.:Оптимизация,Новосибирск, 1973, вып. 9(26), с. 157-164.
2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. ГИФМЛ, М., 1961.
3. ХИЛЛЕ Э., ФИЛЛИПС Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИИЛ, М., 1962.

Поступила в ред.-изд. отд.
18.VIII.1973 г.