1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск I4(31)
Численные методы

УДК 512.87:519.12

ИЕРАРХИЧЕСКОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Р.А.Звягина

Введение

Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП) в канонической форме, состоящей в минимизации линейной функции (c, x) на множестве неотрицательных решений системы линейных уравнений

$$Ax = b. \tag{I}$$

Пусть $M=\{1,2,\ldots,m\}$ - множество номеров строк, а $N=\{1,2,\ldots,n\}$ - множество номеров столбцов матрицы $A=A[M,N]$ ранга $m \leq n$. Предположим, что в этой матрице выделены подматрицы (блоки) $A[M_k,N_k]$, определяемые для каждого $k \in P=\{1,2,\ldots,p\}$ множествами M_k и N_k номеров строк и столбцов соответственно, при этом $M_k (k \in P)$ - разбиение множества M. Совокупность пар M_k, $N_k (k \in P)$ назовем блочной структурой матрицы $A[M,N]$, если все её ненулевые элементы заключены в блоках $A[M_k,N_k]$, $k \in P$ (на рис. I, 4 заштрихованные части соответствуют выделенным блокам).

Одним из путей повышения эффективности конечных методов решения задачи ЛП, известных под названиями метода последовательного улучшения допустимого вектора [I], или симплекс-метода [2], является учет специфики блочной структуры матрицы A. Впервые (1957 г.) на некоторый класс такого рода задач ЛП было обращено внимание Г.Ш.Рубинштейном [3], что послужило основой создания алгоритма [4] для решения задач ЛП с матрицей A, в блочной структуре которой $N_p = N$, множества $N_k (1 \leq k < p)$

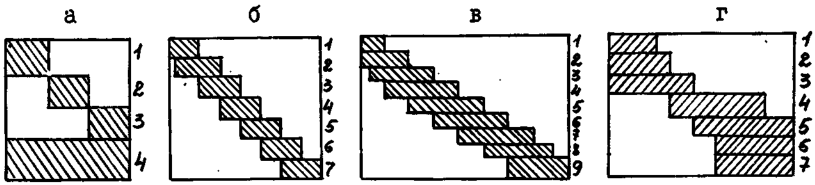

Рис. I.

образуют разбиение множества N, а $M_k=\{k\}$ ($1\leq k<p$), $M_p=\{p,p+1,\ldots,m\}$. Затем, как указано в работе [5], В.А.Булавский (1964 г.) предложил обобщение этого подхода на более широкий класс задач ЛП с матрицей A, в блочной структуре которой семейство $M_k (k\in P)$ является произвольным разбиением множества M, а N_k $(1\leq k<p)$, как и ранее, - некоторое разбиение множества N (рис. I,а). На этой основе разработан и реализован на ЭВМ алгоритм [6].

Этот же частный класс задач с другой точки зрения изучался ранее (1960 г.) Данцигом и Вулфом [7]. Использованный в их работах принцип декомпозиции имеет глубокий экономический смысл, и построенные на его основе алгоритмы допускают обобщение на задачи нелинейного программирования. Что касается задач ЛП, то для них, как показывает опыт, более эффективны алгоритмы, построенные на основе общих методов [I,2].

Дальнейшее обобщение указанного класса задач ЛП состоит в том, что множества N_k $(k\in P)$ в блочной структуре матрицы A рассматриваются как произвольные подмножества множества N. Как показано автором [8], если отношение порядка $\preccurlyeq$ в множестве P удовлетворяет условию

$$\Big(\bigcup_{\sigma\preccurlyeq k} N_\sigma\Big)\cap\Big(\bigcup_{\tau\preccurlyeq t} N_\tau\Big)=\phi \qquad (2)$$

для любых несравнимых элементов k и t из P, то сложность некоторого вычислительного процесса, построенного на основе конечного метода [I], зависит в основном от максимальной длины l цепи*) в упорядоченном множестве P. В связи с этим возникает задача оптимального упорядочения множества P, при

---

*) Цепью называется линейно упорядоченная часть упорядоченного множества P [9].

котором величина l была бы минимальной и выполнялось бы условие (2). В частности, для класса задач, рассмотренного в [3-7], такое упорядочение очевидно: оно определяется соотношениями $k \prec p \ (1 \leq k < p)$, при этом $l = 2$. Разительным примером является задача ЛП с матрицей, схематично изображенной на рис. I,б. При её исследовании в работе [10] неявно использовалось линейное упорядочение множества P, при котором $l = p$, в то время как для оптимального упорядочения $l = [\log_2 p] + 1$.

Условие (2) означает, что матрица A распадается на строки общего вида и блочно-диагональную часть (рис. 4,а), каждый блок этой части, в свою очередь, распадается на строки общего вида и блочно-диагональную часть (и т.д.), при этом число ступеней такой иерархии равно l.

Теорема, доказанная в § I публикуемой статьи, позволяет задачу построения оптимального порядка в множестве P сводить к задаче динамического программирования [II]. В § 2 и 3 рассматриваются модификации в условиях предлагаемого подхода основных трудоёмких процедур каждого шага метода [I], состоящих в следующем:

I) решение системы линейных уравнений

$$y[M] \cdot A[M,I] = c[I] \qquad (I \subset N), \tag{3}$$

где $y[M]$, $c[I]$ - строки, $A[M,I]$ - квадратная неособенная матрица (не нарушая общности, будем считать, что $A[M,M]$ - единичная матрица);

2) проверка неравенства

$$y[M] \cdot A[M,N] \leq c[N]; \tag{4}$$

3) решение системы линейных уравнений

$$A[M,I] \cdot g[I,j'] = A[M,j'] \tag{5}$$

при некотором $j' \in N \setminus I$, если соответствующее неравенство (4) для столбца $A[M,j']$ матрицы $A[M,N]$ не выполнено (здесь $g[I,j']$ - столбец);

4) переход от $A[M,I]$ к матрице $A[M,(I \setminus \{j_0\}) \cup \{j'\}]$, неособенность которой обеспечивается выбором номера $j_0 \in I$, в частности, из условия $g[j_0,j'] \neq 0$.

Сложность последней процедуры зависит от способа решения систем (3), (5). Например, если этот способ состоит в использовании матрицы $A^{-1}[I,M]$, то п. 4 сводится к одному шагу метода пополнения [12] для обращения матрицы. В нашем случае п. 4 состоит в построении разложения матрицы, отличающейся от $A[M,I]$ одним столбцом, в произведение двух матриц блочно - треугольного типа на базе имеющегося разложения матрицы $A[M,I]$. Этот процесс сводится (§ 3) к преобразованию блоков с номерами из некоторой цепи упорядоченного множества P в матрицах, образующих разложение $A[M,I]$. Указанный подход позволяет решение систем (3), (5) также свести (§ 2) к последовательному решению подсистем, отвечающих блокам с номерами из некоторой цепи множества P .

В § 4 рассматривается случай, когда в матрице $A[M,N]$ имеются столбцы, значительно "портящие" её структуру. Комбинация приёма, предложенного в [14], с тем, который рассматривается автором, позволяет, с одной стороны, нейтрализовать влияние этих столбцов на оптимальный порядок, а с другой - учесть их специфику (если она имеется).

§ I. Построение оптимальных иерархических порядков

Отношение порядка $\preccurlyeq$ в множестве P назовем иерархическим, если для любого $k \in P$ сечение

$$L_k = \{\tau \in P : k \preccurlyeq \tau\}$$

упорядоченного множества ($P, \preccurlyeq$) является цепью. Обозначим через P_{min} множество всех минимальных элементов иерархически упорядоченного множества P и положим

$$l = \max_{k \in P_{min}} |L_k|,$$

понимая здесь и далее под $|L|$ число элементов конечного множества L . Разобьем множество P на части, положив

$$U_s = \{k \in P : |L_k| = l - s + 1\}, \quad s = 1, 2, \dots, l. \qquad (I.I)$$

Заметим, что иерархический порядок $\preccurlyeq$ в множестве P однозначно определяет ориентированный граф (P, V) без контуров с множествами P и

$$V = \{(\tau, k) : \tau \preccurlyeq k, \tau \in U_{s-1}, k \in U_s, \ s = 2, 3, \dots, l\}$$

вершин[ж)] и дуг соответственно (считается, что дуга (τ, k)

ж) Терминология, касающаяся графов, соответствует [13].

направлена из k в τ). По этому графу, который мы будем называть графом отношения $\preccurlyeq$, иерархический порядок $\preccurlyeq$ однозначно восстанавливается следующим образом: $\tau \preccurlyeq k$, если $\tau = k$ или существует путь из k в τ на графе (P, V).

При заданной блочной структуре M_k , $N_k (k \in P)$ матрицы $A[M,N]$ рассмотрим неориентированный граф (P, R) с множествами P и

$$R = \{[k, \tau] : N_k \cap N_\tau \neq \phi;\ k \neq \tau;\ k, \tau \in P\} \qquad (1.2)$$

вершин и ребер соответственно (рис. I,2).

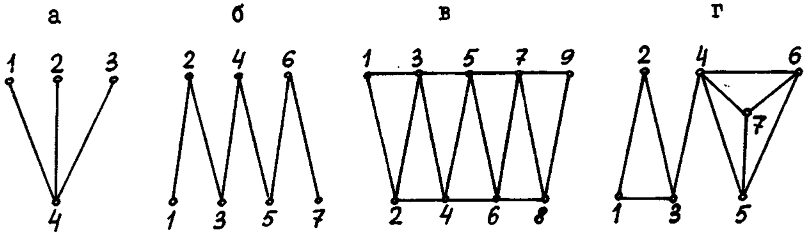

Рис. 2.

Иерархический порядок $\preccurlyeq$ в множестве P будем называть согласованным с R (или допустимым для R), если $k \preccurlyeq \tau$ или $\tau \preccurlyeq k$ для каждой пары $[k, \tau] \in R$. Это значит, что на графе (P, V) отношения $\preccurlyeq$, согласованного с R , есть путь из k в τ или из τ в k для каждой пары $[k, \tau] \in R$ (рис. 2,3).

Рассуждением от противного нетрудно проверить, что согласованный с R порядок $\preccurlyeq$ в множестве P удовлетворяет условию (2), а в предположении $N_k \neq \phi$ для всех $k \in P$ верно обратное.

Ясно, что любой линейный порядок в множестве P согласован с любым множеством (I.2). Пусть $\mathcal{O}(R)$ - множество всех согласованных с R порядков в множестве P . Для любого $O \in \mathcal{O}(R)$ через $l(O)$ обозначим максимальную длину цепи в упорядоченном множестве (P, O). Порядок $\hat{O} \in \mathcal{O}(R)$ будем называть оптимальным, если

$$l(\hat{O}) = \min_{O \in \mathcal{O}(R)} l(O). \qquad (1.3)$$

В качестве примера укажем множество R , при котором граф

(P, R) полный. В этом (и только в этом) случае линейный порядок оптимален в P.

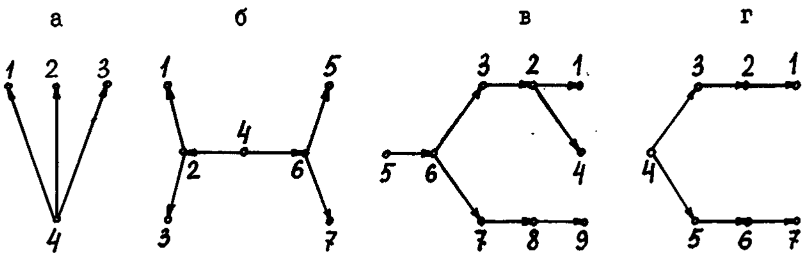

Рис. 3.

Следующие две леммы выявляют некоторые необходимые условия допустимости и оптимальности порядка.

ЛЕММА I. В множестве P при любом допустимом для R порядке $\preccurlyeq$ число максимальных элементов не больше числа компонент связности графа (P, R).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$P_k = \{\tau \in P : \tau \preccurlyeq k\}, \quad k \in U_l. \tag{I.4}$$

Из допустимости порядка $\preccurlyeq$ и определения (I.I) множества U_l следует, что семейство (I.4) образует разбиение множества P и что при любых различных элементах k и t из U_l и любых $\sigma \in P_k$ и $\tau \in P_t$ пара $[\sigma, \tau]$ не принадлежит R. Это и означает, что число компонент связности графа (P, R) не меньше $|U_l|$ - числа максимальных элементов множества (P, $\preccurlyeq$).

Заметим, что при $|U_l| > 1$ система (I) распадается по крайней мере на $|U_l|$ независимых подсистем с матрицами

$$A[\bigcup_{\tau \preccurlyeq k} M_\tau, \bigcup_{\tau \preccurlyeq k} N_\tau], \; k \in U_l.$$

Обозначим через $S_k(R)$ множество всех вершин, смежных с вершиной k на графе (P, R). Для любого $Q \subset P$ положим

$$R(Q) = \{[k, \tau] : k \in Q, \; \tau \in S_k(R)\},$$

и пусть (Q, V_0) - граф линейного порядка в Q, а ($P \setminus Q, \hat{V}$)

- граф оптимального для $R \setminus R(Q)$ порядка $\hat{O}(P \setminus Q)$ в множестве $P \setminus Q$. Положим

$$V' = V_0 \cup \hat{V} \cup \{(\tau, \min Q) : \tau \in (P \setminus Q)_{max}\}, \qquad (I.5)$$

где $(P \setminus Q)_{max}$ - множество всех максимальных элементов оптимально упорядоченного множества $P \setminus Q$. Очевидно, граф (P, V') задает в множестве P порядок O', согласованный с R, и $l(O') = |Q| + l(\hat{O}(P \setminus Q))$. При любом порядке $O \in \mathcal{O}(R)$ положим

$$L = \bigcap_{k \in P_{min}} L_k. \qquad (I.6)$$

ЛЕММА 2. (Принцип оптимальности). Если граф (P, R) связный, то при любом оптимальном для R порядке $\hat{O}$ в множестве P и любом $Q \subset L$ индуцированный порядок в множестве $P \setminus Q$ является оптимальным для $R \setminus R(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу связности графа (P, R) и леммы I множество (I.6), отвечающее порядку $\hat{O}$, непусто. При любом $Q \subset L$ неравенство

$$l(\hat{O}(P \setminus Q)) < \max_{k \in P \setminus Q} (|L_k| - |Q|)$$

противоречит оптимальности порядка $\hat{O}$.

Пусть $\mathcal{P}$ - некоторый непустой класс непустых частей множества P. Из доказанных лемм рассуждением от противного легко получается

ТЕОРЕМА I. Если граф (P, R) связный и при любом оптимальном для R порядке в P множество L содержит некоторое множество класса $\mathcal{P}$, то один из таких порядков определяется множеством (I.5), в котором Q удовлетворяет условию

$$|Q| + l(\hat{O}(P \setminus Q)) = \min_{Q' \in \mathcal{P}} \{|Q'| + l(\hat{O}(P \setminus Q'))\}. \qquad (I.7)$$

Заметим, что условие связности графа (P, R) не обременительно. Если граф (P, R) распадается не менее чем на две компоненты связности, то теорему I следует применять к каждой из этих компонент.

Из теоремы I видно, что задача построения оптимального порядка в множестве P может быть сформулирована как задача динамического программирования. Полагая, например, $\mathcal{P}=\{\{k\}: k\in P\}$, легко проверить, используя лемму I, что для этого класса при связном графе (P , R) выполнены условия теоремы I. Однако получить в этом случае универсальный и достаточно эффективный алгоритм решения поставленной задачи вряд ли возможно. Тем не менее, подбирая подходящим образом класс $\mathcal{P}$ для конкретных множеств R , в некоторых случаях можно сделать выбор наилучшего варианта на каждом шаге динамического процесса Беллмана очевидным или требующим небольшого перебора элементов из множества $\mathcal{P}$. Рассмотрим несколько таких примеров.

I. Если при некотором R множество $Q=\{k\in P: S_k(R)=P\setminus\{k\}\}$ непусто, то есть на графе (P , R) есть хотя бы одна вершина k , с которой смежны все остальные, то для $\mathcal{P}=\{Q\}$ все условия теоремы I выполнены (рис. I,а; 4,а).

2. При некотором целом $q\geq 2$ рассмотрим множество

$$R=\bigcup_{1\leq k<p}\{[k,k+i]: 1\leq i<q,\ i\leq p-k\} \tag{I.8}$$

(рис. 2,б,в) и заметим, что в этом случае величина (I.3), которую мы обозначим через l_p , является функцией лишь числа элементов множества P .

Если $1\leq p\leq q$, то граф (P , R) полный и любой линейный порядок оптимален в P . При $p>q$ положим

$$Q_k=\{k+1,k+2,\ldots,k+q-1\},\ 1\leq k\leq p-q. \tag{I.9}$$

В силу условия $q\geq 2$ граф (P , R) связный, а поскольку $[1,p]\notin R$, то оптимальный порядок в множестве P не может быть линейным. По лемме I граф ($P\setminus L$, $R\setminus R(L)$) распадается не менее чем на две компоненты связности, а из допустимости порядка следует, что $|\tau-\sigma|\geq q$ для любых различных t и k из $(P\setminus L)_{max}$ и любых $\tau\in P_t$ и $\sigma\in P_k$, то есть множество (I.6) содержит хотя бы одно из множеств (I.9) при любом оптимальном упорядочении множества P .

Используя очевидное неубывание l_p, нетрудно показать, что минимум в соотношении (I.7) достигается на элементе (I.9) при $k=[(p-q+2)/2]$ (рис. 3,б,в). Отсюда для l_p следуют рекуррентные формулы:

$$l_p=p\ (1\le p\le q);\ l_p=q-1+l_{\bar k}\ \left(\bar k=\left[\frac{p-q+2}{2}\right]\right),\ p>q. \quad \text{(I.10)}$$

Используя (I.10) и свойства функций $\log_2$ и "целая часть числа", получаем

$$l_p=(q-1)\left(\left[\log_2\frac{p+q-2}{q-1}\right]-1\right)+\left[(p+q-2)\Big/2^{\left[\log_2\frac{p+q-2}{q-1}\right]}\right]+1,$$

откуда $l_p=[\log_2 p]+1$ при $q=2$.

3. Рассмотрим некоторое обобщение класса множеств, определенных в (I.8). Положим

$$R=\bigcup_{1\le k<p}\{[k,k+i]:1\le i<q_k,\ i\le p-k\},$$

где $q_k\ge 2$ - целые числа такие, что

$$q_{k+1}\ge q_k-1,\quad 1\le k<p. \quad \text{(I.II)}$$

Обозначим через $l(k,t)$ максимальную длину цепи множества $P(k,t)=\{k,k+1,\dots,k+t-1\}\subseteq P$, оптимально упорядоченного для $R(k,t)=\{[\sigma,\tau]\in R:\sigma,\tau\in P(k,t)\}$, и заметим, что в силу условия (I.II) при $1\le t\le q_k$ этот порядок линейный. При $t>q_k$ рассмотрим класс множеств

$$Q'_\tau=\{\tau+1,\tau+2,\dots,\tau+q_\tau-1\},\ k\le\tau<k+t-q_\tau.$$

Нетрудно проверить (подобно тому, как сделано в примере 2), что для этого класса выполнены условия теоремы I, откуда следуют рекуррентные формулы:

$$l(k,t)=\begin{cases} t,\ 1\le t\le q_k,\\ \min\limits_{k\le\tau<k+t-q_\tau}\{|Q'_\tau|+\max[l(k,\tau-k);l(\tau+q_\tau,k+t-\tau-q_\tau-1)]\},\\ \qquad t>q_k.\end{cases}$$

Таким образом, при $k=1$ и $t=p$ получаем искомую величину $l(1,p)$ и оптимальный порядок в множестве $P(1,p)=P$, который восстанавливается обычным в динамическом программировании [II] обратным ходом (рис. 3,г).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть в множестве P введен порядок $\preccurlyeq$, оптимальный для некоторого множества R, и пусть S - отношение сравнимости в упорядоченном множестве (P, $\preccurlyeq$). Тогда порядок $\preccurlyeq$ в множестве P является допустимым для любого $R' \subset S$ и оптимальным, если $R \subset R' \subset S$.

§ 2. Решение систем линейных уравнений с матрицами треугольного типа

I. Предположим, что в множестве P введен некоторый порядок $\preccurlyeq$, согласованный с (I.2), и пусть в матрице $A[M,N]$ выделена неособенная квадратная подматрица $A[M,I]$ с индуцированной блочной структурой M_k, $(N_k \cap I)$, $k \in P$.

Введение допустимого порядка $\preccurlyeq$ в множестве P позволяет для матрицы $A[M,N]$ с заданной блочной структурой M_k, N_k $(k \in P)$ определить блочную структуру M_k, $\bar{N}_k$ $(k \in P)$, где $\bar{N}_k = \bigcup\limits_{\tau \preccurlyeq k} N_\tau$ (рис. I,б; 4,а), обладающую следующими свойствами:

I) $\bar{N}_k \cap \bar{N}_t = \phi$ для любых несравнимых элементов k и t из P. Это свойство совпадает с (2).

2) Для любого множества $I \subset N$, при котором матрица $A[M,I]$ квадратная и неособенная, существует такое разбиение I_k $(k \in P)$, что

$$I_k \subset \bar{N}_k, \quad |I_k| = |M_k|, \quad k \in P,$$

и, кроме того, это разбиение однозначно определяет разложение

$$A[M,I] = B[M,I] \cdot \lambda[I,I], \tag{2.I}$$

в котором $B[M,I]$ - матрица треугольного типа с блочной структурой M_k, $(\bigcup\limits_{\tau \preccurlyeq k} I_\tau)$, $k \in P$, и неособенными подматрицами $B[M_k, I_k]$ $(k \in P)$, а

$$\lambda[I,I] = E[I,I] + \Lambda[I,I]. \tag{2.2}$$

Здесь $E[I,I]$ - единичная матрица, $\Lambda[I,I]$ - матрица треугольного типа с блочной структурой I_k, $(\bigcup\limits_{\tau \succ k} I_\tau) \cap \bar{N}_k$ $(k \in P)$.

Матрицы $\Lambda[I,I]$ и $B[M,I]$ в разложении (2.1) будем называть согласованными с разбиением I_k $(k\in P)$ множества I, а само разбиение – базисным относительно $A[M,I]$.

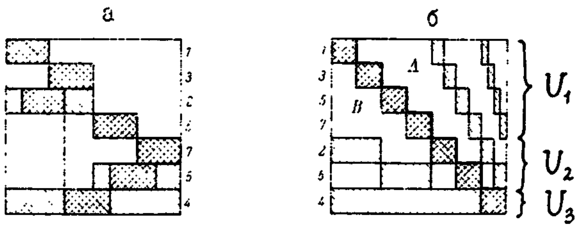

Рис. 4

Существование базисного разбиения следует из того, что для множества $I=M$ с разбиением $I_k=M_k$ ($k\in P$) верны равенства

$$A[M,I]=B[M,I]=\lambda[I,I]=E[M,M],$$

а также из существования базисного относительно $A[M,(I\setminus\{j_0\})\cup\{j'\}]$ разбиения $\bar{I}_k$ ($k\in P$) множества $(I\setminus\{j_0\})\cup\{j'\}$ при условии существования базисного разбиения I_k $(k\in P)$ множества I. Последнее доказано в § 3.

Единственность разложения (2.1) при каждом базисном разбиении I_k $(k\in P)$ получается индуктивным путем из соотношения

$$B[M,I]\cdot\lambda[I,I]=B'[M,I]\cdot\lambda'[I,I] \qquad (2.3)$$

и предположения, что для некоторого $Q\subset P$, в частности, для $Q=\phi$, справедливы равенства

$$B[M,I_k]=B'[M,I_k],\ \lambda[I_k,I]=\lambda'[I_k,I],\ \ k\in Q. \qquad (2.4)$$

При этом для всех $k\in Q$ множество P_k, определенное в (1.4), содержится в Q. Полагая τ равным одному из минимальных элементов множества $P\setminus Q$ (при $Q\neq P$) и умножая (2.3) сначала слева на $E[M_\tau,M]$, а затем справа $E[I,I_\tau]$, легко показать, что равенства (2.4) справедливы и при $k=\tau$. Следовательно, Q можно заменить на $Q\cup\{\tau\}$.

Как будет показано ниже, для решения систем (3), (5) и для перехода от $A[M,I]$ к матрице, отличающейся одним столбцом, на каждом шаге достаточно иметь вычисленными лишь блоки $B[M_k,I_k],\ k\in P,$ и матрицу $\Lambda[I,I]$. При этом нетрудно под-считать, что общее число ненулевых элементов в блоках $\Lambda[I_k, I]$, $k \in U_s$, для любого $s = 1, 2, \dots, \ell$ не больше

$$\mu_s = \left(\max_{k \in U_s} |I_k|\right) \times \left(\left|I \cap \left(\bigcup_{k \in U_s} \bar{N}_k\right)\right| - \sum_{1 \le i \le s} \sum_{i \in U_i} |I_\tau|\right), \qquad (2.5)$$

поскольку множества $\bar{N}_k$ $(k \in U_s)$ попарно не пересекаются (рис. 4).

2. Воспользовавшись разложением (2.I), рассмотрим решение системы (3) и проверку неравенства (4). Не нарушая общности, будем считать что семейство N_τ $(\tau \in P_{min})$ образует разбиение множества N, и заметим, что в силу блочной структуры матрицы $A[M, N]$ для каждого $j \in N_{k'}$ $(k' \in P_{min})$ в столбце $A[M, j]$ отличны от нуля разве лишь части $A[M_k, j]$, $k \succcurlyeq k'$.

Пусть для некоторого $k \in P$ строки $y[M_\tau]$, $\tau \succ k$, вычислены. Положим

$$c_k[N] = c[N] - \sum_{\tau \succ k} y[M_\tau] \cdot A[M_\tau, N]. \qquad (2.6)$$

Здесь и далее предполагается, что результат суммирования по пустому множеству равен нулю. Учитывая блочную структуру матрицы $B[M, I]$, найдем строку $y[M_k]$ из системы

$$y[M_k] \cdot B[M_k, I_k] = z_k[I_k], \qquad (2.7)$$

где строка $z_k[I]$, определенная по формуле

$$z_k[I] = c[I] \cdot \lambda^{-1}[I, I] - \sum_{\tau \succ k} y[M_\tau] \cdot B[M_\tau, I] = c_k[I] \cdot \lambda^{-1}[I, I],$$

очевидно, является решением системы $z_k[I] \cdot \lambda[I, I] = c_k[I]$. Учитывая (2.2) и блочную структуру матрицы $\Lambda[I, I]$, строку $z_k[I_k]$ можно вычислить по рекуррентным формулам

$$z_k[I_t] = c_k[I_t] - \sum_{\sigma \prec t} z_k[I_\sigma] \cdot \Lambda[I_\sigma, I_t], \quad t \preccurlyeq k,$$

начиная с минимальных номеров множества P_k.

Для любого $k' \in P_{min}$ решение систем (2.7) следует проводить в порядке убывания номера k в цепи $L_{k'}$, начиная с $k = \max L_{k'}$. Если при $k = k'$ для некоторого $j' \in N_{k'}$ имеем $c_{k'}[j'] - y[M_{k'}] \cdot A[M_{k'}, j'] < 0$, то процесс вычисления строки $y[M]$ заканчивается, и следует перейти к решению системы (5).

В противном случае (при $P \neq L_{k'}$) через t обозначим минимальный из тех элементов $\tau \succ k'$, для которых $\{\sigma \in P \setminus L_{k'} : \sigma \prec \tau\} \neq \emptyset$, и продолжим процесс с любым номером $k \notin L_{k'}$, за которым в P непосредственно следует t. При этом векторы $y[M_\sigma]$, $k' \preccurlyeq \sigma \prec t$, можно "забыть" и вместо упорядоченного множества P при проверке неравенства (4) рассмотреть его упорядоченное подмножество $P \setminus \{\sigma : k' \preccurlyeq \sigma \prec t\}$.

3. Отношение порядка $\preccurlyeq$ в множестве P расширим на множество $P_0 = P \cup \{0\}$, считая $k \prec 0$ для любого $k \in P$, и перейдем к решению системы (5). Прежде всего найдем решение системы

$$B[M,I] \cdot \lambda[I,j'] = A[M,j'] \quad (j' \in N_{k'}). \tag{2.8}$$

Предположим, что для некоторого $k \succcurlyeq k'$ столбцы $\lambda[I_\tau, j']$, $\tau \in P \setminus L_k$, вычислены, причем отличны от нуля разве лишь $\lambda[I_\tau, j']$, $k' \preccurlyeq \tau \prec k$. Столбец $\lambda[I_k, j']$ найдем из системы

$$B[M_k, I_k] \cdot \lambda[I_k, j'] = A_k[M_k, j'], \tag{2.9}$$

где столбец $A_k[M, j']$ определен по формуле

$$A_k[M,j'] = A[M,j'] - \sum_{\tau \in P \setminus L_k} B[M, I_\tau] \cdot \lambda[I_\tau, j'] \tag{2.10}$$

и имеет отличные от нуля части $A_k[M_\sigma, j']$ разве лишь для $\sigma \succcurlyeq k$. Используя (2.10) и (2.1), получаем

$$A_k[M_k, j'] = A[M_k, j'] - A[M_k, I] \cdot g_k[I, j'].$$

Здесь столбец $g_k[I, j']$ является решением системы

$$\lambda[I,I] \cdot g_k[I,j'] = \sum_{k' \preccurlyeq \tau \prec k} E[I, I_\tau] \cdot \lambda[I_\tau, j'], \tag{2.11}$$

причем отличны от нуля в нем разве лишь части $g_k[I_t, j']$, $t \prec k$, которые можно вычислить по рекуррентным формулам:

$$g_k[I_t, j'] = \sum_{k' \preccurlyeq \tau \prec k} E[I, I_\tau] \cdot \lambda[I_\tau, j'] - \sum_{t \prec \sigma \prec k} \Lambda[I_t, I_\sigma] \cdot g_k[I_\sigma, j'], \quad t \prec k,$$

начиная с максимальных номеров множества $P_k \setminus \{k\}$.

Решение систем (2.9) следует проводить в порядке возрастания номера k в цепи $L_{k'}$, начиная с $k = k'$. Искомый столбец

$g[I,j']$, как следует из (2.I) и (2.8), является решением системы (2.II) при $k=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для решения систем (2.7) и (2.9) с матрицей $B[M_k,I_k]$ можно использовать, например, обратную матрицу $\bar{B}[I_k,M_k]$.

§ 3. Разложение матрицы с блочной структурой в произведение матриц блочно-треугольного типа

I. Предположим, что для некоторого множества $I\subset M$, при котором матрица $A[M,I]$ квадратная и неособенная, имеется базисное разбиение $I_k\ (k\in P)$ и согласованное с ним разложение (2.I). Пусть для некоторого $j_0\in I_{k_0}\ (k_0\in P)$ матрица $A[M,J\setminus\{j_0\}]$, где $J=I\cup\{j'\}$, также неособенная. Отсюда, в частности, следует, что

$$g[j_0,j']=\lambda[j_0,j']-\Lambda[j_0,I]\cdot g[I,j']\neq 0. \qquad (3.I)$$

Прежде чем переходить к построению разложения

$$A[M,J\setminus\{j_0\}]=\bar{B}[M,J\setminus\{j_0\}]\cdot\bar{\lambda}[J\setminus\{j_0\},J\setminus\{j_0\}], \qquad (3.2)$$

введем некоторые определения и обозначения.

Считая, как и ранее, $P_0=P\cup\{0\}$, для любого $k\in P$ под $(k+)$ будем понимать элемент, непосредственно следующий за k в множестве P_0 .

Разбиение $J_k\ (k\in P_0)$ множества $J=I\cup\{j'\}$ будем называть базисным относительно прямоугольной матрицы $A[M,J]$, если её подматрица $A[M,J\setminus J_0]$ квадратная и неособенная, а разбиение $J_k\ (k\in P)$ множества $J\setminus J_0$ является базисным относительно этой квадратной подматрицы. Если при этом матрицы $\Lambda[J\setminus J_0,J\setminus J_0]$ и $B[M,J\setminus J_0]$ согласованы с разбиением $J_k\ (k\in P)$ множества $J\setminus J_0$, то матрицы $\Lambda[J,J]$ и $B[M,J]$, где столбец $\Lambda[J\setminus J_0,J_0]$ является решением системы

$$B[M,J\setminus J_0]\cdot\Lambda[J\setminus J_0,J_0]=A[M,J_0],$$

а строка $\Lambda[J_0,J]$ и столбец $B[M,J_0]$ нулевые, будем называть согласованными с разбиением $J_k\ (k\in P_0)$ множества J . Ясно, что произведение матриц $B[M,J]$ и

$$\lambda[J,J]=E[J,J]+\Lambda[J,J] \qquad (3.3)$$

дает матрицу $A[M,J]$.

Процесс построения разложения (3.2) состоит в нахождении конечной последовательности базисных разбиений множества J, начиная с $J_k = I_k \ (k \in P)$, $J_0 = \{j'\}$ и кончая разбиением $\bar{J}_k \ (k \in P_0)$, в котором $\bar{J}_0 = \{j_0\}$. При этом последнее разбиение должно отличаться от исходного разве лишь множествами $\bar{J}_k$, $k \geq k_0$. Покажем, что такую последовательность можно получить попарными перестановками элементов в множествах J_k, $k \geq k_0$.

Перестановку номеров $j_\alpha \in J_\alpha$ и $j_\omega \in J_\omega \ (\alpha \prec \omega \leq 0)$ в базисном относительно $A[M,J]$ разбиении $J_k \ (k \in P_0)$ множества J будем называть допустимой, если разбиение

$$J_k,\ k \in P_0 \setminus \{\alpha, \omega\};\ (J_\alpha \setminus \{j_\alpha\}) \cup \{j_\omega\},\ (J_\omega \setminus \{j_\omega\}) \cup \{j_\alpha\} \tag{3.4}$$

множества J также является базисным относительно $A[M,J]$. Как будет показано ниже, признак базисности разбиения (3.4) зависит от величин

$$\Delta_\alpha^\omega(k) = 1 + v_k[J_k] \cdot \{\lambda[J_k, j_\omega] - \lambda[J_k, j_\alpha]\},\ \alpha \leq k < \rho, \tag{3.5}$$

где $\rho = \min\{\omega, \max L_\alpha\}$, а строки $v_k[J_k]$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$v_\alpha[J] = E[j_\alpha, J] - E[j_\omega, J],$$

$$v_{(k+)}[J] = \frac{1}{\Delta_\alpha^\omega(k)}\{v_k[J] - v_k[J_k] \cdot \lambda[J_k, J]\},\ \alpha \leq k < \rho. \tag{3.6}$$

Отметим, что $\Delta_\alpha^\omega(\alpha) = \Lambda[j_\alpha, j_\omega]$ и что в силу (2.2) и блочной структуры матрицы $\Lambda[J,J]$ векторы $v_k[J]$ при любом $k \geq \alpha$ имеют отличные от нуля части $v_k[J_\tau \cap N_k]$ разве лишь для $\tau \geq k$.

ЛЕММА 3. (Характеристика допустимости перестановки). Для того чтобы разбиение (3.4) было базисным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_\alpha^\omega(k) \neq 0,\ \alpha \leq k \prec \omega. \tag{3.7}$$

<u>Достаточность.</u> Если $\omega = 0$, то условие (3.7) эквивалентно условию

$$\Delta_\alpha^\omega(k) \neq 0,\ \alpha \leq k < \rho. \tag{3.8}$$

Покажем, что в этом случае разбиение $J_k \ (k \in P)$ множества J является базисным относительно матрицы

$$A'[M,J]=A[M,J]+\{A[M,j_\omega]-A[M,j_\alpha]\}\cdot v_\alpha[J]. \qquad (3.9)$$

Действительно, в силу условия (3.8) можно построить матрицу $\Lambda'[J,J]$, полагая для каждого $k\in P_0$

$$\Lambda'[J_k,J]=\Lambda[J_k,J]+\{\lambda[J_k,j_\omega]-\lambda[J_k,j_\alpha]\}u_k[J], \qquad (3.10)$$

где строки $u_k[J]$ вычисляются по формулам:

$$u_k[J]=\begin{cases} v_\alpha[J], & k\prec\alpha,\\ v_{(k+)}[J], & \alpha\preccurlyeq k\preccurlyeq\rho,\\ 0, & k\in P_0\setminus(P_\alpha\cup\{\tau:\alpha\preccurlyeq\tau\preccurlyeq\rho\}),\end{cases} \qquad (3.11)$$

и при любом $k\succcurlyeq\alpha$ имеют отличные от нуля части $u_k[J_\tau\cap\bar{N}_k]$ разве лишь для $\tau\succ k$. Отсюда ясно, что матрицы $\Lambda[J,J]$ и $\Lambda'[J,J]$ имеют одну и ту же блочную структуру. Нетрудно проверить, что в результате умножения матрицы

$$B'[M,J]=B[M,J]+\sum_{\alpha\preccurlyeq k\preccurlyeq\rho}\{A_k[M,j_\omega]-$$
$$-A_k[M,j_\alpha]\}\cdot v_k[J_k]\cdot E[J_k,J] \qquad (3.12)$$

справа на матрицу (3.3) с заменой $\Lambda[J,J]$ на $\Lambda'[J,J]$ получим матрицу (3.9). Здесь столбцы $A_k[M,j]$, $\alpha\preccurlyeq k\prec\rho$, для любого $j\in J$ определены по формуле (2.10) с заменой j' на j. Отсюда ясно, что матрицы $B[M,J]$ и (3.12) имеют одну и ту же блочную структуру. Далее, для каждой из матриц

$$B'[M_k,J_k]=B[M_k,J_k]+\{A_k[M_k,j_\omega]-A_k[M_k,j_\alpha]\}\cdot v_k[J_k],\ \alpha\preccurlyeq k\preccurlyeq\rho, \qquad (3.13)$$

в силу условия (3.8) существует обратная [12]

$$(B'[M_k,J_k])^{-1}=B^{-1}[J_k,M_k]-\frac{1}{\Delta_\alpha^\omega(k)}\{\lambda[J_k,j_\omega]-$$
$$-\lambda[J_k,j_\alpha]\}\cdot v_k[J_k]\cdot B^{-1}[J_k,M_k],\ \alpha\preccurlyeq k\preccurlyeq\rho. \qquad (3.14)$$

Следовательно, блоки (3.13) являются неособенными матрицами, а для номеров $k\in P\setminus\{\tau:\alpha\preccurlyeq\tau\preccurlyeq\rho\}$ блоки $B'[M_k,J_k]$ совпадают с соответствующими (неособенными) подматрицами матрицы $B[M,J]$. Последнее означает также, что матрица $A'[M,J\setminus J_0]$ является неособенной.

Если $\omega \prec 0$, то матрица $A'[M, J \setminus J_0]$ совпадает с $A[M, J \setminus J_0]$ с точностью до порядка столбцов и, следовательно, является неособенной. Из условия (3.7) следует существование векторов $v_k[J]$ для $\alpha \preccurlyeq k \preccurlyeq \omega$, а вместе с (3.12 - 3.14) это влечет неособенность матриц $B'[M_k, J_k]$, $k \in P \setminus \{\omega\}$. Далее, поскольку

$$\det B'[M, J \setminus J_0] = -\frac{1}{\prod_{\alpha \prec k \prec \omega} \Delta_\alpha^\omega(k)} \det B[M, J \setminus J_0],$$

то и матрица $B'[M, J \setminus J_0]$ неособенная. Поэтому блок (3.13) при $k = \omega$ также является неособенной матрицей. Существование же и единственность обратной матрицы (3.14) при $k = \omega$ влечет $\Delta_\alpha^\omega(\omega) \neq 0$, откуда следует (3.8) и существование матрицы $\Lambda'[J, J]$.

Таким образом, разбиение J_k $(k \in P)$ множества J является базисным относительно матрицы (3.9), отличающейся от $A[M, J]$ лишь порядком столбцов с номерами j_α и j_ω. Если теперь в разбиении J_k $(k \in P_0)$ номера j_α и j_ω поменять местами, то матрицы, полученные по формулам (3.10), (3.12), будут согласованы с этим разбиением, базисным относительно $A[M, J]$.

<u>Необходимость.</u> Учитывая единственность и вид матрицы (3.12), согласованной с разбиением (3.4), из базисности последнего и из (3.13), (3.14) получаем (3.7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из формул (3.6), (3.10 - 3.12), в связи с перестановкой номеров j_α и j_ω в разбиении $J_k (k \in P_0)$ множества J в матрицах $B[M, J]$ и $\Lambda[J, J]$ следует преобразовывать разве лишь блоки $B[M_k, J_k]$ и $\Lambda[J_k, J]$ для $\alpha \preccurlyeq k \preccurlyeq \rho$ (для $k \prec \alpha$, как следует из определения (3.6) вектора $v_\alpha[J]$, блок (3.10) отличается от блока $\Lambda[J_k, J]$ разве лишь порядком столбцов с номерами j_α и j_ω).

ТЕОРЕМА 2. Если $\Lambda[j_\alpha, j_\omega] \neq 0$ для некоторых $j_\alpha \in J_\alpha$ и $j_\omega \in J_\omega$ $(\alpha \prec \omega \preccurlyeq 0)$, то существуют такие последовательности

$$\alpha = \tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_r = \omega \quad (1 < r \leq |L_\alpha| + 1), \tag{3.15}$$

$$j_i \in J_{\tau_i}, \; i = 1, 2, \ldots, r \quad (j_1 = j_\alpha, \; j_r = j_\omega), \tag{3.16}$$

что разбиение

$$\bar{J}_k^{(1)} = \begin{cases} J_k, \ k \in P_0 \setminus \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\}, \\ (J_\alpha \setminus \{j_\alpha\}) \cup \{j_\omega\}, \quad k = \alpha, \\ (J_{\tau_i} \setminus \{j_i\}) \cup \{j_{i-1}\}, \ k = \tau_i, \ i = 2, 3, \ldots, r, \end{cases} \qquad (3.17)$$

множества J является базисным относительно $A[M, J]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого $s \geq 1$ определены такие последовательности

$$\alpha = \tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_s \prec \omega, \ j_i \in J_{\tau_i} \ (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad (3.18)$$

что $\Lambda[j_s, j_\omega] \neq 0$. При $s = 1$ это предположение, очевидно, справедливо. Предположим также, что если существует базисное разбиение $J_k^{(s)}$ ($k \in P_0$) множества J, отличающееся от исходного разбиения J_k ($k \in P$) разве лишь множествами $J_k^{(s)}$, $k \succeq \tau_s$, причем $J_{\tau_s}^{(s)} = (J_{\tau_s} \setminus \{j_s\}) \cup \{j_\omega\}$, то в этом разбиении допустимы попарные перестановки номеров $j_{\sigma(s)}$, j_ω ($\sigma = s-1, \ldots, 2, 1$). Другими словами, в разбиении $J_k^{(s)}$ ($k \in P_0$) допустима циклическая перестановка

$$\circlearrowleft \rightarrow j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \cdots \rightarrow j_{s-1} \rightarrow j_\omega \rightarrow . \qquad (3.19)$$

Если в исходном разбиении J_k ($k \in P_0$) перестановка номеров j_s и j_ω допустима (во всяком случае при $(\tau_s +) = \omega$ это действительно так, в силу условия $\Lambda[j_s, j_\omega] \neq 0$ и леммы 3), то (3.4) с заменой α на τ_s и j_α на j_s дает разбиение $J_k^{(s)}$ ($k \in P_0$), а циклическая перестановка (3.19) в нем дает искомое разбиение (3.17) при $r = s + 1$.

Если же перестановка номеров j_s и j_ω в исходном разбиении J_k ($k \in P_0$) недопустима, то вместе с условием $\Lambda[j_s, j_\omega] \neq 0$ и соотношением $\Delta_{\tau_s}^{\omega}(\tau_s) = \Lambda[j_s, j_\omega]$ это означает, что среди элементов $k \succ \tau_s$ найдется такой элемент $\tau_{s+1} \prec \omega$, что $\Delta_{\tau_s}^{\omega}(\tau_{s+1}) = 0$, но

$$\Delta_{\tau_s}^{\omega}(k) \neq 0, \ \tau_s \preceq k \prec \tau_{s+1}. \qquad (3.20)$$

Отметим, что величины (3.20) зависят от j_ω, но не от ω. Из (3.5) при $k = \tau_{s+1}$ (с заменой α на τ_s и j_α на j_s)

следует, что найдется такой номер $j_{s+1} \in J_{\tau_{s+1}}$, при котором $\Lambda[j_{s+1}, j_\omega] \neq 0$, поскольку в противном случае $\Delta^{\omega}_{\tau_s}(\tau_{s+1}) = 1$. Отсюда ясно, что в (3.18) номер s можно увеличить на I, так как если существует разбиение $J_k^{(s+1)}$ ($k \in P_0$), определенное аналогично $J_k^{(s)}$ ($k \in P_0$) с заменой s на $s+1$, то в силу (3.20), леммы 3 и индуктивного предположения в нём допустимы попарные перестановки j_σ, j_ω ($\sigma = s, s-1, \ldots, 2, 1$), т.е. допустима циклическая перестановка (3.19) с заменой s на $s+1$.

Таким образом, в силу строгой монотонности последовательности $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots$ и конечности множества L_α описанный процесс оборвется через $r \le |L_\alpha| + 1$ шагов.

2. Приведём теперь матрицы $\Lambda[J,J]$ и $B[M,J]$ в соответствие с разбиением (3.17). Предположим сначала, что последовательности (3.15), (3.16) определены и для некоторого $s \le r$ матрицы $\Lambda^{(s)}[J,J]$ и $B^{(s)}[M,J]$ согласованы с разбиением

$$J_k^{(s)} = \begin{cases} J_k, & k \in P_0 \setminus \{\tau_s, \tau_{s+1}, \ldots, \tau_r\}, \\ (J_{\tau_s} \setminus \{j_s\}) \cup \{j_\omega\}, & k = \tau_s, \\ (J_{\tau_i} \setminus \{j_i\}) \cup \{j_{i-1}\}, & k = \tau_i, \ i = s+1, s+2, \ldots, r, \end{cases} \tag{3.21}$$

множества J, базисным относительно $A[M,J]$. При $s = r$ с разбиением (3.21), совпадающим с J_k ($k \in P_0$), согласованы сами матрицы $\Lambda[J,J]$ и $B[M,J]$, а при $s = 1$ разбиение (3.21) совпадает с (3.17), и матрицы $\Lambda^{(1)}[J,J]$ и $B^{(1)}[M,J]$, согласованные с ним, - искомые.

При $s > 1$ в (3.21) требуется уменьшить номер s на I, т.е. в разбиении (3.21) переставить номера $j_{s-1} \in J^{(s)}_{\tau_{s-1}}$ и $j_\omega \in J^{(s)}_{\tau_s}$, и привести матрицы $\Lambda^{(s)}[J,J]$ и $B^{(s)}[M,J]$ в соответствие с этим новым разбиением. Для этого достаточно в формулы (3.4 - 3.14) вместо матриц $\Lambda[J,J]$, $B[M,J]$, разбиения J_k ($k \in P_0$) и номеров α, j_α, ω подставить матрицы $\Lambda^{(s)}[J,J]$, $B^{(s)}[M,J]$, разбиение (3.21) и номера τ_{s-1}, j_{s-1}, τ_s соответственно и в (3.21) номер s заменить на $s-1$. Полученные по формулам (3.12) и (3.10) матрицы согласованы с разбиением $J_k^{(s-1)}$ ($k \in P_0$), базисным относительно

$A[M,J]$, следовательно, их можно принять в качестве матриц $\Lambda^{(s-1)}[J,J]$ и $B^{(s-1)}[M,J]$. Полагая $s=r, r-1, \dots, 2$, получаем разбиение (3.17) и согласованные с ним матрицы $\Lambda^{(1)}[J,J]$ и $B^{(1)}[J,J]$.

Описанные преобразования можно проводить в иной последовательности, а именно: сначала для каждого $s = 2,3,\dots,r$ делаются преобразования блоков $B[M_k,J_k]$, $\tau_{s-1} \leq k < \tau_s$, и блоков $\Lambda[J_k,J]$, $k<\tau_s$, которые соответствовали бы перестановке номеров $j_{s-1} \in J_{\tau_{s-1}}$ и $j_\omega \in J_\omega$ в исходном разбиении J_k ($k \in P_0$) множества J (фактически такая перестановка не делается). Полученные блоки подставляются в матрицы $B[M,J]$ и $\Lambda[J,J]$ вместо соответствующих блоков. Затем для номеров $\tau_s < 0$ ($s = 2,3,\dots,r$) блоки $B[M_{\tau_s}, J_{\tau_s}]$ и $\Lambda[J_{\tau_s}, J]$ еще раз преобразуются соответственно по формулам (3.13) и (3.10) с заменой (α, j_α, ω, j_ω) на ($\tau_{s-1}, j_{s-1}, \tau_s, j_s$). Если теперь в исходном разбиении J_k ($k \in P_0$) множества произвести циклическую перестановку

$$\rightarrow j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \cdots \rightarrow j_{r-1} \rightarrow j_r \rightarrow ,$$

то преобразованные таким образом матрицы $B[M,J]$ и $\Lambda[J,J]$ будут согласованы с разбиением (3.17). При таком порядке вычислений определение последовательностей (3.15), (3.16) заранее не обязательно: переход от τ_{s-1} ($s \geq 2$) к $\tau_s > \tau_{s-1}$ совершается в тот момент, когда величина $\Delta^{\omega}_{\tau_{s-1}}(\tau_s)$ оказывается равной нулю (номер $j_s \in J_{\tau_s}$ в этом случае выбирается из условия $\Lambda[j_s, j_\omega] \neq 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из построения последовательности (3.15), условия

$$\Delta^{\omega}_{\tau_s}(k) \neq 0, \quad \tau_s \leq k < \tau_{s+1}, \quad \Lambda[J_{\tau_{s+1}}, j_\omega] \neq 0$$

являются необходимыми и достаточными для перехода от номера τ_s к τ_{s+1} ($s \geq 1$). Поэтому для повышения точности вычислений при построении последовательностей (3.15), (3.16) можно придерживаться следующей тактики. Исходя из номера $j_\alpha \in J_\alpha$ такого, что в строке $\Lambda[j_\alpha, J]$ хотя бы одна компонента отлична от нуля, номер j_ω определим из условия

$$|\Lambda[j_\alpha, j_\omega]| = \max_{j \in J_k,\, k > \alpha} |\Lambda[j_\alpha, j]|. \tag{3.22}$$

Далее, для каждой из пар подпоследовательностей (3.18) при $s \geq 1$ в качестве τ_{s+1} выбирается минимальный из элементов $k \succ \tau_s$, для которых

$$|\Delta^{\omega}_{\tau_s}(k)| < \max_{j \in J_k} |\Lambda[j, j_\omega]|. \qquad (3.23)$$

В качестве $j_{s+1} \in J_{\tau_{s+1}}$ в этом случае выбирается один из номеров, на котором достигается максимум в правой части соотношения (3.23) при $k = \tau_{s+1}$.

3. Таким образом, полагая $J_k = I_k$ ($k \in P$), $J_0 = \{j'\}$, $\alpha = k_0$, $j_\alpha = j_0$ и выбирая $j_\omega \in J_\omega$ из условия (3.22), можно построить последовательности (3.15), (3.16), так как в силу (3.1) величина (3.22) отлична от нуля. Если $\tau_\ell = 0$, то разбиение (3.17) – искомое. В противном случае ($\tau_\ell \prec 0$) процесс следует продолжить, исходя из базисного разбиения (3.17) и согласованных с ним матриц $\Lambda^{(1)}[J, J]$ и $B^{(1)}[M, J]$. Поскольку $\tau_\ell \succ k_0$, этот процесс конечен и обрывается через $h \leq |L_{k_0}|$ шагов.

§ 4. Учет дополнительных столбцов

Пусть матрице $A[M, \tilde{N}]$ ($\tilde{N} \subset N$, $\tilde{N} \neq N$) с индуцированной блочной структурой M_k, $N_k \cap \tilde{N}$ ($k \in P$) отвечает оптимальный порядок $\preccurlyeq$. Предположим, что множество $\tilde{N}$ выбрано таким образом, что при любом оптимальном упорядочении в P, отвечающем матрице $A[M, \tilde{N} \cup \{j\}]$ при $j \in N \setminus \tilde{N}$, максимальная длина цепи строго больше, чем при порядке $\preccurlyeq$. Напомним, что матрица $A[M, M]$ единичная (это предположение, как отмечалось во введении, не нарушает общности), поэтому $M \subset \tilde{N}$, и, следовательно, $N_k \cap \tilde{N} \neq \phi$ для любого $k \in P$.

Пусть $A[M, I]$ и $A[M, I' \cup K]$ – квадратные неособенные матрицы, причем $I' \subset I \subset \tilde{N}$, а $K \subset N \setminus \tilde{N}$. Очевидно, в разложении

$$A[M, I' \cup K] = A[M, I] \cdot G[I, I' \cup K] \qquad (4.1)$$

матрица G (с точностью до перестановки столбцов и строк) имеет следующую структуру:

$$G[I, I' \cup K] = \left[\begin{array}{c|c} E[I', I'] & G[I', K] \\ \hline 0 & G[I \setminus I', K] \end{array}\right].$$

Как показано в [I4], вместо того, чтобы решать систему уравнений с матрицей $A[M, I'\cup K]$, можно решать дважды систему с матрицей $A[M,I]$. При этом вместо матрицы $G[I,K]$ достаточно хранить лишь матрицу $G[I\setminus I', K]$ или обратную к ней.

В § 2 показано, что специфика столбца $A[M,j]$ ($j\in N$), даже если она имеется, никак не проявляется в структуре столбца $G[I,j]$, который может состоять сплошь из ненулевых элементов. Поэтому при таком подходе нельзя рассчитывать на какую-либо специфику матрицы $G[I\setminus I', K]$. Если же в (4.I) подставить разложение (2.I) матрицы $A[M,I]$, согласованное с базисным разбиением I_k ($k\in P$) множества I, то получим разложение

$$A[M,I'\cup K] = B[M,I]\cdot\lambda[I, I'\cup K],$$

где матрица $\lambda[I, I'\cup K]$, очевидно, имеет (с точностью до перестановки строк и столбцов) следующую структуру:

$$\lambda[I,I'\cup K]=\left[\begin{array}{c|c} \lambda[I',I'] & \lambda[I',K] \\ \hline 0 & \lambda[I\setminus I',K]\end{array}\right].$$

Покажем, что в столбце $\lambda[I,j]$, $j\in K$, отличны от нуля разве лишь части $\lambda[I_k,j]$, $k\in D_j$, где множество D_j состоит из объединения цепей L_τ с номерами τ, для которых $A[M_\tau,j]\neq 0$.

Действительно, столбец $\lambda[I,j]$, $j\in N$, является решением системы

$$B[M,I]\cdot\lambda[I,j]=A[M,j], \tag{4.2}$$

которая при $j\in\tilde N$ решается так же, как (2.8), поскольку в этом случае D_j является цепью. Если $j\in N\setminus\tilde N$, то в силу выбора $\tilde N$ множество D_j не может быть цепью: оно состоит по меньшей мере из объединения двух цепей, не содержащих одна другую. Пусть для некоторого s ($1\le s\le t$) такого, что $D_j\cap U_s\neq\phi$, вычислены части $\lambda[I_k,j]$, $k\in P\setminus\{D_j\cap\cap(\bigcup_{s<\sigma\le t} U_\sigma)\}$ (множества U_s определены в (I.I)), причем отличны от нуля разве лишь части $\lambda[I_k,j]$, $k\in D_j\cap\cap(\bigcup_{1\le\sigma<s} U_\sigma)$. Для каждого $k\in D_j\cap U_s$ столбец $\lambda[I_k,j]$ найдем из системы.

$$B[M_k, I_k]\cdot \lambda[I_k, j] = A_k[M_k, j],$$

где столбец $A_k[M,j]$ определен по формуле

$$A_k[M,j] = A[M,j] - \sum_{1\le\sigma<s}\ \sum_{\tau\in D_j\cap U_\sigma} B[M,I_\tau]\cdot\lambda[I_\tau, j]$$

и в силу блочной структуры матрицы $B[M,I]$ и столбца $A[M,j]$ имеет отличные от нуля части $A_k[M_\sigma, j]$ при каждом $k\in D_j\cap U_s$ разве лишь для $\sigma\in D_j\cap(U_s\cup\ldots\cup U_t)$. Используя представление

$$B[M,I_\tau] = A[M,I]\cdot\lambda^{-1}[I,I]\cdot E[I,I_\tau],$$

получаем

$$A_k[M_k,j] = A[M_k,j] - A[M_k,I]\cdot g_k[I,j].$$

Здесь столбец $g_k[I,j]$ является решением системы

$$\lambda[I,I]\cdot g_k[I,j] = \sum_{1\le\sigma<s}\ \sum_{\tau\in D_j\cap U_\sigma} E[I,I_\tau]\cdot\lambda[I_\tau,j].$$

Полагая $s = 1,2,\ldots, t$, найдем решение $\lambda[I,j]$ указанной структуры. Таким образом, при заданном множестве $\tilde N$ и согласованном с блочной структурой матрицы $A[M,\tilde N]$ порядке $\preccurlyeq$ можно заранее знать расположение ненулевых элементов в матрице $\lambda[I,K]$.

I. Покажем, что для решения системы уравнений с матрицей $A[M,I'\cup K]$ достаточно помимо обычной информации о матрицах $B[M,I]$ и $\Lambda[I,I]$ иметь лишь матрицу $\lambda[I\setminus I', K]$.

Пусть требуется найти вектор-столбец $h[I'\cup K]$ как решение системы

$$A[M,I'\cup K]\cdot h[I'\cup K] = A[M,j'] \quad (j'\in N). \qquad (4.3)$$

Сначала решаем систему (4.2) при $j=j'$ (или (2.8), если $j'\in\tilde N$). Затем решаем систему

$$B[M,I]\cdot z[I] = A[M,K]\cdot h[K], \qquad (4.4)$$

где $h[K]$ - решение системы

$$\lambda[I\setminus I', K]\cdot h[K] = \lambda[I\setminus I', j'].$$

Вектор $h[I']$ получается как решение системы

$$\lambda[I',I']\cdot h[I'] = \lambda[I',j'] - z[I']. \qquad (4.5)$$

Таким образом, если ограничиться хранением лишь матрицы $\lambda[I\setminus I',K]$, то, как и в [I4], придется лишний раз решать систему типа (4.4).

Для вычисления вектора-строки $y[M]$ как решения системы

$$y[M]\cdot A[M,I'\cup K] = c[I'\cup K] \qquad (4.6)$$

сначала решаем систему

$$\tilde{y}[M]\cdot B[M,I] = \gamma[I], \qquad (4.7)$$

где $\gamma[I']$ - решение системы

$$\gamma[I']\cdot \lambda[I',I'] = c[I'], \qquad (4.8)$$

а $\gamma[I\setminus I']$ - произвольный вектор, например, нулевой. Затем решаем систему

$$y[M]\cdot B[M,I] = \tilde{z}[I], \qquad (4.9)$$

где $\tilde{z}[I'] = \gamma[I']$, а $\tilde{z}[I\setminus I']$ - решение системы

$$\tilde{z}[I\setminus I']\lambda[I\setminus I',K] = c[K] - \tilde{y}[M]\cdot A[M,K] - \gamma[I\setminus I']\cdot\lambda[I\setminus I',K].$$

Таким образом, здесь также требуется лишний раз решать систему типа (4.7).

2. Если хранить всю матрицу $\lambda[I,K]$, то при решении системы (4.3) нет необходимости решать систему (4.4), - в этом случае вектор $h[I']$ получается из системы (4.5) при $z[I'] = \lambda[I',K]\cdot h[K]$.

Аналогично, при решении системы (4.6) нет необходимости решать систему (4.7): вектор $y[M]$ получается из системы (4.9), где $\tilde{z}[I]$ - решение системы

$$\tilde{z}[I]\cdot\lambda[I,I\cup K] = c[I'\cup K].$$

3. При замене столбца с номером $j_0\in I'\cup K$ в матрице $A[M,I'\cup K]$ столбцом $A[M,j']$, $j'\in N$, могут представиться четыре случая [I4].

(a) $j'\in N\setminus \tilde{N}$, $j_0\in K$. В этом случае множество I не меняется, а в множестве K номер j_0 заменяется на j' и столбец $\lambda[I\setminus I',j_0]$ заменяется на $\lambda[I\setminus I',j']$. При полном хранении матрицы $\lambda[I,K]$ столбец $\lambda[I,j_0]$ заменяется на $\tilde{\lambda}[I,j']$.

(б) $j' \in N \setminus \tilde{N}$, $j_0 \in I'$. В этом случае множество I не меняется по составу, но номер $j_0 \in I'$ переводится в множество вспомогательных. Таким образом, от множеств I , $I \setminus I'$, K переходим соответственно к множествам $I' \setminus \{j_0\}$, $(I \setminus I') \cup \{j_0\}$, $K \cup \{j'\}$. Матрица $\lambda[I \setminus I', K]$ "окаймляется" столбцом $\lambda[(I \setminus I') \cup \{j_0\}, j']$ и строкой

$$\lambda[j_0, K] = e[M] \cdot A[M, K],$$

где $e[M]$ - решение системы

$$e[M] \cdot B[M, I] = E[j_0, I],$$

причем если $j_0 \in I_{k_0}$, то в векторе $e[M]$ отличны от нуля разве лишь части $e[M_k]$, $k \leq k_0$.

При полном хранении матрицы $\lambda[I, K]$ к ней приписывается столбец $\lambda[I, j']$.

(в) $j' \in \tilde{N}$, $j_0 \in I'$. В этом случае от множеств I' , $I \setminus I'$, K переходим соответственно к множествам $(I' \setminus \{j_0\}) \cup \cup \{j'\}$, $[(I \setminus I') \cup \{j_0\}] \setminus \{i_0\}$, K , где номер i_0 выбирается из условия

$$|g[i_0, j']| = \max_{j \in (I \setminus I') \cup \{j_0\}} |g[j, j']|. \tag{4.10}$$

Напомним, что вектор $g[I, j']$ вычисляется в процессе решения системы (2.8) по формуле (2.11) при $k = 0$. Легко проверить, используя условие $h[j_0] \neq 0$, что величина $g[i_0, j']$ отлична от нуля. Последнее равносильно линейной независимости столбцов $A[M, j]$, $j \in J \setminus \{i_0\}$ (здесь, как и ранее, $J = I \cup \{j'\}$).

Формулы преобразования матрицы $\lambda[I, K]$ получаются из общего правила преобразования матрицы $\lambda[I, J \cup K]$ в представлении

$$A[M, J \cup K] = B[M, I] \cdot \lambda[I, J \cup K]$$

при замене номера $i_0 \in I$ номером j' . Положим

$$\Lambda[I, J \cup K] = \lambda[I, J \cup K] - E[I, J \cup K],$$

где $E[I, K \cup \{j'\}]$ - нулевая матрица, и, следовательно,

$$\lambda[I, K \cup \{j'\}] = \Lambda[I, K \cup \{j'\}].$$

В § 3 показано, что преобразования матриц $B[M,I]$ и $\Lambda[I, J\cup K]$, связанные с заменой номера $i_0\in I$ номером j', сводятся к последовательности преобразований, отвечающих допустимой перестановке двух номеров $j_\alpha\in J_\alpha$ и $j_\omega\in J_\omega$ ($\alpha\prec\omega\preccurlyeq 0$), где J_k ($k\in P_0$) – очередное базисное разбиение множества J относительно прямоугольной матрицы $A[M,J]$.

Это означает, что при каждой такой перестановке в матрице $\Lambda[J,K]$, где строка $\Lambda[J_0,K]$ нулевая, изменятся разве лишь блоки $\Lambda[J_k,K]$, $\alpha\preccurlyeq k\preccurlyeq\omega$, в соответствии с формулами (3.10) и (3.6) с заменой J на K. Однако при неполном хранении матрицы $\lambda[I,K]$ использование формул (3.6) не всегда возможно. Положим $\tilde J_k=\{j\in J_k,\ v_k[j]\neq 0\}$. Если $\tilde J_k\cap I'=\phi$, то используются формулы (3.6) с заменой J на K. Если $\tilde J_k\subset I'\setminus\{j_0\}$, то преобразование блока $\Lambda[J_k,K]$ опускается. В остальных случаях вместо формул (3.6) используются формулы $v_\alpha[K]=0$ и $v_{(k+1)}[K]=$ $=\frac{1}{\Delta_\alpha^\omega(k)}\{v_k[K]-e_k[M]\cdot A[M,K]\}$, $\alpha\preccurlyeq k\preccurlyeq\omega$, где строка $e_k[M]$ является решением системы

$$e_k[M]\cdot B[M,J\setminus J_0]=v_k[\tilde J_k]\cdot E[\tilde J_k, J\setminus J_0], \qquad (4.11)$$

причем в векторе $e_k[M]$ отличны от нуля разве лишь части $e_k[M_\tau]$, $\tau\preccurlyeq k$.

Заметим, что необходимость решать системы типа (4.11) вызвана неполным хранением матрицы $\lambda[I,K]$ и при большом $l=\max_{k\in P}|L_k|$ может стать непреодолимым препятствием. В этой ситуации, особенно если число $|N\setminus\tilde N|$ невелико, по-видимому, предпочтительнее хранить всю матрицу $\lambda[I,K]$ с учетом её блочной структуры.

(г) $j'\in\tilde N$, $j_0\in K$. В этом случае от множеств I', $I\setminus I'$, K переходим соответственно к множествам $I'\cup\{j'\}$, $(I\setminus I')\setminus\{i_0\}$, $K\setminus\{j_0\}$, где номер i_0 выбирается из условия (4.10) с заменой $(I\setminus I')\cup\{j_0\}$ на $I\setminus I'$. Матрицы $\lambda[I,K]$ или $\lambda[I\setminus I', K]$ преобразуются по тем же правилам, что и в п. (в) с последующим вычеркиванием столбца $\lambda[I,j_0]$ (или столбца $\lambda[I\setminus I', j_0]$ и строки $\lambda[i_0,K]$ при неполном хранении матрицы $\lambda[I,K]$).

Литература

1. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд. АН СССР, 1959.
2. ДАНЦИГ Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. М., "Прогресс", 1966.
3. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником. -"Докл. АН СССР", 1957, 113, № 5, с. 987-990.
4. ЗВЯГИНА Р.А. Задачи линейного программирования с узкоблочной матрицей. - В кн.: Оптимальное планирование. Вып. 15, Новосибирск, 1970, с. 33-47.
5. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задач линейного программирования большого объема. - В кн.: Оптимальное планирование. Вып. 2, Новосибирск, 1964, с. 3-22.
6. ЗВЯГИНА Р.А. Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами. - В кн.: Оптимальное планирование. Вып. 2, Новосибирск, 1964, с.50-62.
7. DANTZIG G.B., WOLFE PH. Decomposition principle for linear programs, Operat. Res., 1960, v.8, No.1, p.101-111.
8. ЗВЯГИНА Р.А. Задачи линейного программирования с матрицами произвольной блочной структуры. -"Докл. АН СССР", 1971, № 196, с. 755-758.
9. РАЙКОВ Д.А. Векторные пространства. М., Физматгиз, 1962.
10. HEESTERMANN A.R.G., SANDEE J. Special simplex algorithm for linked problems, Manag. Sci., 1965, v.11, No.3, p.420-428.
11. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.
12. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
13. БЕРЖ К. Теория графов и её применения. М., ИЛ, 1962.
14. ЯКОВЛЕВА М.А. Один общий прием учета дополнительных столбцов в специальных задачах линейного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Вып. 15, Новосибирск, 1970, с. 58-75.

Поступила в ред.-изд. отд.
30.VI.1974 г.